कृष्णदास संस्कृत सीरीज
४०

श्रीमद्भास्कराचार्यप्रणीतं-

बीजगणितम्

सविमर्श-सवासना-'सुधा' हिन्दी व्याख्योपेतम्

व्याख्याकारः

दैवज्ञ पं० देवचन्द्र झा

एम्. ए. (द्वय)
ज्योतिषाचार्य, साहित्याचार्य; पोष्टाचार्य,
लब्धावकाशभूतपूर्वज्योतिषप्राध्यापक-
धर्मसमाज संस्कृत कालेज मुजफरपुर (विहार)
सम्प्रति-सम्मानित प्राध्यापक-
मिथिला संस्कृत शोध संस्थान, दरभंगा (विहार)

कृष्णदास अकादमी, वाराणसी
१९८३

KRISHNADAS SANSKRIT SERIES
40
****

BIJGANIT

(Elements of Algebra)

OF

SHRI BHASKARACHARYA

EDIED WITH

'SUDHA' HINDI COMMEN TARY &
EXPOSITARY NOTES

By

Pt. DEVA CHANDRA JHA
M. A. (Double)

Ex-prof. in Jyotish, Dharma Samaj (Govt.)
Sanskrit College, Muzaffarpur (Bihar).

KRISHNADAS ACADEMY
1983

प्रस्तावना

विदितमेवास्ति तत्र समेषां ज्योतिश्शास्त्रविदां विदुषां यद् बीजगणितं ज्योतिश्शास्त्रजिज्ञासूना—मन्तेवसतां कीदृशमुपयोगि, कीदृशं वा गणित-सिद्धान्तज्योतिषप्रवेशे प्रारम्भिकं द्वारं, कीदृशं वाऽव्यक्ताना मपि वस्तूनां व्यक्तीकरणेऽमोघास्त्रमिति। संस्कृतसाहित्ये ज्योतिषशास्त्रीयमूर्धन्यग्रंथेष्वन्यतमग्रन्थो हि बीजगणितम्। वस्तुतो भास्करतोऽपि प्राचीनैर्बहुभिराचार्यै र्बहुविधं बीजगणितं तत्तत्समये निरमायि। भास्करीयं बीजगणितमदः सर्वतोऽप्यर्वाचीनं समेषां सारभूतं संक्षिप्तं च किमप्यनिर्वचनीयमेव वैसिष्टयमुद्वहति। भास्करः स्वयमपि ग्रन्थान्ते—

"ब्रह्माह्वयश्रीधरपद्मनाभबीजानि यस्मादतिविस्तृतानि
आदाय तत्सार-मकारि नूनं सद्युक्तियुक्तं लघु शिष्यतुष्टयै॥"

इत्यभिदधानो बीजगणितरचनाप्रसङ्गे च ग्रन्थारम्भे—

पूर्वं प्रोक्तं व्यक्तमव्यक्तबीजं प्रायः प्रश्ना नो विनाऽव्यक्तयुक्त्या।
ज्ञातुं शक्या मन्दधीभिर्नितान्तं यस्मात्तस्माद् वच्मि बीजक्रियां च॥

इति ग्रंथनिर्माणबीजमपि स्फुटमभ्यधात्।

गोलाध्यायान्ते–"रसगुणपूर्णमहीसमशकनृपसमयेऽभवन्ममोत्पत्तिः। रस-गुणवर्षेण मया सिद्धान्तशिरोमणी रचित" इति पद्यावकोकनतः षट्त्रिंशन्मित-वर्षावस्थायामेव भास्करो गणितगोलपाटीबीजसंज्ञकाध्यायचतुष्टयात्मकं सिद्धान्तशिरोमणिं व्यररचत्। तत्र च गणिताध्यायगोलाध्याययोरनन्तरं तदुपकरणभूतं व्यक्ताऽव्यक्तगणितं तत्सोपानमिव विरचितमित्यनुमीयते। तत्रापि पाटीगणितं प्रागमिधायाव्यक्तगणितमदोबुद्धेर्गणितं व्याजहार।

इदानीन्तने हि वैज्ञानिके युगे प्रायो विश्वस्य समस्तेष्वपि देशेषु बीजगणित-मनेकविधं तत्तद्भाषासु विरचय्य छात्राः पाठ्यन्ते। अन्तरा बीजगणिताध्ययनं नैव कश्चिदपि गणितज्ञो वैज्ञानिको वा भवितुमर्हे इति नहि तन्महत्त्वमपलपितुं शक्यम्। भारतेऽप्यस्ति बहुविधं पाश्चात्यगणितज्ञप्रसारितगतिविस्तृतं च बीज-गणितम्। किञ्च भास्करीये हि बीजगणिते आधुनिकबीजगणितविषयाः पयोलीनं नवनीतमिव मन्थनतः कथमुपलभ्यन्त इति विभाव्यमस्ति विज्ञानाम्।

संख्यामधिकृत्य कृतं शास्त्रं सांख्यं—गणितं प्रकृतिप्रधानं दर्शनंवेतिजामानो भास्करः समस्तव्यक्तजगत एकबीजमव्यक्तमीशं गणितंचाभिवन्द्य ग्रन्थेऽस्मिन्

धनर्णषड्विधम्, शून्यसंकलनव्यवकलनगुणनभजनादिकम, अव्यक्तसंकलनादि-षड्विधम्, करणीषड्विधम्, कुट्टकम्, वर्गप्रकृतिम् चक्रवालम्, एकवर्णसमीकरणम्, अव्यक्तवर्गादिसमीकरणम्, अनेकवर्णसमीकरणम्, अनेकवर्णमध्यमाहरणम्, भावितं चेति सदध्यायान् निबन्धितवान् ।

उपर्युक्ताध्यायस्थविषयाणां समस्तेऽपि गणितसिद्धान्तज्यौतिषे प्रायः प्रतिपदं प्रयोजनं भवति । विना बीजगणितज्ञानं गणितसिद्धान्तज्यौतिषाध्ययनमपि निरर्थकमिति ग्रन्थकारः स्वयमपि—

"द्विविधगणितमुक्तं व्यक्तमव्यक्तयुक्तं
तदवगमननिष्ठः शब्दशास्त्रे पटिष्ठः ।
यदि भवति तदेदं ज्यौतिषं भूरिभेदं-
प्रपठितुमधिकारी सोऽन्यथा नामधारी"

ति प्रावोचत् ।

वस्तुतो बीजगणितमिदं प्रायो ज्यौतिषशास्त्रविपठिषवः सपरिश्रमं सायासं सगाम्भीर्यं चाधीत्यैव ज्योतिःशास्त्रमध्येतुं प्राक् प्रयतन्तेस्म । अद्यत्वे बीजगणितमदः कैश्चन सपरिश्रममध्येष्यते, अध्यापकैश्च सानन्दमध्यापयिष्यत इत्याशायाः क्षीणत्वेऽपि 'उत्पत्स्यते हि मम कोपि समानधर्मा कालोह्ययं निरवधिर्विपुला च पृथ्वी' ति स्मरणात्, संस्कृतग्रन्थप्रसिद्धप्रकाशकस्य वाराणसीस्थ-कृष्णदास अकादमीत्यध्यक्षस्यानुरोधाच्च ग्रन्थमिमं सविमर्शसुधाव्याख्योपेतं सवासनं च सपरिश्रममुल्लिख्य पञ्चवर्षाणीतः प्रागेव प्रकाशकं तत्प्रकाशनाय प्राहिणोम् । अनेकविधप्रत्यूहव्यूहैर्बाधिततया मुहुर्मुहुरनुरुद्धाश्चापि ते नहि सत्वरमिमं प्रकाशयितुमशकन् । विश्वेश्वरानुकम्पया ऐषम एव सुयोगमिममुपलभ्य तत्प्रकाशनाय स्वयमहं वाराणसीमागत्यैव ग्रन्थमिमं समर्पयम् । आधुनिक-पाश्चात्यबीजगणितविषयाणां भास्करीये बीजगणिते कथं क्व च वा सन्निवेश इति विमर्शशीर्षकस्थलेषु यथामति मया विशदीकृतम् । अतिपल्लवितस्य पाश्चात्यबीजगणितस्य साम्यमिदानीं प्राचीनबीजगणितानामसंभवम् । केवलं ममैष एव प्रयासो यद् जिज्ञासवश्छात्रा भास्करीयबीजगणितमभीक्ष्यैतदवगच्छन्तु यदस्मत् प्राचीनबीजगणितेऽपि नवीनगणितानामस्ति यथास्थलं सन्निवेश इति । विस्तरभयाद् विमर्शा अपि संक्षेपिताः ।

चिरात्प्रतीक्षितं सविमर्शसुधाव्याख्योपेतं सवासनं च भास्करीयबीजगणितमद्य प्रकाशितमवलोक्य परां शान्तिमनुभवन्नासे । उदासे चात्रतनीं त्रुटिमीक्षमाणो बहूनामुपहासपाशप्रसारावसरेभ्यः । पुरोभागिनस्तु निर्दोषमपि सदोषमेवव्यावर्णयन्ति, किं पुनस्त्रुटिपूर्णस्यैतस्य कृते वाच्यम् । समयाभावात् केवलं विंशति-

मितैरेवाहोभिरस्य सम्पादनमतिद्रुतगत्याऽकारीति प्रूफसंशोधने यत्र तत्र संजाता-स्त्रुटयोऽवश्यं सहृदयैः क्षन्तव्या इति मुहुर्मुहुरभ्यर्थये ।

पुस्तकस्यास्योपस्थापने परमगुरूणां विशेषसंशोधकाभिधानतः प्रथितानां म० म० सुधाकरद्विवेदिबापूदेवशास्त्रिणां महत्तममृणं नैव बिस्मर्तुं शक्यं यदीयग्रन्थाध्ययनतो यत्र तत्र च तदुक्तविषयप्रतिपादनतोवाऽतितरां साहाय्यमह मासादयम् । तथापि वाञ्छितस्वरूपोपस्थापनेऽक्षमतया हृदा विषीदाम्येव ।

अवसानेऽनेकविधाऽन्तरायैर्बाधितोऽपि प्रकाशकः कृष्णदास अकादमी त्यध्यक्षः, प्रकाशनविभागाध्यक्षः श्रीरामचन्द्रझा महोदयश्च धन्यवादार्हौं, यदीयस-हानुभूत्या पुस्तकमिदं प्रकाशितमभूत् ।

"गच्छतः स्खलनं क्वापि भवत्येव प्रमादतः
हसन्ति दुर्जनास्तत्र समादधति सज्जनाः ॥" इति

प्राचीनतमोक्त्या पुस्तके प्रमादतस्त्रुटिरपि नियता । त्रुटिपूर्णमपि पुस्तक-मदोऽधीत्य प्रतिवर्षं द्वित्राः पञ्चषा वा छात्रा यद्युपकृताः स्युस्तदात्मनः परिश्रमं सफलं मन्येय । आशासे च जिज्ञासवश्छात्रा अवश्यमनेनोपकृताः स्युरिति हृदाऽ-भिलष्य विरिरंसामि ।

विनीतो देवचन्द्र झा

दो शब्द

परम पिता परमेश्वर की असीम अनुकम्पा से विमर्श तथा वासनासहित 'सुधा' नाम की हिन्दी व्याख्या के साथ भास्करीय बीजगणित को प्रकाशित देखकर मुझे अपार हर्ष हो रहा है। कृष्णदास अकादमी वाराणसी के अध्यक्ष के अनुरोध पर बीजगणित को इस रूप में प्रकाशित करने का मेरा उद्देश्य राष्ट्रभाषा का सम्मान तथा संस्कृतानभिज्ञों को भी अपने प्राचीन धरोहर से परिचित कराना मात्र है।

ज्योतिष शास्त्र पढ़ने वालों के लिए बीजगणित कितना उपयोगी है यह ज्योतिषज्ञ के लिए अविदित नहीं। बिना बीजगणित ज्ञान के ज्योतिष पढ़ना निरर्थक है ऐसा ग्रन्थकार ने स्वयम् अपने सिद्धान्तग्रन्थ के आरम्भ में—

द्विविधगणितमुक्तं व्यक्तमव्यक्तयुक्तं
तदवगमननिष्ठः शब्दशास्त्रेपटिष्ठः ।
यदि भवति तदेदं ज्यौतिषं भूरिभेदं-
प्रपठितुमधिकारी सोऽन्यथा नामधारी ॥

कहकर यह स्पष्ट कर दिया है कि बीजगणित के पूर्णज्ञान के विना ज्यौतिष शास्त्र पढ़ने का अधिकार ही नहीं है।

भास्करीय बीजगणित पर कई प्राचीन एवं नवीन टीकाएँ भी हैं। किसी में पाश्चात्य गणित की ही भरमार तो किसी में निरर्थक टीकाओं के सम्मिश्रण से इसे बोझिल बना दिया गया है। संयोगतः ऐसी भी टीका अब दुर्लभ है।

मैंने सविमर्श सुधा के द्वारा इसे अत्याधुनिक बनाने का प्रयास किया है। भास्करीय बीजगणित के किन-किन पंक्तियों से कैसे गुणावयव, महत्तमसमापवर्त्तक अनिश्चित समीकरण आदि जैसे विषय निकलते, इन बातों को अनेक उदाहरण तथा सोत्तर प्रश्नों के द्वारा स्पष्ट कर दिया गया है। मुझे विश्वास है इस समस्त ग्रन्थ के पूर्णतः अध्ययन से छात्रों को अलग से किसी आधुनिक बीजगणित की आवश्यकता नहीं होगी। चूँकि आधुनिक बीजगणित बहुत विस्तृत है अतः सभी विषयों का सन्निवेश नहीं किया जा सका है, ऐसा करने पर इस ग्रन्थ के साथ न्याय नहीं होता। इस ग्रन्थ के अध्ययन से यदि कुछ भी छात्र लाभान्वित होवें तो मैं अपने श्रम को सार्थक मानूंगा।

अन्त में अत्यधिक जल्दबाजी के कारण केवल २० दिनों में ही इसके प्रकाशन से प्रूफ संशोधन में अनेक त्रुटियाँ रह गईं जिनका निराकरण अब दूसरे संस्करण में ही सम्भव है। सहृदय पाठक उन त्रुटियों के लिए मुझे क्षमा करें क्योंकि—

गच्छतः स्खलनं क्वापि भवत्येव प्रमादतः
हसन्ति दुर्जनास्तत्र समादधति सज्जनाः।

विनीत—देवचन्द्र झा

विषय-सूची

व्याख्याकर्तुर्मङ्गलाचरणम्

यत्पादपद्मयुगलं विमलं स्मरन्तो
धीरास्तरन्ति विकटानपि संकटान् वै ।
तं विश्ववन्द्यमनिलात्मजमाशुतोष-
रौद्रस्वरूपमनिशं मनसा स्मरामि ॥१॥

विश्वेश्वरं गुरुवरं च चतुर्धुरीण-
गेनादिलालमपरं शिरसाऽभिवन्द्य ।
बीजं तु भास्करकृतं सुधयाऽभिविक्त-
सद्वासनान्वितविमर्शयुतं करोमि ॥२॥

साडम्बरं बहुविधं बहुभिर्वितत्य
व्याख्यातमस्ति नहि तद् विदुषां मुदे हि ।
तस्मादुपेक्ष्य सकलं त्वनपेक्षितं तु
नापेक्षितं विजहदात्ममतं तमोमि ॥३॥

कृती जयतु भास्करोऽपि च सुधाकरो विद्वरो-
जयन्तु मुरलीधरप्रभृतयोऽपि विद्वद्वराः ।
गुरू मम दिवं गतावपि सदा जयेतां मुदा
यदाप्तकृपया मया बहुविधा "सुधा" तन्यते ॥४॥

देवचन्द्रकृतबीजवासनां
सद्विमर्शसहितां सुधान्विताम् ।
सूक्ष्मवीक्षणपरैर्विचक्षणै-
र्वीक्ष्य मोदजलधौ निमज्यताम् ॥५॥

॥ श्रीः ॥

भास्करीयबीजगणितम्

सविमर्श-सोदाहरण-सवासना 'सुधा' हिन्दीव्याख्योपेतम्

उत्पादकं यत्प्रवदन्ति बुद्धे-
रधिष्ठितं सत्पुरुषेण सांख्याः ।
व्यक्तस्य कृत्स्नस्य तदेकबीज-
मव्यक्तमीशं गणितं च वन्दे ॥ १ ॥

सुधा—सांख्य या संख्याशास्त्र (गणित) को जानने वाले (सांख्यदर्शनवेत्ता या गणितज्ञ ज्योतिषी) जिस समस्त जगत् के एक बीज स्वरूप प्रकृति या समस्त पाटीगणित के बीजरूप अव्यक्तगणित) को पुरुष (पुष्कर पलाशवन्निर्लिप्त चेतन पुरुष या तेजस्वी पुरुष) से अधिष्ठित (साक्षित्वेन सन्निहित या अभ्यस्त होने पर बुद्धि (महत्तत्त्व या गणित सम्बन्धी बुद्धि) के उत्पादक (अभिव्यञ्जक या विवर्धक,) अर्थात् सांख्यदर्शनवेत्ता कपिल आदि जिस समस्त दृश्य जगत् के मूलभूत अव्यक्त प्रकृति को चेतन पुरुष के सन्निकर्ष से अभिव्यञ्जक एवं गणितज्ञ ज्योतिषी लोग पाटीगणित के मूलभूत जिस अव्यक्तगणित को तेजस्वी द्वारा अभ्यस्त किए जाने पर बुद्धिवर्धक, बतलाते हैं, दृश्यजगत् के एक बीज, ईशस्वरूप उस अव्यक्त प्रकृति तथा समस्त पाटीगणित के बीजरूप श्रेष्ठ उस अव्यक्त गणित की मैं वन्दना करता हूँ ॥ १ ॥

विमर्श—प्रस्तुत ग्रन्थकार भास्कराचार्य ने इस मंगलाचरण में प्रायः सभी श्लिष्टपदों के सन्निवेश से दर्शनप्रतिपादित ईशरूप अव्यक्त प्रकृति तथा अव्यक्त गणित दोनों की समान रूप से वन्दना की है ।

कतिपय व्याख्याकारों ने बुद्धेः ईशम् से समस्त पद्य को गणेश के पक्ष में भी घटाया है । शब्द कामधेनु हैं, अतः बहुविध अर्थ किये जा सकते हैं ॥ १ ॥

पूर्वं प्रोक्तं व्यक्तमव्यक्तबीजं
प्रायः प्रश्ना नो विनाऽव्यक्तयुक्त्या ।
ज्ञातुं शक्या मन्दधीभिर्नितान्तं
यस्मात्तस्माद् वच्मि बीजक्रियाश्च ॥ २ ॥

सुधा—अव्यक्त ही है बीज जिसका ऐसा व्यक्तगणित (लीलावती) में पहले ही कह चुका हूँ । अव्यक्त (बीजगणित) युक्ति के बिना प्रायः मन्द बुद्धियों के द्वारा सभी प्रश्नोत्तर नहीं जाने जा सकते, अतः मैं बीज क्रिया (बीजगणित) बतलाता हूँ ॥ २ ॥

विमर्श—ग्रन्थोपयोगी धनादि सांकेतिक चिह्न—

+ यह गणित में व्यवहृत धन चिह्न है। दो अङ्कों या वर्णों के बीच इस चिह्न के रहने से दोनों अङ्कों या वर्णों का योग व्यक्त होता है। जैसे ५ + ४ = ९।

− यह ऋण चिह्न है। जिस अंक या वर्ण के पूर्व यह चिह्न रहता है वह विशोध्य होता है। जैसे २५ − १० = १५, या −१० + १५ ऐसे भी रहने पर १५ में से १० घटाने का ही संकेत मिलता है। प्रस्तुत भास्करीय बीजगणित में अंक या वर्ण के शिर पर बिन्दु रख कर ऋण का संकेत होता है, जैसे य ५ रु० १०̇ का अर्थ है कि पञ्च गुणित य के मान में से १० को घटाना।

× यह गुणन का चिह्न है। यह सम्बद्ध अङ्कों या वर्णों का गुणन व्यक्त करता है। जैसे ५ × १० = ५०, य × क = यक या य.क।

÷ यह भाग का चिह्न है। इससे परवर्ती वर्ण या अंक से पूर्ववर्ती अंक या वर्ण में भाग लेना सूचित होता है; जैसे २० ÷ ५ = ४, या $\frac{२५}{५}$=५, भी लिखते हैं।

वर्गादि घात मापक चिह्न--किसी भी अंक या वर्ण के ऊपर दाहिनी ओर २, ३, ४, ५ आदि अंको के रखने से वर्ग, घन, चतुर्घात, पञ्चघात आदि का बोध होता है, जैसे $अ^{२}$= अवर्ग, $अ^{3}$ = अघन, $अ^{४}$ = अचतुर्घात, $अ^{५}$ = अपञ्चघात ये क्रमशः समान दो, समान तीन, समान चार और समान पांच अंकों, या वर्णों के घात से ही होते हैं। जैसे $अ^{२}$= अ × अ, $अ^{3}$ = अ × अ × अ $अ^{४}$ = अ × अ × अ × अ आदि।

वर्गमूल का चिह्न—$\sqrt{}$ यह वर्गमूल का चिह्न है। प्रस्तुत भास्करीय बीजगणित में $\sqrt{}$ चिह्न की जगह 'क' लिखकर ही वर्गमूल (करणी) का संकेत मिलता है।

घनमूल का चिह्न—$\sqrt[3]{}$ ।

चतुर्घात मूल का चिह्न—$\sqrt[4]{}$ आदि है।

पञ्चघात मूल का चिह्न—$\sqrt[5]{}$ आदि है।

कोष्ठक का चिह्न—'—' '( )' '{ }' '[ ]' ये हैं इन कोष्ठों के भीतर स्थित अंक या वर्ण एक राशि के रूप में होते हैं। जैसे—{य– (अ + क–ग) प} यह द्विपद राशि है, जिसमें प्रथम पद 'य' है और (अ + क–ग) प रूप द्वितीय पद विशोध्य है।

धनर्ण का चिह्न ± यह है। दो अंकों या वर्णों के बीच इस चिह्न के रखने से दोनों का योग या अंतर समझा जाता है, जैसे—२५ ± ७ यह ३२, या १८ संख्याओं का बोधक है।

अन्तर का चिह्न—दो संख्याओं या वर्णों के बीच दिया ∽ यह चिह्न दोनों का अन्तर व्यक्त करता है। अर्थात् दोनों में जो बड़ा हो उसमें से छोटे को घटा कर जो शेष रहे उसीका बोधक यह चिह्न है।

बराबर का चिह्न—'=' या : : है।

आधिक्य बोधक चिह्न— ∠यह है। दो पक्षों के बीच इस चिह्न के रखने से जिसकी ओर यह चिह्न रहेगा, उसे दूसरे पक्ष से बड़ा समझा जायगा। अ > क लिखने से अ संख्या क से बड़ी, पुनः अ ∠ क में अ से क बड़ी द्योतित। होती है।

धनर्णसङ्कलने करणसूत्रं वृत्तार्धम्—

योगे युतिः स्यात् क्षययोः स्वयोर्वा, धनर्णयोरन्तरमेव योगः ॥

सुधा—धनात्मक राशियों या ऋणात्मक राशियों का योग पाटी गणितोक्त "कार्यः क्रमादुत्क्रमतोऽथवाङ्क" इत्यादि नियमानुसार ही करना। धनात्मक-राशियों का ऐसा योग धनात्मक और ऋणात्मकों का ऐसा योग ऋणात्मक होगा।

धनात्मक एवं ऋणात्मक दोनों तरह के राशियों या अंकों का योग अभीप्सित हो तो दोनों के अन्तर करने से ही दोनों का योग निष्पन्न होगा।

वासना—यदि कस्यचन पार्श्वे दश रूप्यकाणि सन्ति। सौभाग्यतो रूप्यक पञ्चकस्य लाभे नूनमेतत्पार्श्वे पञ्चदश रूप्यकाणि—सम्पद्येरन्। दशरूप्यकर्णवता पुंसा दुर्दैवाद्रूप्यकपञ्चके पुनर्व्ययिते ध्रुवमसौ पञ्चदश रूपप्यकर्णवान् जायेत।

दशरूप्यकर्णवतो जनस्य रूप्यकपञ्चकलाभे पञ्चरूप्यर्णवत्त्वमेवं च पञ्चदश रूप्यकलाभे रूप्यकपञ्चकधनवत्त्वमिति प्रत्यक्षतोऽवलोकनाद्धनयोः क्षययोर्वा

योगेन, धनर्णयोश्चान्तरेण योगफलं भवतीति सर्वथैव युक्तियुक्तं तथा चोक्तं नारायणेनाऽपि—

योगे धनयोः क्षययोर्योगः स्यात् स्वर्णयोर्विवरम् ।
अधिकादूनमपास्य च शेषं तद्भावमुपयाति ।'

उदाहरणम्—

रूपत्रयं रूपतुष्टयं च क्षयं धनं वा सहितं वदाशु ।
स्वर्णं क्षयः स्वं च पृथक् पृथङ् मे धनर्णयोः सङ्कलनामवैषि ॥४॥

अत्र रूपाणामव्यक्तानां चाद्याक्षराणि उपलक्षणार्थंलेख्यानि, यानि ऋणगतानि तान्यूर्ध्वबिन्दूनि च ॥ ५ ॥

न्यासं रू ३̇ रू ४̇ योगे जातं रु ७̇
,, रु ३ रु ४ ,, ,, रु ७
,, रु ३ रु ४̇ ,, ,, रु १̇
,, रु ३̇ रु ४ ,, ,, रु १

एवं विभिन्नेष्वपि ॥६॥

सुधा—रूप ३ और रूप ४ को ऋण, धन, अर्थात् दोनों को ऋण या दोनों को धन मानकर एवम् धन ऋण को ऋण धन कल्पित कर योग फल बतलाइए, यदि—धन, ऋण का योग करना जानते हो ।

यहाँ अव्यक्त बोधक अक्षर और व्यक्ताङ्क बोधक रूप (रू) उपलक्षणार्थ लिखना । जिन व्यक्त या अव्यक्त के ऊपर बिन्दु निहित हो उसे ऋण समझना ।

ग्रन्थकारोक्त उदाहरण—

$-३ + (-४) = -७ =$ योगफल
$३ + ४ = +७ =$,,
$३ + (-४) = -१ =$,,
$-३ + ४ = १ =$,,

विमर्श—सूत्रोक्त धनात्मक राशियों का योग धनात्मक, ऋणात्मक राशियों का योग ऋणात्मक, और धनात्मक, ऋणात्मक दोनों तरह के राशियों का योग दोनों के अन्तर करने से ही होता है । इसे ध्यान में रखकर कुछ उदाहरण दे रहा हूँ :—

(१) $५ - ३ + १० - ५ \times ३ = ५ - ३ + १० - १५ = १५ - १८ = -३ =$ उत्तर

(२) ५न + ३क − ८य + क^{२} − (अ + क + ग) + २५ का मान बताइए जब कि न = १, क = २, अ = ३, ग = ४, य = ५

अकरादि वर्णों के मान से उत्थापन देने से

उपर्युक्त उदा० = १ × ५ + ३ × २ − ८ × ५ + ४ − (३ + २ + ४) + २५ = ५ + ६ − ४० + ४ − ९ + २५ = ४० − ४९ = − ९

(३) य^{३} . क + य^{२} . क − य . क^{२} − क^{३} + प^{२} का मान बताइये जब कि य = १, क = २, प = ३ ।

वर्णों के मान से उत्थापन देने पर उपर्युक्त उदाहरण =

१^{३} × २ + १^{२} × २ − १ × ४ − ८ + ९ =

१ × २ + १ × २ − ४ − ८ + ९ = २ + २ − ४ − ८ + ९ =

१३ − १२ = १ = उत्तर ।

(४) २अ + ३क − ५ न, ५ क − ४ अ + २ न, − ३ क − ५ अ − ३ न इनका योग बताइए जब कि अ = २, क = ३, न = ४

ऐसे उदाहरणों में सुविधा के लिए पहले तीन पंक्तियों में सजातीय वर्णों को सामने रखकर नियमानुसार योग करें, जैसे :—

  २ अ + ३ क − ५ न
− ४ अ + ५ क + २ न
− ५ अ − ३ क − ३ न
− ७ अ + ५ क − ६ न = योग

वर्णों के उपर्युक्त मानों से उत्थापन देने पर योग =

− ७ × २ + ५ × ३ − ६ × ४

= − १४ + १५ − २४ = १५ − ३८ = − २३ = उत्तर ।

(५) − अ^{२} + क − ४ प . क + ३ अ प का मान बताइये जब कि अ = ३, क = २, प = ४,

वर्णों के मानों से उत्थापन देने पर उपर्युक्त चतुष्पद का मान =

− ९ + ४ − ४ × ४ × २ + ३ × ३ × ४ =

− ९ + ४ − ३२ + ३६ = − ४१ + ४० = − १ = उत्तर ।

(६) २ य + ३ क − ५ न − २५, ५ क − ४ न + ३ य + ५; २५ − ५ न + ४ य − ८ क, इन तीनों चतुष्पदीय राशियों का योग बताइए जब कि य = २, क = ३, न = ४ ।

उपर्युक्त तीनों राशियों के सजातीय वर्णों को एक पंक्ति में रखकर लिखने से

२ य + ३ क − ५ न − २५
३ य + ५ क − ४ न + ५
४ य − ८ क − ५ न + २५

योग = ९ य − १४ न + ५

वर्णों के मान से उत्थापन देने से योग = ९ × २ − १४ × ४ + ५ = १८ − ५६ + ५ =

२३ − ५६ = − ३३ ।

(७) ८ अ^3.क^3 + ३ न^2.प^2 − १० क^2.अ^2 + ४ न^3.क − क^2 न^2.प^2
इसका मान बताइये जब कि अ = १, क = २, न = ३, प = ४

वर्णों के मान से उत्थापन देने से उपर्युक्त स्वरूप =
८ × १ × ८ + ३ × ९ × १६ − १० × ४ × १ + ४ × २७ × २ − ४ × ९ × १६

= ६४ + २७ × १६ − ४० + ८ × २७ − ४ × ९ × १६
= ६४ + ४३२ − ४० + २१६ − ५७६ = ७१२ − ६१६ = ९६ ।

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

सिद्ध कीजिए—

१. − २५ + ३ − ४ × ६ + ४० + ६ = ०
२. यदि अ = ४, क = २, ग = ५ है तो अ^2. क − क ग − अ = १८
३. यदि अ = २, ब = ४, ग = ६, प = ८ तो
अ.^{3} ब − अ.^{2} ग + प. ग^2 − ब.^{2} ग = २००
४. ५ क^3 + ३ क.^{2} र − ७ क र^2 + र^3 का मान = − १ जब कि क = १ र = २
५. य = २, र = ७, ल = ३, ब = १ तो
− ५ व + ६ व − ल + ३ य − २ र + ल = ७
६. अ = २, ब = ३, स = ४, द = ५ तो
अ.^{2} ब^2 + स व − द.^{2} अ − अ द = − १२
७. − अ^3 − ब^3 − ब^2 + स^2 + अ.^{2} ब^2 = ८ यदि अ = २, ब = ३, स = ४
८. यदि य = १, र = २, ल = ३, तो
य^3 + र^3 + ल^3 − र^2 ल^2 = ०

धनर्णव्यवकलने करणसूत्रं वृत्तार्धम्—

संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति स्वत्वं क्षयस्तद्युतिरुक्तवच्च ॥१॥

सुधा—विशोध्यमान (घटाया जाने वाला) धन ऋण हो जाता और विशोध्यमान ऋण धन हो जाता है। पुनः दोनों (शोध्य और शोधक) का पूर्ववत् योग करना चाहिए। वही योग दोनों का अन्तर हो जायगा।

वासना—विशोधकतो विशोध्यानां शोधनं नाम शोध्याङ्कसममल्पीकरणम्। ऋणविशोध्यानां शोधनं च विशोधके विशोध्यसमाङ्कप्रक्षेपणम्। एवं सति धनाद्धने शोधिते शोध्याङ्कसममल्पीकृते तदन्तरसमं धनमृणं वाऽवशिष्येत। ऋणाच्च ऋणेशोधितेऽर्थात् शोध्याङ्कसममल्पीकृते तदन्तरसममृणं धनं वा (शोधकाङ्केभ्यः शोध्याङ्कानामल्पत्वधनत्वयोः) शिष्यते। यथाहि दशरूप्यकवताजनेन रूप्यकपञ्चके व्ययिते रूप्यकपञ्चकं धनावशेषः, पञ्चदशरूप्यके च व्ययिते (शोधिते) रूप्यकपञ्चकमृणावशेषः, शोध्याङ्कानां विशोधकाङ्केभ्योऽल्पाधिकत्वात्। एवं च दशरूप्यकर्णतः ऋणरूप्यकपञ्चके शोधितेऽर्थात्तन्मितमृणेऽल्पीकृते, दशरूप्यकर्णे रूप्यकपञ्चके प्रक्षिप्ते वा रूप्यकपञ्चकमृणम्, एव क्षयपञ्चदश रूप्यके च शोधितेऽर्थात् पञ्चदशरूप्यके तत्र प्रक्षिप्ते रूप्यकपञ्चकं धनं स्फुटमवशिष्यते। परमेवं शोध्यमानस्य धनस्य क्षयत्वे ऋणस्य च धनत्व एवं सम्भवतीति सूपपन्नं सर्वम्।

उदाहरणम्--

त्रयाद् द्वयं स्वात् स्वमृणादृणं च
व्यस्तं च संशोध्य वदाशु शेषम्।

न्यासः— रु० ३ रु० २ अन्तरे जातम् रु० १।
,, रु० ३˙ रु० २˙ ,, ,, रु० १˙।
,, रु० ३ रु० २˙ ,, ,, रु० ५।
,, रु० ३˙ रु० २ ,, ,, रु० ५˙।

इति धनर्णसंकलनव्यवकलने।

सुधा—तीन धन में से दो धन को, तीन ऋण में से दो ऋण को तीन धन में से दो ऋण को, और तीन ऋण में से दो धन को घटाने से शेष क्या होगा, यह शीघ्र कहो।

उदाहरण-- ३ − (२) = ३ − २ = १
− ३ − (− २) = −३ + २ = − १
३ − (− २) = ३ + २ = ५
− ३ − (२) = − ३ − २ = − ५

विमर्श—व्यवकलन में विशोध्य और विशोधक दो ही राशि होती है। विशोध्य को एक कोष्ठक के अन्तर्गत कर के धनात्मक को ऋणात्म और ऋणात्मक को धनात्मक बनाकर विशोधक के सजातीय पदों के साथ योग करें। वही योग दोनों का अन्तर = वियोगफल आएगा। जैसे—

अ = ५, क = ३, न = ४ तो (अ − क) को न में घटाना है।

यहाँ विशोध्य = (अ − क)। विशोधक=न अतः न − (अ − क)

= न − अ + क = ४ − ५ + ३ = ७ − ५ = २

उदा० (१)—५ अ य^{२} + ९ क र में से ८ अ य^{२} − ३ क र + ५ ल^{२} को घटाइये जब कि अ=३, य=१, र=२, ल=४, क = ५

= ५ अ य^{२} + ९ क र − (८ अ य^{२} − ३ क र + ५ ल^{२})

= ५ अ य^{२} + ९ क र − ८ अ य^{२} + ३ क र − ५ ल^{२}

= − ३ अ य^{२} + १२ क र − ५ ल^{२} = − ३ × ३ × १ + १२ × ५ × २ − ५ × १६ = −९ + १२० − ८० = १२० − ८९ = ३१

उदा० (२)—६ य^{४} + ४ य^{३} र − २ य^{२} र^{२} + ५ य र^{३} − ७ र^{४} में से − २ य^{४} + ५ य^{३} र − ७ य^{२} र^{२} + य र^{३} + ८ र^{४} को घटाइए।

विशोधक − विशोध्य =

६ य^{४} + ४ य^{३}·र − २ य^{२} र^{२} + ५ य० र^{३} − ७ र^{४} − (− २ य^{४} + ५ य^{३} र − ७ य^{२} र^{२} + य र^{३} + ८ र^{४})

= ६ य^{४} + ४ य^{३} र − २ य^{२} र^{२} + ५ य र^{३} − ७ र^{४} + २ य^{४} − ५ य^{३} र + ७ य^{२} र^{२} − य० र^{३} − ८ र^{४}

= ८ य^{४} − य^{३} र + ५ य^{२} र^{२} + ४ य र^{३} − १५ र^{४}=उत्तर

उदा० (३) ७ (य + र)^{२} − ५ (य + र) ल − १३ ल^{२} में से ६ (य + र)^{२} − ८ (य + र) ल + १२ ल^{२} को घटाइए :—

वियोजक में वियोज्य को घटाने पर

७ (य + र)^{२} − ५ (य + र) ल − १३ ल^{२} −
{ ६ (य + र)^{२} − ८ (य + र) ल + १२ ल^{२} }

= ७ (य + र)^{२} − ५ (य + र) ल − १३ ल^{२} − ६ (य + र)^{२} + ८ (य + र) ल − १२ ल^{२}

= (य + र)^{२} + ३ (य + र) ल − २५ ल^{२} = उत्तर

उदा० (४) २ र − [३ र + { ४ ल − (२ र − ल) + ५ र } − ७ ल] को सरल कीजिए।

यहाँ वियोजक २ र में से वियोज्य को घटाने पर

= २ र − ३ र − { ४ ल − (२ र − ल) + ५ र } + ७ ल

= २ र − ३ र − ४ ल + (२ र − ल) − ५ र + ७ ल

= − ४ र + २ ल० = उत्तर

उदा० (५) सरल कीजिए :—

− ३ अ + (− क + २ अ) − ८ अ − ३ क + ग − (− ९ अ + क)

= − ३ अ − क + २ अ − ८ − अ − ३ क + ग + ९ अ − क

= क − ग = उत्तर

विशेष ध्येय :—सरलीकरण में कोष्ठगत धनात्मक राशि का धनर्ण चिह्न अपरिवर्त्तित रहता है और वही कोष्ठगत राशि यदि ऋणात्मक रहें अर्थात् कोष्ठ से पहले ऋण का चिह्न रहे तो कोष्ठगत समस्त राशि के सभी धन चिह्न ऋण, और ऋण चिह्न धन हो जायेंगे ।

उदा० (६) २ क − [क − { क − (ग + क − ग) }]

२ क − क + { क − (ग + क − ग) }

= २ क − क + क − ग − क − ग = २क − क + क − ग − क + ग

= ३ क − २ क = क = उत्तर ।

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) (अ + क) + (क − अ) इसे सरल कीजिए, उत्तर = २ क

(२) (य + २ र) − (य − ५ र) ,, ,, उत्तर ७ र

(३) ७ य^{२} + { २ य^{२} − (५ य र − र^{२}) } में से
{ ६ य^{२} − (२ य र + ९ र^{२}) } को घटाइए,
उत्तर = ३ य^{२} − ३ य र + १० र^{3}

(४) ४ अ^{२} + ५ अ क − [३ अ^{२} + { २ अ क − (६ अ^{२} − ५ क^{२}) }]
= ७ अ^{२} + ३ अ क − ५ क^{२} = उत्तर

(५) अ − क − (− न) + ५ का मान बताइए जब कि
अ = ३, क = २, न = ४ । उत्तर = १०

(६) ८ अ + ९ न − (२ क − २ प + ५) का मान क्या है ? जब कि अ=२,
क = ३, न = ८, प = ३ ।
उत्तर = ८३ ।

(७) य^{२} + ३ य र + र^{२} में से य^{२} − ५ य र + २ र^{२} को घटाइए :—
उत्तर = ८ य र − र^{२}

(८) $अ^२ + ४ अक - ५ अग + २ क^२ - ३ कग$ में से
$३ अक - ५ ग^२ + २ क^२ + ७ अग - ९ अ^२$ को घटाइए :—

उत्तर $= १० अ^२ + अक - १२ अग - ३ कग + ५ ग^२$ ।

सरल कीजिए :—

$७ अ^२ + \{२ अ^२ - (५ अक - क^२)\} - \{६ अ^२ - (२अक + ९क^२)\}$

उत्तर $= ३ अ^२ - ३ अक + १० क^२$

(९) $४ य^२ + ५ यर - [३ य^२ + \{ २ यर - (६ य^२ - ५ र^२) \}]$

उत्तर $= ७ य^२ + ३ यर - ५ र^२$

गुणने करणसूत्रं वृत्तार्धम्—

स्वयो रस्वयोः स्वं वधः स्वर्णघाते क्षयो भागहारेऽपि चैवं निरुक्तम् ।

सुधा —गुण्य, गुणक दोनों धनात्मक रहे या दोनों ऋणात्मक रहे तो गुणनफल धनात्मक होता है । दोनों में से एक धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक हो तो गुणनफल ऋणात्मक होता है । यही नियम भागहार में भी समझना । अर्थात् भाज्य, भाजक दोनों धनात्मक या दोनों ऋणात्मक हों तो भागफल धनात्मक होगा । दोनों में से एक धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक हो तो भागफल ऋणात्मक होगा ।

तात्पर्य यह है कि दो सजातीयों का गुणनफल या दो सजातीयों का भागफल धन और दो विजातीयों का गुणन या भागफल ऋण होता है ।

वासना—गुणकाङ्कसंख्यातुल्यस्थानेषु स्थितानां गुण्याङ्कानां, गुण्याङ्कसंख्यासमस्थानेषु स्थितानां गुणकाङ्कानां वा योगो गुणनफलमिति धनात्मकगुण्यगुणकयोः, धनर्णात्मकगुण्यगुणकयोश्च गुणनफलं क्रमशो धनर्णमिति गुणकाङ्कसमस्थानस्थितानां धनगुण्याङ्कानां योगो धनम्, एवं च धनगुण्याङ्कसमस्थानस्थितानामृणगुणकानां योगश्च ऋणमितिधनर्णसंकलननियमतः स्फुटत्वात् धनयोर्घाते धनं धनर्णयोर्घाते च ऋणमिति सूत्रोक्तं सूपपन्नम् । क्षयात्मकयोर्गुण्यगुणकयोर्घाते गुणनफलं कथं धनमिति विचारे $य - य = ०$ पक्षौ क्षयरूपपञ्चकैर्गुणितौ तदा $य \times (-५) - य \times (-५) = ०$ । अत्र प्रथमपक्षे प्रथमखण्डस्य ऋणात्मकत्वमनुपदमेवेति सिद्धेः प्रथमखण्डमृणात्मकम् । अतो द्वितीयखण्डं निश्चितमेव धनात्मकमन्यथात्वकल्पने ऋणद्वययोगस्य शून्यसमत्वाभावात्, समयोर्धनर्णयोर्योगस्यैव "धनर्णयोरन्तरमेव योग इति सूत्रोक्त्या, शून्यसमत्वाच्च । एतेन क्षययोर्घाते गुणनफलं धनमिति सर्वमुपपन्नं गुणनसूत्रम् ।

गुणनसूत्रतः

$\because$ ५ य × ३ य = १५ य^{२} $\therefore$ $\frac{\text{१५ य}^{२}}{\text{३ य}}$ = ५ य;

एवम् + ५ य × − ३ य = − १५ य^{२} $\therefore$ $\frac{-\text{१५ य}^{२}}{-\text{३ य}}$ = ५ य,

अपि च − ५ य × ३ य = − १५ य^{२} $\therefore$ $\frac{-\text{१५ य}^{२}}{\text{३ य}}$ = − ५ य,

किम्वा − ५ य × − ३ य = १५ य^{२} $\therefore$ $\frac{\text{१५ य}^{२}}{-\text{३ य}}$ = − ५ य

एतेन भाग हारेऽपि चैवं निरुक्तमिति सर्वमुपपन्नम् ।

उदाहरणम्

धनं धनेनर्णमृणेन निघ्नं
द्वयं त्रयेण स्वमृणेन किं स्यात् ॥ २ ॥

न्यास — रु २ रु ३ धनं धनघ्नं धनं स्यादिति जातम् — रु ६ ।
,, रु २˙ रु ३˙ ऋणमृणघ्नं धनं ,, रु ६ ।
,, रु २ रु ३˙ धनमृणगुणगुणं ,, रु ६˙ ।
,, रु २˙ रु ३ ऋणं धनगुणमृणं ,, रु ६˙ ।

इति धनर्णगुणनम्

सुधा—दो धन को तीन धन से, दो ऋण को तीन ऋण से, दो धन को तीन ऋण से और दो ऋण को तीन धन से गुणने पर क्या होगा ?

रु २ × रु ३ = २ × ३ = ६
रु २˙ × रु ३˙ = − २ × − ३ = ६
रु २ × रु ३˙ = २ × − ३ = − ६
रु २˙ × रु ३ = − २ × ३ = − ६

भागहारेऽपि चैवं भिरुक्तमिति,

उदाहरणम्—

रूपाष्टकं रूपचतुष्टयेन
धनं धनेनर्णमृणेन भक्तम् ।
ऋणं धनेन स्वमृणेन किं स्याद्
द्रुतं वदेदं यदि बोबुधीषि ॥ ३ ॥

न्यास— रु ८ रु ४ धनं धनहृतं धनं स्यादिति जातम् — रु २
,, रु ८˙ रु ४˙ ऋणमृणहृतं ,, ,, रु २
,, रु ८˙ रु ४ ऋणं धनहृतमृणं ,, ,, रु २˙
,, रु ८ रु ४˙ धनमृणहृतमृणं ,, ,, रु २˙

इति धनर्णभागहाराः ॥

सुधा—भागहार में भी ऐसा ही कहा गया है। अर्थात् जिस तरह गुणन में गुण्य एवं गुणक के धनात्मक या ऋणात्मक रहने पर गुणनफल धनात्मक और दोनों में से किसी एक को धनात्मक, दूसरे को ऋणात्मक रहने पर गुणनफल ऋणात्मक कहा गया है उसी तरह भाज्य, भाजक, दोनों के धनात्मक या दोनों के ऋणात्मक रहने पर भागफल धनात्मक और उन दोनों में से किसी एक के धनात्मक और दूसरे के ऋणात्मक होने की स्थिति में भागफल ऋणात्मक समझना चाहिए।

उदाहरण—धनात्मक आठ में धनात्मक चार से, ऋणात्मक आठ में ऋणात्मक चार से, ऋणात्मक आठ में धनात्मक चार से, और धनात्मक आठ में ऋणात्मक चार से भाग देने पर क्या भागफल होगा, यदि आप अच्छे जानकार हों तो बतलाइए :—

$$\text{रु } ८ \div \text{रु } ४ = \frac{८}{४} = २$$

$$\text{रु } \dot{८} \div \text{रु } \dot{४} = \frac{-८}{-४} = २,$$

$$\text{रु } \dot{८} \div \text{रु } ४ = \frac{-८}{४} = -२,$$

$$\text{रु } ८ \div \text{रु } \dot{४} = \frac{८}{-४} = -२,$$

वर्गे मूले च कारणसूत्रं वृत्तार्धम्—

कृतिः स्वर्णयोः स्वं स्वमूले धनर्णे
न मूलं क्षयस्यास्ति तस्याकृतित्वात् ॥ २ ॥

सुधा—धनात्मक या ऋणात्मक राशि का वर्ग धन होता है। धनात्मक का वर्गमूल धन ऋण दोनों होते हैं। ऋणात्मक राशि का वर्गमूल नहीं हो सकता क्योंकि वह वर्गात्मक है ही नहीं ॥ २ ॥

वासना—समद्विघातः कृतिर्भवतीति स्फुटं पाटीगणितविदाम्। तुल्ययोर्धनयोः ऋणयोर्वा घाते "स्वयो रस्वयोः स्वं वधः" इत्युक्त्या गुणनफलं सर्वदैव धन मतः स्वर्णयोः कृतौ = तुल्ययोर्धनयोः, तुल्ययोः ऋणयोर्वा घाते फलं धनमेवेति; कृतिः स्वर्णयोः स्वमित्यन्तमुपपन्नम्।

ऋणात्मकोऽङ्कोऽवर्गात्मको यतस्तुल्याङ्कयोर्घातेनैव वर्गाङ्कनिष्पत्तिः। क्षयात्मकानामङ्कानां च धनर्णघातेनैवोत्पत्तेः क्षयात्मकानामङ्कानां नैव वर्गमूलम्।

वर्गोदाहरणम्--

धनस्य रूपत्रितयस्य वर्गं
क्षयस्य च ब्रूहि सखे ममाशु ।

न्यासः रु ३ । रु ३̇ जातौ वर्गौ रु ९। रु ९

सुधा—धन तथा ऋण तीन का वर्ग मुझे शीघ्र बताओ।

$$\left.\begin{array}{l}(३)^२ = ३ \times ३ = ९ \\ (-३)^२ = -३ \times -३ = ९\end{array}\right\}$$

मूलोदाहरणम्—

धनात्मकानामधनात्मकानां
मूल नवानां च पृथग् वदाशु ॥ ४ ॥

न्यासः—रु ९ मूलं रु ३ वा रु ३̇

,, क ९̇ एषामवर्गत्वात् मूलं नास्ति ।

इति वर्गमूले

इति धनर्णषड्विधम् ।

सुधा--धनात्मक तथा ऋणात्मक ९ (नव) का मूल अलग अलग बताओ ।

उदाहरण--$\sqrt{९} = ३$ या -३

-९ का वर्गमूल नहीं हो सकता क्योंकि यह ∠अ वर्गात्मक राशि है ।

ख संकलन-व्यवकलने करणसूत्रं वृत्तार्धम्—

खयोगे वियोगे धनर्णं तथैव
च्युतः शून्यतस्तद् विपर्यासमेति ।

सुधा--किसी भी व्यक्त या अव्यक्त राशि में शून्य के योग या वियोग करने से धनर्णं यथावत् रहता, उसमें कोई विकार नहीं होता है । यदि शून्य में ही किसी को घटाया जाय तो धनर्णं चिह्न का व्यत्यास हो जाता अर्थात् धनात्मक विशोध्य ऋणात्मक, और ऋणात्मक विशोध्य धनात्मक हो जाते हैं ।

वासना—केवलं शून्यस्य मानं न किमपि भवति । अतः शून्ये कस्मिंश्चिद्राशौ योजिते, राशितः शून्ये वियोजिते वा न किमपि तत्र वैकृत्यम् । शून्यतश्च्युते कस्मिंश्चिद्राशौ "संशोध्यमानं स्वसृणत्वमेति स्वत्वं क्षय" इत्युक्तचा राशिस्थधनर्णचिह्नस्य वैपरीत्यं युक्ति-युक्तिमेवेति सूपपन्नं "खयोगे वियोगे धनर्णं तथैव च्युतः शून्यतस्तद् विपर्यासमेति ।"

उदाहरणम्—

रूपत्रयं स्वं क्षयगं च खं च
किं स्यात् खयुक्तं वद खाच्युतं च ।

न्यास—रु ३ रु ३̇ एतानि खयुक्तान्यविकृतान्येव ।
रु ३ रु ३̇ एतानि खाच्युतानि रु ३̇ रु ३ ।
इति खसंकलनव्यवकलने ।

ऊदाहरण-

तीन धन, तीन ऋण तथा शून्य में शून्य जोड़ने से क्या होगा ? इन्हें शून्य में घटाने से क्या परिणाम होगा ?

$३+०=३$ । $-३+०=-३$ । $०+०=०$ ।
या. $३-०=३$ । $-३-०=-३$ । $०-०=०$ ।
$०-(+३)=-३$ । $०-(-३)=३$ । $०-०=०$

खगुणादिषु करणसूत्रं वृत्तार्धम्—

वधादौ वियत् खस्य खं खेन घाते ।
खहारो भवेत् खेन भक्तश्च राशिः ।। ३ ।।

सुधा—शून्य के वधादि (गुणन, भजन, वर्ग, वर्गमूल, आदि) शून्य होता है। अर्थात् शून्य को किसी राशि से गुणने या भाग देने, शून्य के वर्ग करने या शून्य के वर्गमूल लेने पर शून्य होता है । शून्य से किसी में भाग देने पर वह राशि खहर कहलाती और यह खहर राशि अनन्त समझी जाती है ।। ३ ।।

वासना—रूपाल्पेन गुणकेन गुणिते गुण्ये गुण्यादल्पं गुणनफलं भवेदिति स्फुटं पाटीगणितविदाम् । अतो यथा यथा रूपादल्पो गुणकस्तथा तथा गुणनफल-मल्पमेवं गुणकस्य परमाल्पत्वे शून्यसमे गुणनफलमपि परमाल्पं शून्यसममिति युक्तिसम्मतम् । एतेन शून्यगुणितो राशिः शून्य समः सिद्धः केनचिद्राशिना भक्तं शून्यमपि शून्यमेव, यतो हि राशिः $\times ० = ०$ अतः $० \div$ राशिः $= ०$ शून्य-द्वितयत्रितयादीनां गुणनमेव शून्यवर्गादि । तत्रापि शून्यं शून्यगुणितं राशेरधुनैव शून्यसमत्वसिद्धेः । एतेन शून्यस्य वर्गादि शून्यसमं सिद्धम् ।

खहरश्च राशिरनन्तसमः । कस्मिंश्चित् स्थिरभाज्ये उत्तरोत्तरमल्पहारेण भक्ते लब्धिरुत्तरोत्तरमधिका । एवमत्र परमाल्पेन शून्यसमेन हारेण विभाजिते लब्धिरनन्तसमा । अतश्च $\frac{य}{०}$ खहरो राशिरयमनन्तः । अत्र च किमपि योजिते वियोजिते वा समच्छेदविधिना योज्यवियोज्यराशेः शून्यत्वात् शून्य-

युक्तो हीनशून्यो वा राशि रविकृतः। एतेनैवमुक्तमस्मिन् विकारः खहरे-नराशावित्यादि। न च $\frac{य}{०}$ मिते खहरराशौ भिनाङ्कयोगे अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशावित्यादिना य मितेंऽशे विकारदर्शनाद् विकृतोऽसौ खहरो राशिरिति वाच्यम्; विकृतेऽपि 'य' मितेंऽशे खहरत्वात्सर्वत्रानन्तत्वस्याविकृतत्वात्। यथा $\frac{य}{०}+\frac{१}{२}=\frac{२य}{०}$, किन्तु $\frac{य}{०}$, $\frac{२य}{०}$ इत्युभयत्रापि अनन्तलब्धे रविकृतत्वमिति सर्वमुपपन्नम्।

उदाहरणम्—

द्विघ्नं त्रिहृत् खं खहृतं त्रयं च।
शून्यस्य वर्गं वद मे पदं च॥ ५॥

न्यास—गुण्यः रु०, गुणकः रु २ गुणिते जातम् रु०।
,, भाज्यः रु० भाजकः रु० ३ भक्ते ,, रु०।
,, ,, रु ३ भाजकः रु० ,, ,, रु$\frac{३}{०}$।
अयमनन्तो राशिः खहर इत्युच्यते।

अस्मिन् विकारः खहरे न राशा-
वपि प्रविष्टेष्वपि निःसृतेषु।
बहुष्वपि स्याल्लयसृष्टिकालेऽनन्तेऽ-
च्युते भूतगणेषु यद्वत्॥ ४॥

इति खण्डविधम्

सुधा—शून्य को दो से गुणने या तीन से भाग देने पर गुणन भजन फल क्या होंगे ? शून्य का वर्ग तथा वर्गमूल बतलाइए॥ ५॥

जैसे– गुण्य = ० गुणक = २ तो गुणनफल = ० × २ = ०।
भाज्य = ० भाजज = ३ तो लब्धि = ० ÷ ३ = ०।
भाज्य = ३ भाजक = ० तो लब्धि ३ ÷ ० = $\frac{३}{०}$।
यह खहर राशि अनन्त कही जाती है।

प्रलय एवं सृष्टि के समय अनन्त अच्युत (विष्णु) में समस्त प्राणियों के लीन एवं निर्गत होने पर जैसे उनमें कोई बिकार नहीं होता वैसे ही इस खहर राशि में किन्हीं भी राशियों के जोड़ने या घटाने से कोई विकार (परिवर्तन) नहीं होता है॥ ४॥

अथाऽव्यक्तकल्पना

यावत्तावत्कालको नीलकोऽन्यो
वर्णः पीतो लोहितश्चैतदाद्याः ।
अव्यक्तानां कल्पिता मानसंज्ञा-
स्तत्संख्यानं कर्त्तुमाचार्यवर्यैः ॥ ५ ॥

सुधा—प्राचीनाचार्यों ने अव्यक्त राशियों की संज्ञाएँ उनके मान ज्ञान के के लिए यावत् कालक, नीलक, पीतक, लोहितक, आदि रक्खी है ॥ ५ ॥

विमर्श—नामैक देश से नाम ग्रहण होता है इसी सिद्धान्त पर इस ग्रंथ में उपर्युक्त यावत् कालक आदि के लिए या, का, नी, लो, पी, आदि वर्ण व्यवहृत किये गए हैं । आधुनिक बीजगणित में इनके लिए य, र, अ, क, ग, आदि व्यवहृत होते हैं ।

अव्यक्तसंकलनव्यवकलने करणसूत्रं वृत्तार्धम्—

योगोऽन्तरं तेषु समानजात्यो-
र्विभिन्नजात्योश्च पृथक् स्थितिश्च ।

सुधा—उन कल्पित यावत् काल के आदि सजातीय वर्णों का योग या अनन्तर होते हैं । विजातीय वर्णों की अलग स्थिति मात्र रहती है ।

उदाहरणम्—

स्वमव्यक्तमेकं सखे ! सैकरूपं
धनाव्यक्तयुग्मं विरूपाष्टकं च ।
युतौ पक्षयोरेतयोः किं धनर्णे
विपर्यस्य चैक्ये भवेत् किं वदाशु ॥ ६ ॥

न्यास—या १ रु १ । या २ रु ८˙ । अवयोर्योगे जातम्—या ३ रु ७˙

आद्यपक्षस्य धनर्णव्यत्यासे :—

न्यास—या १˙ रु १˙ । या २ रु ८˙ योगेऽनयोर्जातम् या १ रु ९˙ ।

द्वितीयस्य व्यत्यासे :—

न्यास—या १ रु १ । या २˙ रु ८ योगे जातम् या १˙ रु ९ ।

उभयोर्व्यत्यासे :—

न्यास—या १˙ रु १˙ । या २˙ रु ८ योगे जातम् या ३˙ रु ७

विजातीययोर्द्वयोर्घातो भावितपदवाच्यः। अव्यक्तानामपि भागादिकं (भाग-वर्ग-वर्गमूल-घन-घनमूलादिकं) व्यक्तगणितवद् ज्ञेयम्, उभयत्रापि परिभाषासाम्यात्।

गुण्यः पृथग्गुणकखण्डसम इत्यादिकं तु "गुण्यस्त्वधोऽधो गुणखण्डतुल्यस्तैः खण्डकैः संगुणितो युतो वे" ति पाटीगणितोक्तस्यैव पुनः प्रतिपादनम्। तथाहि यदि गुण्यः=अ+क+ग, गुणकश्च य+र तदा गुणनफलम्=गुण्य×गुणक=(अ+क+ग)(य+र)=(अ+क+ग) य+(अ+क+ग) र एतेनैव गुण्यः पृथग्गुणकखण्डसम इत्यादि स्फुटमुपपद्यते। अतः स्याद्रूपवर्णाभिहतौ तु वर्ण इत्यादिकं सर्वं सूपपन्नम्।

उदाहरणम्—

यावत्तावत्पञ्चकं व्येकरूपं
यावत्तावद्भिस्त्रिभिः सद्विरूपैः।
संगुण्य द्राग् ब्रूहि गुण्यं गुणं वा
व्यस्तं स्वर्णं कल्पयित्वा तु विद्वन् ॥ ८ ॥

न्यासः—गुण्यः या ५ रु १̇। गुणकः या ३ रु २ गुणनाज्जातं फलम् याव १५ या ७ रु २̇।

गुणस्य धनर्णव्यत्यासे—

न्यासः—गुण्यः या ५̇ रु १ गुणक. या ३ रु २ गुणनाज्जातम् याव १५̇ या ७̇ रु २।

गुणकस्य धनर्णव्यत्यासे—

न्यासः—गुण्यः या ५ रु १̇। गुणकः या ३̇ रु २̇ गुणनाज्जातम् याव १५̇ या ७̇ रु २।

द्वयोर्धनर्णव्यत्यासे—

न्यासः—गुण्यः या ५̇ रु १, गुणकः या ३̇ रु २̇ गुणनाज्जातम् याव १५ या ७ रु २̇।

सुधा—एकोन यावत् पाँच को सद्विरूप यावत् तीन से गुणने, एवं गुण्य, गुणक, के धन, ऋण चिह्न का व्यत्यास कल्पना कर भी गुणने से गुणनफल क्या होगा यह बतलावें ॥ ८ ॥

उदाहरण—

(१) यदि गुण्य = ५ य − १ गुणक = ३ य + २ तो गुणनफल = (५ य − १) × (३ य + २) = (५ य − १) × ३ य + (५ य − १) × २ = १५ य^2 − ३ य + १० य − २ = १५ य^2 + ७ य − २ ।

(२) यदि गुण्य = − ५ य + १, गुणक = ३ य + २ तो गुणनफल = (− ५ य + १) (३ य + २) = − १५ य^2 + ३ य − १० य + २ = − १५ य^2 − ७ य + २ ।

(३) यदि गुण्य = ५ य − १, गुणक = − ३य − २ तो गुणनफल = (५य − १) × (− ३ य − २) = (५ य − १) × − ३ य − (५ य − १) × २ = − १५ य^2 + ३ य − १० य + २ = − १५ य^2 − ७ य + २ ।

(४) यदि गुण्य = − ५ य + १, गुणक = − ३ य − २ तो गुणनफल = (− ५ य + १) × (− ३ य − २) = (− ५ य + १) × − ३य − (− ५ य + १) × २ = १५ य^2 − ३ य + १० य − २ = १५ य^2 + ७ य − २ = गुणनफल ।

विमर्श—भास्कराचार्य ने अव्यक्तों के गुणन, भजन, वर्ग वर्गमूल आदि निकालने की जो रीति अपने बीजगणित में दी है वही रीति आधुनिक बीजगणित में भी प्रचलित है । आधुनिक बीजगणितकारों ने अपनी-अपनी पुस्तकों में उन नियमों पर आधारित अनेक विध उदाहरण देकर उन नियमों को बहुत प्राञ्जल बना दिया है । मैं भी अभ्यास के लिए कतिपय उदाहरणों के साथ कुछ सोत्तर प्रश्न यहाँ दे रहा हूँ ।

उदाहरण—१. मान लिया कि गुण्य = अ + २क + ३ग
　　　　　　　　　　गुणक = अ − २क + ५ग

नियमानुसार गुणनफल =

　　अ^2 + २ अ क + ३ अ ग
　　　　− २ अ क − ४ क^2 − ६ क ग
　　　　　　　　५ अ ग + १० क ग + १५ ग^2

योग = अ^2 − ४ क^2 + ८ अग + ४कग + १५ ग^2 = गुणनफल ।

उपनियम—यदि किन्हीं दो ऐसे व्यञ्जकों का गुणन करना हो जिनमें एक के पदों के विभिन्न घात हों तो उन्हें घाताङ्क को बढ़ाते या घटाते हुए लिख कर गुणा करना चाहिए । जैसे :—

सुधा—हे मित्र ! रूप एक युक्त धनात्मक एक अव्यक्त, तथा रूप आठ से रहित धनात्मक दो अव्यक्त, इन दोनों पक्षों का योग क्या होगा ? दोनों पक्षों के धनर्ण चिह्न में व्यत्यास करके योगफल क्या होगा, यह मुझे शीघ्र बतलावें ॥ ६ ॥

उदा०—(य + १) + (२य − ८) = ३य − ७
(− य − १) + (२य − ८) = य − ९
(य + १) + (− २य + ८) = − य + ९
(− य − १) + (− २य + ८) = − ३य + ७

अन्यदुदाहरणम्—

धनाव्यक्तवर्गत्रयं सत्रिरूपं
क्षयाव्यक्तयुग्मेन युक्तं च किं स्यात् ।

न्यासः—याव ३ रु ३ । या २̇ योगे जातम् याव ३ या २̇ रु ३ ।

सुधा—रूप तीन से युक्त धनात्मक तीन अव्यक्तवर्ग में ऋणात्मक दो अव्यक्त को जोड़ने से क्या होगा ?

उदा०—(३य^{२} + ३) + (− २ य) = ३य^{२} − २य + ३ ।

अन्यदुदाहरणम्—

धनाव्यक्तयुग्माद्दृणाव्यक्तषट्कं
सरूपाष्टकं प्रोज्झ्य शेषं वदाशु ॥ ७ ॥

न्यासः—या २ । या ६̇ रु ८ शोधिते जातं या ८ रु ८̇ ।

इत्यव्यक्तसंकलनव्यवकलने ॥

सुधा—धनात्मक दो अव्यक्त से आठ रूप सहित ऋणात्मक छे अव्यक्त को घटाने पर क्या शेष होगा, यह शीघ्र बतलाओ ॥ ७ ॥

२य − (− ६य + ८) = २य + ६य − ८ = ८ य − ८

विमर्श—अव्यक्त संकलन एवं अव्यक्त व्यवकलन में यहाँ इतना ही बतलाया गया है कि सजातीयों का योग या वियोग पूर्व नियमानुसार करना चाहिए । विभिन्न जातीयों का योग या वियोग चिह्नमात्र के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है । ग्रंथकार ने भी इसके कई एक उदाहरण प्रस्तुत किये हैं । अव्यक्त राशियों के संकलन एवं व्यवकलन के बहुत से उदाहरण "योगे युतिः स्यात् क्षययोः स्वयोर्वा" तथा "संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति" के विमर्श में दिए जा चुके हैं; विस्तारभय से पुनः नहीं दे रहा हूं ।

अव्यक्तादि गुणने करण सूत्रं सार्ध-वृत्तद्वयम्—

स्याद्रूपवर्णाभिहतौ तु वर्णो
द्वित्र्यादिकानां समजातिकानाम् ॥ ६ ॥
वधे तु तद्वर्गघनादयः स्यु-
स्तद्भावितं चासमजातिघाते।
भागादिकं पूर्ववदेव शेषं
व्यक्ते यदुक्तं गणिते तदत्र ॥ ७ ॥
गुण्यः पृथग्गुणकखण्डसमो निवेश्य-
स्तैः खण्डकैः क्रमहृतः सहितो यथोक्त्या।
अव्यक्तवर्गकरणीगुणनासु चिन्त्यो
व्यक्तोक्तखण्डगुणनाविधिरेवमत्र ॥ ८ ॥

सुधा—रूप (व्यक्ताङ्क) तथा वर्ण (अव्यक्त) के गुणन में वर्ण हो जाता है। सजातीय दो, तीन या चार वर्णों के घात से क्रमशः वर्ग घन, चतुर्घात आदि होते हैं। विजातीय वर्णो के घात से भावित होता है, जैसे या × का = या. का. भा लिखा जाता है।

भाग आदि (भाग वर्गमूल घन, घनमूल) का नियम व्यक्त गणित (लीलावती) में जैसा कहा गया है वैसा ही यहाँ (अव्यक्तगणित में) भी समझना चाहिए।

गुणक के जितने खण्ड हों, उतनी जगह गुण्य को रखकर प्रत्येक गुणक खण्ड से अलग-अलग उसे गुणा कर यथोक्त रीति से योग करें तो गुणन फल होता है।

व्यक्त गणित (लीलावती) में जो खण्डगुणनविधि (गुण्यस्त्वधोऽधो गुणखण्डतुल्य इत्यादि) उक्त है वही विधि यहाँ (बीजगणित में) भी अव्यक्त वर्ग, करणी, गुणन में समझना ॥ ६–८ ॥

वासना—रूपं नाम व्याक्ताङ्कबोधकम्। वर्णपदमत्राऽव्यक्ताङ्कद्योतकम्। रूपवर्णयोर्घाते रूपमितानां वर्णानां सङ्कलनमेव तयोर्गुणनफलम्। तच्च व्यक्ताङ्कगुणिताऽव्यक्ताङ्कमानसममिति समुपपन्नंरूपवर्णाभिहतौ वर्ण इति।

द्वित्र्यादिकानां वधे द्वित्रिस्थानंस्थितानां व्यक्ताङ्कानामव्यक्ताङ्कानां वा वधे तद्वर्गघनादयश्च "समद्विघातः कृतिः, समत्रिघातश्च घन" इति पाटीगणितोक्तपद्धत्यैव पारिभाषिताः।

उदा० २—गुण्य $= य^{३} + य^{२} र + य र^{२} + र^{३}$

गुणक $य^{२} - य र + र^{२}$

गुणनफल $= य^{५} + य^{४} र + य^{३} र^{२} + य^{२} र^{३}$

$- य^{४} र - य^{३} र^{२} - य^{२} र^{३} - य र^{४}$

$+ य^{३} र^{२} + य^{२} र^{३} + य र^{४} + र^{५}$

योग $= य^{५} \quad + य^{३} र^{२} \quad + य^{२} र^{३} \quad + र^{२}$

$=$ गुणनफल ।

उपनियम २—घाताङ्क वाले व्यञ्जकों का गुणनफल घाताङ्कों के योग करने से ही होता है । जैसे $अ^{२} \times अ^{३} = अ^{२+३} = अ^{५}$ ।

उपनियम ३—यदि घातों का घात करना हो तो घाताङ्कों के घात करने से ही वह हो जाता है । जैसे (१) $(अ^{२})^{३} = अ^{२} \times अ^{२} \times अ^{२} = अ^{६} = अ^{२\times३}$

(२) $(- अ^{२} ब स)^{४} = + अ^{४\times२} . ब^{१\times४} \; स^{१\times४} = अ^{८} . ब^{४} . स^{४}$

उपनियम ४—धनात्मक का कोई भी घात धनात्मक ही होगा । किन्तु ऋणात्मक का समघात (वर्ग, चतुर्घात, षड्घात आदि) धनात्मक और विषमघात (घन, पञ्चघात, सप्तघात आदि) ऋणात्मक होगा ।

जैसे $+अ$ का कोई घात = वर्ग, घन, चतुर्घात, आदि सभी धनात्मक ही होगा किन्तु $-अ$ का वर्ग, चतुर्घात, षड्घात आदि $+अ^{२}$, $+अ^{४}$, $+अ^{६}$ धनात्मक और घन, पञ्चघात, सप्तघात, आदि $-अ^{३}$, $-अ^{५}$, $-अ^{७}$ सभी ऋणात्मक होंगे ।

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

गुणा कीजिए :—

(१) $२ अ + ३ ब$ को $३ स + ५ द$ से

उत्तर $= ६ अ स + ९ ब स + १० अ द + १५ ब द$

(२) $अ^{२} + अ ब + ब^{२}$ को $अ^{२} - अ ब + ब^{२}$ से

उत्तर $= अ^{४} + अ^{२} ब^{२} + ब^{४}$

(३) $अ^{२} - अ ब + १$ को $अ^{२} - अ ब + १$ से

उत्तर $= अ^{४} - २अ^{३} ब + अ^{२} ब^{२} + २अ^{२} - २ अ ब + १$

(४) $अ^{3} + अ^{२} ब + ब^{3}$ को $अ - ब$ से

उत्तर $= अ^{४} + अ ब^{3} - अ^{२} ब^{२} - ब^{४}$

(५) $य^{४} + य^{3} र + य^{२} र^{२} + य र^{3} + र^{४}$ को $य - र$ से

उत्तर $= य^{५} - र^{५}$

(६) $य^{२} + य र + र^{२}$ को $य^{४} + र^{२}$ से

उत्तर $= य^{६} + य^{५} र + य^{४} र^{२} + य^{२} र^{२} + य र^{3} + र^{४}$

(७) $अ ब + ब स + अ स$ को $अ ब - ब स + स अ$ से

उत्तर $= अ^{२} ब^{२} + २ अ^{२} ब स - ब^{२} स^{२} + अ^{२} स^{२}$

(८) $अ + ब + स$ को $अ + ब - स$ से

उत्तर $= अ^{२} + २ अ ब + ब^{२} - स^{२}$

(९) $य^{४} + य^{२} र^{२} + र^{४}$ को $य^{४} - र^{२}$ से

उत्तर $= य^{८} - य^{६} \cdot र^{२} + य^{४} र^{४} - य^{२} \cdot र^{४} + य^{२} \cdot र^{६} - र^{८}$

(१०) $य^{\frac{२}{3}} + य^{\frac{१}{3}} \cdot र^{\frac{१}{3}} + र^{\frac{२}{3}}$ को $य^{\frac{१}{3}} - र^{\frac{१}{3}}$ से

उत्तर $= य - र$

(११) $-अ^{3} \cdot ब^{२}$ का चतुर्घात बतलाइए—

उत्तर $= अ^{१२} \cdot ब^{८}$

●

भागहारे करणसूत्रं वृत्तम्—

भाज्याच्छेदः शुद्धयति प्रच्युतः सन्
स्वेषु स्वेषु स्थानकेषु क्रमेण ।
यैर्यैर्वर्णैः संगुणो यैश्च रूपै-
र्भागहारे लब्धयस्ताः स्युरत्र ॥९॥

सुधा—जिन-जिन वर्णों या रूपों से गुणित भाजक अपने-अपने स्थानों में भाज्य से घटाने पर विशुद्ध हो जाय वे ही (वर्ण या रूप) भागहार में लब्धियाँ होती हैं ॥ ९ ॥

वासना : गुण्य × गुणक = गुणनफल

यद्यत्र गुण्यः = अ + क + ग, गुणकः = य + र

अतो गुणनफलम् = गुण्य × गुणक = (अ + क + ग)य + (अ + क + ग)र

भाज्यरूपेऽस्मिन् गुणनफले गुण्यरूपेण हरेण भक्ते स्वरूपभ् =

$$\frac{\text{गुणनफल}}{\text{गुण्य}} = \frac{\text{भाज्य}}{\text{हर}} = \frac{(\text{अ}+\text{क}+\text{ग})\text{य} + (\text{अ}+\text{क}+\text{ग})\text{र}}{\text{अ}+\text{क}+\text{ग}}$$

अत्र य गुणितो हरः = (अ + क + ग) य। असौ भाज्यस्थात् प्रथमपदात् शुद्धयति, अतः प्रथमलब्धिः = य। पुनश्च र गुणितो हरः = (अ + क + ग)र। अयं च भाज्यस्याद् द्वितीयपदाद् विशुद्धयतीति द्वितीया लब्धिः = र। एकमत्र लब्धि = य + र इत्येत्रं भाज्याच्छेदः शुद्धयतीति विधानानेनैव पूर्णलब्ध्युपगमश्चेति सर्वंनुपयन्नम्।

विमर्श—पाटीगणितोक्त "भाज्याद्धरः शुद्धयति यद्गुणः स्यादन्त्यात्फलं तत्खलु भागहारे" का ही शब्दान्तर द्वारा यहाँ प्रतिपादन हुआ है। ग्रन्थकार ने पहले भी "भागादिकं रूपवदेव शेषम्" कह कर दोनों की एकरूपता का व्यक्तीकरण किया है।

भागहार में हमेशा भाज्य एवं भाजक को इस रूप में लिखें कि दोनों में एकगुणरूप अक्षर के घातों के घातमापक उत्तरोत्तर घटते हुए या बढ़ते हुए रहे। भाज्य के प्रथम पद में लब्धि गुणित भाजक को स्थानक्रम से घटा कर शेष में भाज्य के अग्रिम राशि उतार कर पुनः पुनः नए भाज्यों में पूर्ववत् नूतन लब्धि गुणित भाजक को घटाते जायँ जब तक कि भाज्य निःशेष न हो जाय या भाजक से शेष छोटा हो जाय। इस प्रकार आगत लब्धियाँ ही भागफल कही जाती हैं।

पूर्वगुणनफलस्य स्वगुणच्छेदस्य प्रथमपक्षस्य भागहारार्थं—

न्यासः—भाज्यः याव १५ या ७ रु २˙। भाजकः या ३ रु २ भजनादाप्तो गुण्यः या ५ रु १

द्वितीयस्य

न्यासः—भाज्यः याव १५˙ या ७˙ रु २। भाजकः या ३ रु २। भजनेन लब्धो गुण्यः या ५˙ रु १।

तृतीयस्य

न्यासः—भाज्यः याव १५˙ या ७˙ रु २। हरः या ३˙ रु २˙। हरणादाप्तो गुण्यः या ५ रु १˙।

चतुर्थस्य

न्यासः--भाज्यः याव १५ या ७ रु २̇ । हरः या ३̇ रु २̇ हृते लब्धा गुण्यः या ५̇ रु १ ।

इत्यव्यक्तगुणनभजने ।

सुधा : (१) $\left.\begin{array}{l}\text{भाज्य} = १५\,\text{य}^{२} - ७\text{य} + २ \\ \text{भाजक} = ३\text{य} + २\end{array}\right\}$ ऊतोलब्धिः =

$$\frac{१५\text{य}^{२} - ७\text{य} + २}{३\text{य} + २} = ५\text{य} - १$$

(२) $\left.\begin{array}{l}\text{भाज्य} = - १५\text{य}^{२} - ७\text{य} + २ \\ \text{भाजक} = ३\text{य} + २\end{array}\right\}$ लब्धिः

$$= \frac{- १५\text{ग}^{२} - ७\text{य} + २}{३\text{य} + २} = -५\text{य} + १$$

(३) $\left.\begin{array}{l}\text{भाज्य} = - १५\text{य}^{२} - ७\text{य} + २ \\ \quad = ३\text{य} - २\end{array}\right\}$

$$\text{लब्धिः} = \frac{- १५\text{य} - ७\text{य} + २}{- ३\text{य} - २} = ५\,\text{य} - १$$

$$(४)\ \frac{\text{भाज्य}}{\text{भाजक}} = \frac{१५\text{य}^{२} + ७\text{य} - २}{- ३\text{य} + २} = - ५\text{य} + १ = \text{लब्धिः}$$

उदा० २—भाजक—$\text{य}^{२} + ५\,\text{य}\,\text{र} + ७\,\text{र}^{२}$

$\text{भाख्य} = \text{य}^{४} + ५५\,\text{य}\,\text{र}^{३} + १२६\,\text{र}^{४}$

यहाँ भाज्य भाजक दोनों में घाताङ्क अवरोह एवं आरोह क्रम से रक्खा गया है ।

भागफल के लिए न्यास—

$$\text{य}^{२} + ५\,\text{य}\,\text{र} + ७\,\text{र}^{२}\,)\ \text{य}^{४} + ५५\,\text{य}\,\text{र}^{३} + १२६\,\text{र}^{४}\ (\,\text{य}^{२} - ५\,\text{यर} + १८\text{र}^{२}$$

$$\begin{array}{l}\text{य}^{४} + ५\,\text{य}^{३}\,\text{र} + ७\,\text{य}^{२}\,\text{र}^{२} \\ \hline - ५\,\text{य}^{३}\,\text{र} - ७\,\text{य}^{२}\,\text{र}^{२} + ५५\,\text{य}\,\text{र}^{३} \\ - ५\,\text{य}^{३}\,\text{र} - २५\,\text{य}^{२}\,\text{र}^{२} - ३५\,\text{य}\,\text{र}^{३} \\ \hline \times\ १८\,\text{य}^{२}\,\text{र}^{२} + ९०\,\text{य}\,\text{र}^{३} + १२६\,\text{र}^{४} \\ \quad १८\,\text{य}^{२}\,\text{र}^{२} + ९०\,\text{य}\,\text{र}^{३} + १२६\,\text{र}^{४} \\ \hline \quad \times \qquad \times \qquad \times\end{array}$$

अतः लब्धि = भागफल = $य^{२} - ५ य र + १८ र^{२}$

उदा० ३—भाजक $४ य^{२} + ६ य + ९$

भाज्य = $१६ य^{४} + ३६ य^{२} + ८१$

भागफल लाने के लिए न्यास :—

$४ य^{२} + ६ य + ९$) $१६ य^{४} + ३६ य^{२} + ८१$ ($४ य^{२} - ६ य + ९$

$१६ य^{४} + २४ य^{३} + ३६ य^{२}$

× $- २४ य^{३} + ८१$

$- २४ य^{३} - ३६ य^{२} - ५४ य$

× $३६ य^{२} + ५४ य + ८१$

$३६ य^{२} + ५४ य + ८१$

× × ×

अतः लब्धि = $४ य^{२} - ६ य + ९$

उदा० ४— भाज्य = $य^{६} - ४ य^{४} - २ य^{३} + ३ य^{२} + ८ य - १२$

भाजक = $य^{२} - ४$

यहाँ भी भाज्य एवं भाजक घाताङ्क के अवरोह क्रम में लिखा हुआ है।

न्यास :—

$य^{२} - ४$) $य^{६} - ४ य^{४} - २ य^{३} + ३ य^{२} + ८ य - १२$ ($य^{४} - २ य + ३$

$य^{६} - ४ य^{४}$

× × $- २ य^{३} + ३ य^{२} + ८ य$

$- २ य^{३} + ८ य$

$३ य^{२} - १२$

$३ य^{२} - १२$

× ×

अतः भागफल = $य^{४} - २ य + ३$ ।

उदा० ५— भाज्य = १

भाजक = $१ - अ$

भागफल लाने के लिए न्यास :—

$$१ - अ)\ १\ (\ १ + अ + अ^{२} + अ^{३} + अ^{४} \cdots\cdots = लब्धि$$

$$\begin{array}{l} १ - अ \\ \hline \quad अ \\ \quad अ - अ^{२} \\ \hline \qquad अ^{२} \\ \qquad अ^{२} - अ^{३} \\ \hline \qquad\quad अ^{३} \\ \qquad\quad अ^{३} - अ^{४} \\ \hline \qquad\qquad अ^{४} \\ \qquad\qquad अ^{४} - अ^{५} \\ \hline \qquad\qquad\quad अ^{५} \cdots\cdots \end{array}$$

अभ्यास के लिए कुछ सोत्तर प्रश्न

भाग दीजिए—

(१) $३० अ^{३} क^{३} ग^{३}$ में $३ अ क$ से और $- ७ य^{४} र^{२} + १४ य^{२} र^{३} - २१ य^{३} र^{४}$ में $- ७ य^{२} र^{२}$ से।

उत्तर $= १० अ^{२} क^{२} ग^{३}$ और $य^{२} - २ र + ३ य र^{२}$।

(२) $२० य^{४} र^{४}$ में $२ य^{२} र^{३}$ से और $४२ अ^{३} य^{४}$ में $७ अ^{२} य^{२}$ से।

उत्तर $= १० य^{२} र$, और $६ य^{२} अ$।

(३) $य^{२} - २ य - ८$ में $य - ४$ से, उत्तर $= य + २$

(४) $य^{२} - ७ य + १०$ में $य - ५$ से उत्तर $= य - २$

(५) $अ^{२} - २ अ ब + ब^{२}$ में $अ - ब$ से उत्तर $= अ - ब$

(६) $अ^{२} + अ - २$ में $अ - १$ से उत्तर $= अ + २$

(७) $८ अ^{३} - ३६ अ^{२} ब + ५४ अ ब^{२} - २७ ब^{३}$ में $२ अ - ३ ब$ से

उत्तर $= ४ अ^{२} - १२ अ ब + ९ ब^{२}$

(८) $४ य^{२} + ४ य र + र^{२} + ४ य + २ र$ में $२ य + र$ से

उत्तर $= २ य + र + २$

(९) $य^{२} - र^{२}$ में $य - र$ से और $य^{३} + र^{३}$ में $य + र$ से

उत्तर $= य + र$, और $य^{२} - य र + र^{२}$

(१०) $य^४ - र^४$ में य − र से, और $य^४ - १९य^२ + ९$ में $य^२ + ५य + ३$ से
उत्तर = $य^3 + य^2 र + य र^2 + र^3$ और $य^२ - ५ य + ३$

(११) $य^२ + र^२ - ल^२ + २ य र$ में य + र − ल से
उत्तर = य + र + ल

(१२) $अ^२ (ब - स) + ब^२ (स - अ) + स^२ (अ - ब)$ में अ − ब से
उत्तर = $अ ब - अ स - ब स + स^२$

(१३) $अ^६ - ३ अ^४ क^२ + ३ अ^२ क^४ - क^६$ में $अ^3 + ३ अ^2 क +$
$३ अ क^२ + क^3$ से
उत्तर = $अ^3 - ३ अ^2 क + ३ अ क^२ - क^3$

सिद्ध कीजिए :—

(१४) $\frac{१ + २ क + क^२}{१ - २ क + क^२} = १ + ४ क + ८ क^२ + १२ क^3 + \cdots \cdots$

(१५) $\frac{१}{१ - न क + क^२} \ldots १ + न क + (न^2 - १) क^२ \ldots (न^२ - २ न)$

वर्गोदाहरणम्

रूपैः षड्भिर्वर्जितानां चतुर्णा—
मव्यक्तानां ब्रूहि वर्गं सखे मे ।

न्यासः—या ४ रु ६ जातो वर्गः याव १६ या ४८ रु ३६

सुधा—हे मित्र ! छे रूपों से विहीन चार अव्यक्त का वर्ग बतलाओ ।

$(४ य - ६)^२ = १६ य^२ - ४८ य + ३६$ ।

विमर्श—वर्ग, घन, वर्गमूल, घनमूल आदि लाने की रीति पाटीगणित में जो है वही यहाँ (अव्यक्त गणित) भी समझना, यह ग्रंथकार ने पहले ही कहा है। तदनुसार किसी समान दो राशियों का घात, वर्ग, सम तीन राशियों का घात घन, समान चार राशियों का घात चतुर्घात आदि समझना स्वाभाविक ही है। वर्ग लाने के लिए सबसे आसान तरीका यह है कि दो, तीन, चार पद वाले किसी राशि के वर्ग में पहले प्रथम पद का वर्ग, ततः पर द्विगुणित प्रथम पद से आगे के सभी पदों का घात करना चाहिए। फिर प्रथम पद को हटाकर आगे के पदों में भी यह नियम लागू करें। यह तब तक करते जाँय जबतक कि अन्तिम पद का भी वर्ग न हो जाय। इस तरह पूरी राशि का आसानी से वर्ग हो जाता है।

जैसे (अ + क + ग) का वर्ग करना अभीष्ट हो तो पहले अ का वर्ग = अ², पुनः २ अ से आगे के सभी पदों को गुणा कर लिखने से = अ² + २ अक + २ अ ग। पुनः अ + क + ग में से अ को हटा कर शेष क + ग में भी यही नियम लागू किया अर्थात् क² + २ क ग को लिखा। फिर क को छोड़कर शेष ग का वर्ग लिखा गया। इस प्रकार (अ + क + ग) का वर्ग = अ² + २अ क + २ अ ग + क² + २ क ग + ग²। समान दो का घात वर्ग होता है अतः अ² = अ × अ। समान तीन का घात घन होता है अतः अ³ = अ × अ × अ समान चार का घात चतुर्घात होता है अतः अ⁴ = अ × अ × अ × अ इस तरह आगे का भी घात समझना। इससे स्पष्ट है कि धन पद का कोई भी घात धन ही होगा। ऋण पद के घात मापक के समत्व, विषमत्व के अनुसार धन ऋण होंगे। जैसे ऋण का वर्ग; चतुर्घात, षड्घात आदि धन होंगे और घन, पञ्चघात, सप्तघात आदि ऋण होंगे।

किसी राशि के घन लाने की रीति—

घन लाने के लिए भास्कराचार्य ने अपने पाटीगणित में जो नियम दिया है वह पूर्णतः उपयुक्त है। उस नियम के अनुसार बहुयुक् पद वाली राशि को भी द्वियुक् पद के रूप में परिणत कर प्रथम पद का घन पहले स्थान में, त्रिगुणित प्रथम पदवर्ग को द्वितीय पद से गुणाकर दूसरे स्थान में, पुनः त्रिगुणित द्वितीय पद वर्ग को प्रथम पदगुणित कर तीसरे स्थान में, और द्वितीयपद के घन को अन्तिम स्थान में रक्खें तो अभीष्ट राशि का घन हो जायगा।

दो पद वाले किसी राशि का वर्ग, घन, चतुर्घात आदि लाने का सामान्य नियम :—

(अ + क)² = अ² + २ अ क + क²

(अ + क)³ = (अ + क)² × (अ + क) = अ³ + ३ अ क² + ३ अ² क + क³

(अ + क)⁴ = (अ + क)² × (अ + क)² = (अ² + २ अ क + क²)² = अ⁴ + ४ अ³ क + २ अ² क² + ४ अ क³ + ४अ क⁴

= अ⁴ + ४ अ³ क + ६ अ² क² + ४अ क³ + क⁴

(अ + क)⁵ = (अ + क)⁴ × (अ + क)

= अ⁵ + ५ अ⁴ क + १० अ³ क² + १० अ² क³ + ५ अ क⁴ + क⁵

इन उपर्युक्त घातों को देखने से स्पष्ट है कि द्वियुक् पद के वर्गादि घातों में पहले पद में द्वियुक् पद के प्रथम पद का अभीष्ट घात होता है और आगे के

पदों में द्वियुकपद के प्रथम वद का घातांक एक-एक घटता जाता और द्वितीय पद का घातांक एक-एक बढ़ता जाता है। वर्गादि घातों के द्वितीयादि पदों में, प्रथम पद के घातांक तथा उसके गुणकांक के गुणनफल में एकादि अंकों से भाग देने पर लब्धि के समान ही गुणकांक होते हैं। इस नियम के अनुसार किसी भी द्वियुक्पद का अभीष्ट घात लाया जा सकता है।

जैसे $(अ+क)$ का घन लाना है तो पूर्वोक्त नियमानुसार प्रथम स्थान में—$अ^3$। दूसरे स्थान में अ के घातांक ३ × (१ = प्रथम स्थान का गुणांक) में एक से भाग देने पर ३ = द्वितीय स्थान का गुणकांक, द्वितीय स्थान में प्रथम पद का घातांक एक घटेगा और दूसरे का घातांक एक बढ़ेगा। अतः दूसरे स्थान में = ३ $अ^{२}क$। तीसरे स्थान में भी प्रथम पद के घातांक घटाने और दूसरे पद के घातांक बढ़ाने पर = अ $क^{२}$। इसका गुणकांक $\frac{= २ \times ३}{२}$ (दूसरे स्थान के प्रथम पद के घातांक और गुणकांक[२] ३ के गुणन में दो से भाग देने पर) तीसरे स्थान में ३ अ $क^{2}$। चतुर्थ स्थान में तृतीय स्थानीय अ के घातांक १ तथा गुणकांक ३ के गुणनफल ३ में तीन से भाग देने पर अन्तिम स्थान में गुणकांक = १ तथा द्वियुक् पद के प्रथम के घातांक घटाने और दूसरे के बढ़ाने पर चतुर्थ स्थान में $क^3$। इस प्रकार $(अ+क)^3 = अ^3 + ३ अ^{२} क + ३ अ क^{2} + क^3$।

उपर्युक्त नियमानुसार

$(अ+क)^{४} = अ^{४} + ४ अ^3 क + ६ अ^{२} क^{२} + ४ अ क^3 + क^{४}$

$(अ+क)^{५} = अ^{५} + ५ अ^{४} क + १० अ^3 क^{२} + १० अ^{२} क^3 + ५ अ क^{४} + क^{५}$

अभ्यास के लिये कुछ सोत्तर प्रश्न

(१)—$५ य^{२} ल^3$ का वर्ग तथा धन क्या है?

उत्तर = $२५ य^{४} ल^{६}$, और—$१२५ य^{६} ल^{९}$

(२) $अ^{२} + २ अ + १$ का वर्ग क्या हैं?

उत्तर—$अ^{४} + ४ अ^3 + ६ अ^{२} + ४ अ + १$;

(३) $अ^{२} + २अ क - २ क^{२}$ तथा $य^{२} + ४य र - ८ र^{२}$ का वर्ग क्या है?

उत्तर—$अ^{४} + ४ अ^3 क - ८ अ क^3 + क^{४}$ और

$य^{४} + ८ य^3 र - ६४ य र^3 + ६४ र^{४}$

(४) $अ^3 - २ अ^{२} क - २ अ क^{२} + क^3$ का तथा $य^3 + २ य^{२}र + ८ य र^{२} - १६ र^3$ का वर्ग बतलाइए :—

उत्तर —$अ^{६} - ४ अ^{५} क + १० अ^3 क^3 - ४ अ क^{५} + क^{६}$

और $य^{६} + ४ य^{५} र + २० य^{४} र^{२} - २५६ य र^{५} + २५६ र^{६}$

(५) (अ − क) का चतुर्घात एवं (अ + क) का षड्घात बतलाइए :—

उत्तर—$अ^{४} - ४ अ^{३} क + ६ अ^{२} क^{२} - ४ अ क^{३} + क^{४}$ ।

और $अ^{६} + ६ अ^{५} क + १५ अ^{४} क^{२} + २० अ^{३} क^{३} + १५ अ^{२} क^{४}$

वर्गमूले करणसूत्रं वृत्तम्

कृतिभ्य आदाय पदानि तेषां
द्वयोर्द्वयोश्चाभिहतिं द्विनिघ्नीम् ।
शेषात् त्यजेद् रूपपदं गृहीत्वा
चेत् सन्ति रूपाणि तथैव शेषम् ॥१०॥

सुधा—वर्गात्मक राशि में मूल लेते समय सभी वर्गात्मक अव्यक्त राशियों या वर्गात्मक रूप के मूल को लेकर अलग-अलग रक्खें । इस प्रकार दो दो मूलों का द्विगुणित गुणनफल शेष में घटावें तो वर्गात्मक राशि का मूल हो जाता है । रूपात्मक खण्ड का मूल यदि नहीं मिले तो उस राशि को वर्गात्मक नहीं समझें ॥ १० ॥

वासना—प्रस्तुतसूत्रेण वर्गात्मकराशेर्मूलानयनमभीष्टमास्ति। वर्गस्तु समानराश्योर्घातः, ज्ञाते च समानराश्योर्घाते तन्मूलराश्योरेवानयनमत्रा पेक्ष्यते ।

यथाऽत्र कल्पितो राशिः = अ + क । तदा वर्गकरणविधिनाऽस्य वर्गः = $अ^{२} + २ अ क + क^{२}$। अत्र वर्गात्मकयोः ($अ^{२}$, $क^{२}$) अनयोर्मूले क्रमशः= अ क, द्वयोर्घाते द्विनिघ्ने शेषात्त्यक्ते निश्शेषं भवतीति अ + क मितमेव वर्गात्मकराशेर्वर्गमूलम्, वर्गकरणे "खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिः स्यादित्युक्तेः ।

द्वयोर्द्वयोरभिहतौ शेषात्त्यक्तायाँ च सत्यां निःशेषाभावे नासौ वर्गात्मको राशिरित्यवगन्तव्यम् । वर्गात्मकराशौ रूपस्य सत्त्वे तन्मूलमप्यानीय द्वयोर्द्वयोर्घात इत्यादिकं तत्रापि कार्यम् । वस्तुतो वर्गकरणविधे वैपरीत्यमेव मूलायनपद्धतिः । एतेनोपपन्नं सर्वम् ।

पूर्वसिद्धवर्गस्य मूलार्थं न्यासः—

याव १६ या ४८̇ रु ३६ लब्धं मूलम् या ४ रु ६̇ ।

इत्यव्यक्तवर्गमूले ।

इत्यव्यक्तषड्विधम्

सुधा—जैसे मूलानयन के लिए वर्गात्मक राशि = १६ $य^2$ – ४८ य + ३६ इसका वर्गमूल अभीष्ट हो तो वर्णात्मक राशि के प्रथम वर्गात्मक १६ $य^2$ का मूल = ४ य, एवम् द्वितीय वर्गात्मक ३६ का वर्गमूल = – ६। दोनों मूलों का द्विगुणितगुणनफल २ × ४ य × – ६ = –४८ य। ५ इसे – ४८ य में घटाने पर संशोध्यमान – ४८ य धनात्मक हो जायगा। चूंकि धनर्ण दोनों का योग शून्य है अतः ४ य – ६ यही अभीष्ट वर्गमूल हुआ।

विमर्श—कृतिभ्य आदाय पदानि तेषामित्यादि भास्करीय मूलानयन पद्धति से कहीं-कहीं मूल लाना कठिन हो जाता है। अतः पाटीगणितोक्त "त्यक्त्वान्त्याद् विषमात्" आदि के अनुसार हीं वर्गमूल लाना चाहिए।

जैसे—$य^4$ + ६ $य^3$ + २५ $य^2$ + ४८ य + ६४ इस वर्गात्मक राशि का वर्गमूल प्रस्तुत नियमानुसार सम्भव नहीं है। क्योंकि इस वर्गात्मक राशि में वर्गात्मक खण्डों ($य^4$, २५ $य^2$, ६४) का मूल क्रमशः $य^2$, ५ य, ८ ये हैं। इन में दो-दो मूलों का द्विगुणितघात शेष में घटाने पर यह निश्शेष नहीं होता,, अतः यह राशि अवर्गात्मक सिद्ध हुआ।

किन्तु पाटीगणितोक्त पद्धति से मूल के लिए न्यास :—

```
        | य⁴ + ६ य³ + २५ य² + ४८ य + ६४ | य² + ३ य + ८
        | य⁴
        ----
२य²     ) ६य
          ६य³
       -----------
          ×  २५ य²                          अतः वर्गमूल =
               ९ य²                          य² + ३ य + ८
२ य² + ६ य | १६ य² + ४८ य
           | १६ म² + ४८ य
       -------------------
                      ६४
                      ६४
                   ------
                      ×
```

पाटीगणितोक्त भास्करीय वर्गमूलानयन

जिस वर्गराशि का वर्गमूल निकालना अभीष्ट हो उस किसी एक वर्ण के घातमापक को उत्तरोत्तर बढ़ते या घटते हुए के रूप में लिखें। फिर प्रथम पद के वर्गमूल को भागफल के स्थान में और उसके वर्ग को उद्दिष्ट वर्ग में घटाकर शेष को भाज्य और द्विगुण वर्गमूल को भाजक का रूप देकर उससे भाज्य में भाग दें तो भागफल वर्गमूल का दूसरा पद होगा और नवानीत मूल के वर्ग को शेष में घटावें, या दूसरे नवागत मूल को द्विगुण प्रथम पद में

जोड़कर योग को उसी दूसरे पद से गुणा कर भाज्य में घटावें। भाज्य यदि निःशेष हो जाय तो वही अभीष्ट वर्गमूल है। शेष रहने पर नवानीत वर्गमूल को दूना करके पहले के द्विगुण वर्गमूल में जोड़ कर भाजक बनावें। पुनः लब्धि को तीसरा पद मानकर उसे द्विगुणित प्रथम द्वितीय पद में जोड़ कर उसी तृतीय पद से गुणाकर शेष रूप भाज्य में घटावें, ऐसी क्रिया भाज्य के निःशेष होने तक करें, तो अभीष्ट वर्गमूल हो जायगा।

जैसे (उदा० १) ४ य^{२} + १२ य र + ९ र^{२} का वर्गमूल लाना है।

न्यास—४ य^{२} + १२ य र + ९ र^{२} (२ य + ३ र

४ य^{२}

४ य + ३ र) × १२ य र + ९ र^{२}

३ र

१२ य र + ९ र^{२} १२ य र + ९ र^{२}

× × अतः वर्गमूल = २ य + ३ र

उदा० (२) ४ य^{४} + ४ य^{3} + ९ य^{२} + ४ य + ४ का वर्गमूल लाना है।

न्यास) ४ य^{४} + ४य^{3} + ९य^{२} + ४य + ४ (२य^{२} + य + २

४ य^{2} + य) ४ य^{४}

य ×

४ य^{3} + य^{२} ४ य^{3} + ९ य^{२}

४ य^{3} + य^{२}

४ य^{२} + २य + २) × ८ य^{२} + ४ य + ४

२ ८ य^{२} + ४ य + ४

८ य^{२} + ४य + ४ × × ×

अतः वर्गमूल = २ य^{२} + य + २

उदा० (३) ४ अ^{२} य^{६} + ४ अ क य^{५} + ४ अ ग य^{४} + क^{२} य^{४} + २ क ग य^{3} + य^{२} ग^{2} का वर्गमूल निकालिए :—

न्यास—

) ४ अ^{२} य^{६} + ४ अ क य^{५} + ४ अ ग य^{४} + क^{२} य^{४} + २ क ग य^{3} + य^{2} ग^{२} (२ अ य^{3}

४ अ^{२} य^{६}

४ अ य^{3} + क य^{२}) × ४ अ क य^{५} + ४ अ ग य^{४} + क^{२} य^{४} (क य^{२}

क य^{२}) ४ अ क य^{५} + क^{२} य^{४}

४ अ क य^{५} + क^{२} य^{४}) ४ अ ग य^{४} + २ क ग य^{3} + य^{२} ग^{२}

४ अ य^{3} + २ कय^{२} + यग) ४ अ ग य^{४} + २ क ग य^{3} + य^{२} ग^{२} (य ग

य ग × × ×

४ अ ग य^{४} + २ क ग य^{3} + य^{२} ग^{२}

अतः वर्गमूल = २ अ य^{3} + क य^{२} + य ग

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) १४४ अ^{२} य^{४} का और (य − र)^{२}. क^{२} का वर्गमूल क्या है ?
उत्तर ± १२ अ य^{२} और ±(य − र) . क ।

(२) अ^{२}. क^{२} + १४ अ क + ४९ का और अ^{४} − १० अ.^{२} य + २५य^{२} का वर्गमूल क्रमशः = अ क + ७ और अ^{२} − ५ य

(३) २५ अ^{४} + १२० अ^{३} क + ३० अ^{२}. य^{२} + १४४ अ^{२}. क^{२} + ७२ अ क य^{२} + ९ य^{४} का वर्गमूल = ५ अ^{२} + १२ अ क + ३ य^{२}

(४) य^{४} − ६ य^{३} − ९ य^{२} + ५४य + ८१ का तथा अ^{६} − ४ अ^{५} + १० अ^{३} − ४ अ + १ का वर्गमूल क्या है ?

उत्तर—य^{२} − ३ य − ९ तथा अ^{३} − २ अ^{२} − २ अ + १

(५) ४ − ४ अ + ५ अ^{२} − २ अ^{३} + अ^{४} का वर्गमूल = २ − अ + अ^{२}

(६) य^{६} − ४ य^{३} र^{२} + ४ र^{२} का वर्गमूल = य^{३} − २ र^{२}

(७) २५ ग^{४} − १० ग^{२}. अ^{२} − १० ग^{२} क^{२} + अ^{४} + २ अ^{२}.क^{२} + क^{४} का वर्गमूल= ५ ग^{२} − अ^{२} − क^{२}

(८) ४ य^{६} + ८य^{५} + ५ य^{२} − २ य + १ का वर्गमूल = २ य^{३} + २ य^{२} − य + १

(९) १६ य^{२} − ४० य र + २५ र^{२} + २४ य − ३० र + ९ का वर्गमूल = ४ य − ५ र + ३

(१०) ६४ अ^{४}. य^{४} − ३२० अ^{३} य^{३} + १००० अ य + ६२५ का वर्गमूल बतलाइए :—उत्तर ८ अ^{२} य^{२} − २० अ य − २५

(११) ६४ अ^{४} − ४४८ अ^{३} क + २७४४ अ क^{३} + २४०१ क^{४} का वर्गमूल क्या है ? उत्तर : ८ अ^{२} − २८ अ क − ४९ क^{२} ।

अथाऽनेकवर्णषड्विधम्

तत्र संकलनव्यवकलनोदाहरणम् :—

यावत्तावत्कालकनीलकवर्णास्त्रिपञ्चसप्तधनम् ।
द्वित्र्येकमितैः क्षयगैः सहिता रहिताः कति स्युस्तैः ॥१०॥

न्यासः—या ३ का ५ नी ७ । या २̇ का ३̇ नी १̇ ।
योगे जातम् या १ का २ नी ६ ।
वियोगे जातम् या ५ का ८ नी ८ ।
इत्यनेकवर्णसंकलनव्यवकलने ।

सुधा—धनात्मक-यावत् तीन, कालक पांच, नीलक ७ में ऋणात्मक—यावत् दो कालक तीन नीलक एक को संयुक्त एवं वियुक्त करने से क्या फल होगा ?

जैसे + ३ या + ५ का + ७ नी इस में
− २ या − ३ का − १ नी इसे संयुक्त करने से

योगफल = या + २ का + ६ नी। योगोऽन्तरं तेषु समानजात्योर्विभिन्नजात्योश्च पृथक् स्थितिः स्यात् के अनुसार सजातियों के ही योग वियोग होते हैं। इसीलिए सजातीयों को एक सामने लिखकर ही योग या वियोग करना चाहिए।

वियोग के लिए न्यास :—

या ३ + ५ का + ७ नी
− (− २ य − ३का − १नी)

या ५ + ८ का + ८ नी = वियोगफल।

संशोध्यमान ऋण धन हो जाता है अतः वियोज्य सभी ऋण धन हो गए और सभी जगह धन धन का योग धनात्मक हो गया है ।। १० ।।

गुणनादेरुदाहरणम् :—

यावत्तावत्त्रयमृणमृणं कालकौ नीलकः स्वं
रूपेणाढ्या द्विगुणितमितैस्ते तु तैरेव निघ्नाः ।
किं स्यात्तेषां गुणनजफलं गुण्यभक्तं च किं स्याद्-
गुण्यस्याथ प्रकथय कृतिं मूलमस्याः कृतेश्च ।। ११ ।।

न्यासः—गुण्यः या ३̇ का २̇ नी १ रु १ ।
गुणकः या ६̇ का ४̇ नी २ रु २ ।

गुणिते जातम् :—याव १८ काव ८ नीव २ याकाभा २४ यानीभा १२̇ कानीभा ८̇ या १२̇ का ८̇ नी ४ रु २.

अस्मादेवगुणनफलाद् गुण्येनानेन या ३̇ का २̇ नी १ रु १ भक्तावाप्तो गुणकः या ६̇ का ४̇ नी २ रु २ ।

इत्येकवर्णगुणनभजने ।

पूर्वगुण्यरूप वर्गार्थं न्यासः या ३̇ का २̇ नी १ रु १। जातोवर्गः याव ९ काव ४ नीव १ याकाभा १२ यानीभा ६̇ कानीभा ४̇ या ६̇ का ४̇ नी २ रु १।

वर्गादस्मान्मूलम् या ३̇ का २̇ नी १ रु १।

इत्यनेकवर्णषड्विधम्।

सुधा:—रूप (एक) युक्त यावत् तीन ऋण, कालक दो ऋण, और नीलक एक धन को द्विगुणित इन्हीं यावत् कालक आदि से गुणने पर गुणनफल क्या होगा ? गुणनफल में गुण्य से भाग लेने पर क्या होगा ? गुण्य का वर्ग तथा उस वर्ग का वर्गमूल भी बतलाइए ॥ ११ ॥

जैसे--गुण्य = या ३̇ का २̇ नी १ रु १

(१) = − ३ या − २ का १ नी + १

तथा गुणक = २ × गुण्य = या ६̇ का ४̇ नी २ रु १

= − ६ या − ४ का + २ नी + २

गुणन फल = गुण्य × गुणक

(− ३ १ − २ का + १ नी + १) × (− ६ या − ४ का + २ नी + २) = गु० फ०

(३ − या − २ का + नी + १) × − ६ या =
१८ या^{२} + १२ या का − ६ या नी − ६ या = (अ)

(− ३या − २का + १ नी + १) × − ४ का =
१२ या का + ८ का^{२} − ४ का नी − ४ का = (ग)

(− ३ या − २ का + १ नी + १) × २ नी =
− ६ या नी − ४ कानी + २ नी^{२} + २ नी = (च)

(− ३ या − २ का + १ नी + १) × २ =
− ६ या − ४ का + २ नी + २ = (ट)

∴ गुणनफल = अ + ग + च + ट =
१८ या^{२} + २४ या का − १२ या नी − १२ या + ८का^{२} − ८ का नी − ८ का + २ नी^{२} + ४ नी + २.

यहाँ गुणक में चार खण्ड होने के कारण गुण्य को चार जगह रख कर प्रत्येक को गुणक खण्डों से गुण कर इन सभी गुणनफलों के योग करने से वास्तविक गुणनफल हुआ है।

(२) यदि पूर्वोक्त गु. फ भाज्य = १८ या^{२} + २४ या. का − १२ या. नी + ८ का^{२} − ८ का. नी − ८ का + २ नी^{२} + ४ नी + २

भाजकः = पूर्वोक्त गुण्य = − ३ य − २ का + नी + १ हो

तो भागफल लाने के लिए न्यास :—

भाजक भाज्य

− ३ या − २ का + नी + १) १८ या^{२} + २४ या का − १२ यानी + का^{२} − ८ का नी − ८ का + २ नी^{२} + ४नी + २

कल्पित प्रथम लब्धि = −६ या।

प्रथम लब्धि गुणित भाजक को भाज्य में घटाने से

१८या^{२} + २४ याका − १२ यानी − १२ या + ८ का^{२} − ८ कानी − ८ का + २ नी^{२} + ४ नी + २

−(१८य^{२} + १२ याका − ६ यानी − ६ य)

= १२ याका − ६ यानी − ६ या + ८ का^{२} − ८ कानी − ८ का + २नी^{२} + + ४ नी + २।

इस नये भाज्य में द्वितीय लब्धि (− ४ का) गुणित भाजक को घटाने से—

१२ या का − ६ यानी − ६ या + ८ का^{२} − ८ कानी − ८ का + २नी^{२} + ४ नी + २ − (१२ याका + ८ का^{२} − ४ कानी − ४ का)

शेष = − ६ या नी − ६ या − ४ कानी − ४ का + २ नी^{२} + ४नी + २

पुनः इस नये भाज्य में तृतीय लब्धि (२ नी) गुणित भाजक को घटाने पर

− ६ यानी − ६ या − ४ कानी − ४ का + २ नी^{२} + ४ नी + २

−(− ६ यानी − ४ कानी + २ नी^{२} + २ नी)

शेष = − ६ या − ४ का + २ नी + २

इस नये भाज्य में चतुर्थ लब्धि (२) गुणित भाजक को घटाने से—

− ६ या − ४ का + २ नी + २

− ६ या − ४ का + २ नी + २

× × × ×

अतः भाग फल = − ६ या − ४ का + २ नी + २।

(३) गुण्य = −३ या − २ का + नी + १ इसका वर्ग का = (−३ या − २ का + नी + १)^{२} = इसको इसी राशि से गुणने या प्रथम का वर्ग करके, द्विगुणित प्रथम से आगे के सभी पदों को गुणकर प्रथम पद को छोड़कर आगे भी वर्ग, तथा द्विगुणित इससे आगे के पदों को गुणन आदि अन्तिम तक करने पर निष्पन्न वर्ग =

+ ९ या^{2} + १२ या का − ६ या नी − ६ या + ४ का^{2} − ४ का नी − ४ का + नी^{2} + २ नी + १ = गुण्य का वर्ग ।

पूर्व लिखित निष्पन्न वर्ग का वर्गमूल लेने के लिए

पूर्ववन्न्यास :—

९ या^{2} + १२ या का − ६ या नी − ६ या + ४ का^{2} − ४ का नी − ४ का + नी^{2} + २ नी + १

९ या^{2} २ नी + १ (− ३ या − २ का + नी + १

− ६ या − २ का | १२ या का − ६ या नी − ६ या + ४ का^{2} − ४ का नी − ४ का + नी^{2} + २ नी + १

| १२ या का   + ४ का^{2}

− ६ या − ४ का + नी | − ६ या नी − ६ या − ४ का नी − ४ का + नी^{2} + २ नी + १

− ६ या नी   − ४ का नी   नी^{2}

− ६ या − ४ का + २ नी + १ | − ६ या   − ४ का + २ नी + १

− ६ या   − ४ का + २ नी + १

×   ×   ×   ×

अतः वर्गमूल = − ३ य − २ का + नी + १

विमर्श—ग्रन्थकार ने उपर्युक्त दो पद्यों के द्वारा अनेक वर्ण सम्बन्धी संकलन, व्यवकलन, गुणन, भजन, वर्ग तथा वर्गमूल का उदाहरण प्रस्तुत किया है। अनेक वर्ण सम्बन्धी योग वियोग गुणन भजन वर्ग तथा वर्गमूल के अनेक सोत्तर प्रश्न अभ्यासार्थ मैंने तत्तत्सूत्रों के प्रसंग में देकर सभी नियमों को स्पष्ट कर दिया है। अतः यहाँ विशेष उदाहरण देना अनावश्यक है।

अथ करणीषड्विधम्

तत्र सङ्कलनव्यवकलनयोः करणसूत्रं वृत्तद्वयम्—

योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्य घातस्य मूलं द्विगुणं लघुं च ।
योगान्तरे रूपवदेतयोःस्तो वर्गेण वर्गं गुणयेद् भजेच्च ॥१२॥

लघ्व्याहृतायास्तु पदं महत्याः
सैकं निरेकं स्वहृतं लघुघ्नम् ।
योगान्तरे स्तः क्रमशस्तयोर्वा
पृथक्स्थितिः स्याद्यदि नास्ति मूलम् ॥१३॥

सुधा—अवर्गात्मक राशि के मूल की संज्ञा प्राचीनों ने करणी रक्खी है। प्रस्तुत सूत्रद्वयों के द्वारा दो करणियों का योग एवं अन्तर का ज्ञान दो प्रकार से किया जा रहा है।

जिन दो करणियों का योग या अन्तर करना अभीष्ट हो उन दोनों के योग की महती संज्ञा, और दोनों करणियों के गुणनफल के वर्गमूल को द्विगुणित कर लघु संज्ञा रक्खें। इन्हीं महती तथा लघु संज्ञक करणियों का योग या अन्तर रूप के समान करें तो अभीष्ट करणीद्वय का योग तथा अन्तर होते हैं। वर्ग को वर्ग से ही गुणन या भजन करना चाहिये अर्थात् करणी को रूप से गुणन या भजन करते समय रूप के वर्ग से गुणें या भाग लेवें। जैसे $६\times\sqrt{२} = \sqrt{३६\times२}$ के रूप में या $\frac{६}{\sqrt{२}} = \sqrt{\frac{३६}{२}}$ के रूप में प्रकट करें।

दूसरा प्रकार

जिन दो करणियों का योग तथा अन्तर करना अभीष्ट हो उनमें छोटी करणी से बड़ी में भाग लें, भागफल के वर्गमूल में एक जोड़ दें तथा एक घटा दें, योगफल तथा वियोगफल का वर्ग करें पुनः छोटी करणी से उन्हें गुण दें तो क्रमशः उन दो करणियों के योग एवं अन्तर हो जायेंगे। उपर्युक्त भागफल का यदि वर्गमूल नहीं हो तो दोनों करणियों की पृथक् स्थिति मात्र रहेगी न कि दोनों के योग या अन्तर हो सकेंगे॥ १३॥

वासना—अमूलकोऽङ्कः करणीपदेन व्यवहृतः प्राचीनैः। यथा यश्च अमूलकाङ्कः, स च प्राचीनपद्धत्या क ५, नवीनपद्धत्या च $\sqrt{५}$ इत्येवं विलिख्यते। यथात्र अ, क करण्योर्योगान्तरेऽभीप्सिते तदा $\sqrt{अ} \pm \sqrt{क} =$
$\sqrt{(\sqrt{अ} \pm \sqrt{क})^२} = \sqrt{अ + क \pm २\sqrt{अ}\times\sqrt{क}}$ राशि वर्गीकृत्य तन्मूले च गृहीते विकाराभावात्।

यद्यत्र $\sqrt{अ} > \sqrt{क}$ तदा $\sqrt{अ} - \sqrt{क} > ०$

पक्षयो वर्ग कृते

$अ + क - २\sqrt{अ}\times\sqrt{क} > ०$

पक्षयोः $२\sqrt{अ}\times\sqrt{क}$ इति योजिते तदा $अ + क > २\sqrt{अ\times क}$ इत एवाचार्येण करण्योर्योगस्य महती संज्ञा द्विगुणस्य तद्घातस्यलघुसंज्ञा कृताचार्यैः। एतेन योगंकरण्योरित्यारभ्य रूपवदेतयोः स्त इत्यन्तमुपपन्नम्। यतश्च—

$६\sqrt{२} = \sqrt{३६\times२} = \sqrt{७२}$

एवम् $= \frac{६}{\sqrt{२}} = \sqrt{\frac{३६}{२}} = \sqrt{१८}$

अतो वर्गेण वर्गं गुणयेद् भजेच्चेति सूपपन्नम् ।

अथवा

$$\sqrt{\text{अ}} \pm \sqrt{\text{क}} = \frac{(\sqrt{\text{अ}} \pm \sqrt{\text{क}}) \times \sqrt{\text{क}}}{\sqrt{\text{क}}}$$ कस्मिंश्चिद्राशौ

समेन गुणने भजने च विकाराभावात् ।

वा $\sqrt{\text{अ}} \pm \sqrt{\text{क}} = \left(\frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{क}}} \pm \text{१}\right) \times \sqrt{\text{क}}$

यद्यत्र $\sqrt{\text{अ}} > \sqrt{\text{क}}$

तदा $\sqrt{\text{अ}} \pm \sqrt{\text{क}} = \left(\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}} \pm \text{१}\right) \times \sqrt{\text{क}}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}} \pm \text{१}\right)^{\text{२}} \times \text{क}}$

एतेन लब्ध्या हृतायास्तु पदमित्यादिकं सूपपन्नम् ।

अत्रैव पूर्वोक्तयोः अ, क करणीद्वययोः यदि

$\sqrt{\text{अ}} = \sqrt{\text{न प}^{\text{२}}}$, एवम् $\sqrt{\text{क}} = \sqrt{\text{न. ल}^{\text{२}}}$

अतः $\sqrt{\text{अ}} \mp \sqrt{\text{क}} = \sqrt{\text{न} \times \text{प}^{\text{२}}} \mp \sqrt{\text{न. ल}^{\text{२}}}$

$= \text{प}\sqrt{\text{न}} \mp \text{ल}\sqrt{\text{न}} = (\text{प} \mp \text{ल}) \times \sqrt{\text{न}}$

$= \sqrt{\text{न} \times (\text{प} \mp \text{ल})^{\text{२}}}$

एतेनः—आदौ करण्यावपवर्त्तनीये तन्मूलयोरन्तरयोगवर्गौ ।
इष्टापवर्त्ताङ्कहतौ भवेतां क्रमेण विश्लेषयुती करण्योः ॥

इति कस्यचित्पद्यमुपपद्यते ॥ १२–१३ ॥

उदाहरणम्

द्विकाष्टमित्योस्त्रिभसंख्ययोश्च
योगान्तरे ब्रूहि पृथक् करण्योः ।
त्रिसप्तमित्योश्च चिरं विचिन्त्य
चेत् षड्विधं वेत्सि सखे करण्याः ॥१४॥

न्यासः—क २, क ८, योगे जातम् क १८ । अन्तरे च क २ ।

द्वितीयोदाहरणे

न्यासः—क ३ क २७ योगे जातम् क ४८ अन्तरे च क १२ ।

तृतीयोदाहृतौ

न्यासः—क ३ क ७ अनयोर्घाते मूलाभावात् पृथक् स्थितिरेव अतः योगे जातम्
क ३ क ७ । अन्तरे च क ३ क ७ ।
इति कारणीसंकलनव्यवकलने ।

सुधाः—हे मित्र ! दो, आठ, तथा तीन, सत्ताइस, करणियों का योग अन्तर अलग अलग बतलाओ ।

तीन, सात, करणियों का भी योगान्तर खूब सोच विचार कर कहो, यदि तुम षड्विध करणी को जानते हो ॥ १४ ॥

उदाहरण (१)

क २, क ८ का योगान्तर लाने के लिए उपर्युक्त प्रथम सूत्र के अनुसार दोनों का योग क १० को महती संज्ञा, और दोनों के गुणन (८ × २=१६) के मूल ४ का दूना ८ कर लघु संज्ञा रक्खी । पुनः महती एवं लघु का योग १० + ८=क १८=करणीद्वययोग ।

महती – लघु = १० – ८ = २ अर्थात् क २ = करणीद्वयान्तर ; "लघ्व्याहृतायास्तु पदं महत्या" आदि सूत्र के अनुसार लघु करणी क २ से क ८ में भागलेने पर=४ । इसका मूल = २ । २+१=३ । २ १ = १ । इस प्रकार सैक निरेक ३, १ के क्रमशः वर्ग=९, १ । इन्हें लघु करणी २ से गुणा करने पर क्रमशः १८ तथा २, अर्थात् क १८ एवम् क २, पूर्वोक्त क २ तथा क ८ के योगान्तर हुए अर्थात् क २, क ८ का योग=क १८ । तथा क २, क ८ का अन्तर क २ ।

उदाहरण (२)

क ३, क २७ के योगान्तर लाने के लिए पूर्वोक्त "योगं–करण्योः महतीमि" त्यादि सूत्रानुसार दोनों का योग ३० को महती और दोनों के गुणन के मूल $\sqrt{२७ × ३}$=$\sqrt{८१}$=९ को द्विगुणित कर (९×२ = १८) लघु संज्ञा दी । पुनः महती एवं लघु संज्ञक (३०×तथा १८) का रूपवद्योगान्तर याने ३० + १८ = ४८, एवम् ३०–१८ = १२, ये दोनों करणियाँ (क ४८, क १२) उद्दिष्ट करणीद्वय क ३, क २७ के योगान्तर हुए ।

दूसरे सूत्र "लघ्व्या हृतायास्तु पदं महत्या" आदि के अनुसार लघु करणी= तीन से २७ में भाग देने से २७ ÷ ३ = ९ । $\sqrt{९}$ = ३ । ३+१ = ४ । ३–१ =२ । दोनों का वर्ग = ४×४ = १६ एवम् २×२ = ४ । इन १६, तथा ४ को लघुकरणी = ३ से गुणा करने पर १६×३ = ४८, तथा ४×३ = १२ । अत : क ४८, एवम् क १२ ये दोनों उद्दिष्ट करणीद्वय के योगान्तर हुए ।

उदाहरण (३)

क ३, क ७ के योगान्तर लाने के लिए दोनों के योग १० को महती संज्ञा और दोनों का गुणनफल २१ अमूलक है, अतः करणीद्वय योगविधायक योगं करण्योर्महतीमित्यादि सूत्र के अनुसार योग न हो कर मूलाभाव के कारण अलग स्थिति मात्र रहेगी।

इसी प्रकार इस उदाहरण में "लघ्व्याहृतायास्तु पदमित्यादि" सूत्रानुसार भी सात में तीन से भाग देने पर लब्धि के मूलाभाव के कारण पृथक् स्थिति मात्र रहेगी न कि दोनों करणियों का योगान्तर एक करणी हो सकेगा ।। १४ ।।

गुणनोदाहरणम्

द्वित्र्यष्टसंख्या गुणकः करण्यो-
गुण्यस्त्रिसंख्या च सपञ्चरूपा ।
वधं प्रचक्ष्वाशु विपञ्चरूपे
गुणेऽथवा त्र्यर्कमिते करण्यौ ।। १५ ।।

न्यासः गुणकः क २ क ३ क ८ ।
गुण्यः क ३ रु ५

अत्र गुण्ये गुणके वा भाज्ये भाजके वा करणीनां करण्योर्वा यथासम्भवं लाघवार्थं योगं कृत्वा गुणनभजने कार्ये ।

तथा कृते जातो गुणकः क १८ क ३ ।
गुण्यः क २५ क ३ ।

गुणिते जातम् रू ३ क ४५० क ७५ क ५४ ।

सुधा—करणी दो करणी तीन करणी आठ (रु २ क ३ क ८) गुणक है और पाँच रूप सहित करणी तीन = क ३ रू ५ यदि गुण्य है, अथवा रूप पाँच रहित करणी तीन और करणी बारह (क ५ क ३, क १२) गुणक है तो (दोनों गुणकों से गुण्य को गुणा कर) गुणनफल क्या होगा, यह शीघ्र मुझे बतलाओ ।। १२ ।।

विशेष—लाघवार्थ गुण्य, गुणक, या भाज्य भाजक में स्थित यथासम्भव करणीद्वय या करणीबहुल के योग करके ही गुणन भजन करना चाहिए ।

प्रथमोदाहरण

गुण्य = क ३ रु ५ = क ३ क २५
गुणक = क २ क ३ क ८ = क ३ क १८

(रूप ५ की करणी = क २५, एवम् क २ + क ८ = क १८ यह पहले भी बतलाया जा चुका है।

अत: गुणनफल = गुण्य × गुणक = (क ३ क २५) (क ३ क १८)
= (क ३ क २५) क ३ + (क ३ क २५) क १८
= क ९ क ७५ + क ५४ क ४५०
= क ९ क ४५० क ७५ क ५४
= रु ३ क ४५० क ७५ क ५४

विशेषसूत्रं वृत्तम्

क्षयो भवेच्च क्षयरूपवर्ग-
श्चेत् साध्यतेऽसौ करणीत्वहेतोः।

ऋणात्मिकायाश्च तथा करण्याः
मूलं क्षयो रूपविधानहेतोः ॥ १६ ॥

सुधा—करणी बनाने के लिए यदि ऋणात्मक रूप का वर्ग किया जाय या ऋणात्मक करणी का रूप बनाने के निमित्त यदि मूल लिया जाय तो दोनों स्थिति में ऋणात्मक ही होगा ॥ १६ ॥

विमर्श—इस सूत्र में विशेषता यह है कि ऋणात्मक का वर्ग, जिसे नियमानुसार धनात्मक होना चाहिए, ऋणात्मक होता है और ऋणात्मक का मूल भी ऋणात्मक ही होता यद्यपि नियमतः ऋणात्मक का मूल होना ही असङ्गत है। इन्हीं दो विशेषताओं के कारण इस सूत्र को ग्रन्थकार ने विशेष सूत्र कहकर अभिव्यक्त किया है। वस्तुतः यहां का ऋणात्मक असली ऋणात्मक नहीं है, यह उपपत्ति में स्पष्ट हो जायगा।

वासना—धनकरणीपञ्चकेन यदि रूपत्रयमृणं गुण्यते तदा $\sqrt{५} \times -३ =$ गुणनफलमिति क्षयात्मकम्, धनर्णयोर्घातस्य क्षयात्मकत्वात्। किञ्च $- ३ \times \sqrt{५} = \sqrt{९} \times \sqrt{५} = \sqrt{४५}$ इदमापाततो धनमेवोपलप्स्यत इति धनत्ववारणाय क्षयात्मकस्यापि रूपस्य करणीत्वहेतोर्वर्गे कृते क्षयात्मकत्वमेवेति प्रोक्तमाचार्यैः। तथा कृते (− ३) अस्य वर्गः $= - \sqrt{९}$। अनेनेति बोध्यं यत् धनात्मकानां नवानां मूलं क्षयात्मकमस्ति, न च ऋणात्मकानाम् नवानां मूलम्। ऋणात्मकानां मूलस्यासम्भवात्।

एतेन सिद्धं यत् करणीविधानाय क्षयात्मकस्यापि रूपस्य वर्गः क्षयात्मकः। रूपविधानाय च ऋणात्मकानामपि करणीनांमूलमृणमित्युपपन्नं सर्वम्।

द्वितीयोदाहरणे न्यासः

गुणकः क २५ क ३ क १२। गुण्यः क २५ क ३
अत्र गुणके करण्योर्योगे कृते गुणकः क २५ क २७
गुणिते जातम् क ६२५ क ६७५ क ७५ क ८१
एतास्वनयोः (क ६२५ क ८१) मूले रु २५ रु ९
अनयोर्योगे जातम् रु १६। क ६७५ क ७५ अनयो
रन्तरे योग इति जातो योगः क ३००।
यथाक्रमं न्यासः—रु १६ क ३००

इति करणीगुणनम्।

सुधा—प्रस्तुत उदाहरण में गुण्य=क २५ क ३, और
गुणक = रु ५ क ३ क १२ = रु ५ क २७
∵ क ३ + क १२ = क २७
∴ गुण्य × गुणक = गुणनफल = (क २५ क ३) (रु ५ क २७)
क्षयोभवेच्चेत्यादि सूत्रानुसार रु ५ = क २५
अतः गुणनफल = (क २५ क ३) × (क २५ क २७) =
(क २५ क ३) क २५ + (क २५ क ३) क २७ =
क ६२५ क ७५ + क ६७५ क ८१। पूर्वोक्तसूत्रानुसार
चूंकि क ६२५ = रु २५ और ८१ का मूल = ९
अतः क ६२५ क ८१ का अन्तर = रु १६ =
एवम् क ७५ तथा क ६७५ का अन्तर लघ्व्याहृतायास्तु पदं महत्याः के अनुसार = क ३००
अतः गुणनफल = रु १६ क ३००।

इति करणीगुणनम्

पूर्वगुणनफलस्यस्वगुणच्छेदस्य भागहारार्थं न्यासः—
भाज्यः क ९ क ४५० क ७५ क ५४
भाजकः क २ क ३ क ८।

अत्र क २ क ८ एतयोः करण्यो र्योगे कृते जातम् क १८ क ३।
"भाज्याच्छेदः शुद्धयति प्रच्युतः सन्" इत्यादि करणेन लब्धो गुण्यः रु ५ क ३।

द्वितीयोदाहरणेः—

न्यासः भाज्यः क २५६ क ३०० । भाजकः क २५ क ३ क १२
करण्योः योगे कृते जातम् क २५ क २७

अत्रादौ त्रिभिर्गुणयित्वा धनकरण्योः ऋणकरण्योश्च योगं विधाय पश्चात् पञ्चविंशत्या गुणयित्वा शोधिते लब्धम् रु २ क ३। अत्रापि पूर्ववल्लब्धो गुण्यः रु ५ क ३।

प्रथमोदाहरणः—

सुधा—भाज्य = क ९ क ४५० क ७५ क ५४

भाजक = क २, क ३ क ८

∵ क २ + क ८ = क १८ ∴ भाजक = क १८ क ३

भागफल के लिए न्यासः—

भाजक भाज्य

क १८ क ३) क ४५० क ७५ क ५४ क ९ (क २५ क ३

क ४५० क ७५

× × क ५४ क ९

क ५४ क ९

× ×

अतो लब्धिः = क २५ क ३ = रू ५ क ३

द्वितीयोदाहरणः—

भाज्य = क २५६˙ क ३००

भाजक = क२५° क ३ क १२ = क २५˙ क २७

भाजक भाज्य

क २५˙ क२७) क २५˙६ क ३०० (क ३ = प्रथम लब्धि

प्रथमलब्धिगुणित-

भाजक को भाज्य में घटाने से—

शेष = क २५६˙ क ८१˙ क ३०० क ७५

= रू १६˙ रू ९˙ क ३०० क ७५

∵ क ३०० + क ७५ = क ६७५

अतः शेष = रू २५˙ क ६७५

= क ६२५˙ क ६७५ = नवीन भाज्य

पुनः इसमें भाजक क २५˙ क २७ से भाग देने पर = द्वि० ल०

क २५˙ क २७) क ६२५˙ क ६७५ (क २५

क ६२५˙ क ६७५

× ×

द्वि० ल० गुणित भाजक को भाज्य से घटाने पर

भागफल क ३ क २५ = रू ५ क ३

अथवाऽन्यथोच्यते—

धनर्णताव्यत्ययमीप्सिताया-
श्छेदे करण्या असकृद् विधाय ।
तादृक्छिदा भाज्यहरौ निहन्या-
देकैव यावत्करणी हरे स्यात् ।। १७ ।।
भाज्यास्तया भाज्यगताः करण्यो-
लब्धा करण्यो यदि योगजाः स्युः ।
विश्लेषसूत्रेण पृथक् च कार्या
यथा तथा प्रष्टुरभीप्सिताःस्युः ।।१८।।

तथा च विश्लेषसूत्रम्—

वर्गेण योगकरणी विहृता विशुद्धयेत्-
खण्डानि तत्कृतिपदस्य यथेप्सितानि ।
कृत्वा तदीयकृतयः खलु पूर्वलब्धया
क्षुण्णा भवन्ति पृथगेवमिमाः करण्यः ।।१९।।

सुधाः—हर स्थित किसी करणी के धनर्ण चिह्न का व्यत्यास कर के अर्थात् हरस्थित किसी धनात्मक करणी को ऋणात्मक या ऋणात्मक करणी को धनात्मक मानकर उस नये हर से भाज्य एवं भाजक को तबतक गुणते जांय जब तक कि भाजक में एक करणी न हो जाय । उससे भाज्यस्थ करणियों को भाग दें, लब्ध करणी यदि योगज हो अर्थात् करणी द्वय का योगरूप आवे तो विश्लेष-सूत्र से उस करणी को प्रष्टा के इच्छानुसार अलग करें ।

विश्लेष सूत्रार्थ—जिस वर्गात्मक संख्या से विभक्त योग करणी निःशेष हो जाय उसके वर्ग पद का प्रष्टा के इच्छानुनार खण्ड करके, सभी खण्डों का वर्ग करें, उन वर्गों को पूर्वलब्धि से गुणा करें तो ये ही अलग अलग करणियाँ अभीप्सित होंगी ।। १७-१९ ।।

वासना—भाज्यभाजकौ समेनांकेन गुणितौ विभक्तौ वा लब्धिमविकृतां प्रयच्छतः । भाजकस्थकरणीषु काम्प्येकां व्यस्तधनर्णरूपां प्रकल्प्य तादृश-च्छिदा गुणितौ भाज्यहरावपि तामेवाविकृतां लब्धि प्रयच्छेताम् । किन्त्वैवं गुणिते भाजके, योगान्तरघातस्यवर्गान्तरसमत्वात् नूनमेका करणी न्यूना भविष्यति । पौनःपुन्येनैवं कृते (भाज्यभाजकयोरुभयोरपि व्यस्तधनर्णरूप-

भाजकेन गुणिते) ध्रुवमन्ते भाजके एकैव करणी स्यात् । तया चैकया करण्या तत्तद्व्यस्तधनर्णात्मकभाजकैर्गुणिते भाज्ये विभाजिते नूनमेवाविकृतालब्धिः सरलतयैवावगंस्यते । एतेन भाज्यगताः करण्य इत्यन्तमुपपन्नम् ।

यतश्च वर्गयोर्घातो वर्गः, वर्गाऽवर्गयोश्च घातोऽवर्ग इति $\sqrt{य^2 \times र}$=अवर्गात्मिका योग करणी = य$\sqrt{र}$ । अथ यदि य = क+ख+ग तथा योगकरणी=य$\sqrt{र}$

= क$\sqrt{र}$ + ख$\sqrt{र}$ + ग$\sqrt{र}$ = $\sqrt{क^2 र}$ + $\sqrt{ख^2 र}$ + $\sqrt{ग^2 र}$ = इमा एवाभीष्टाः करण्य इत्युपन्नं विश्लेषसूत्रम् ।

न्यासः—भाज्य : क ९ क ४५० क ७५ क ५४

भाजक : क १८ क ३ ।

अत्र भाजके त्रिमित करण्या ऋणत्वं प्रकल्प्य क १८ क ३˙ । अनेन भाज्ये गुणिते योगे च कृते जातम् । क ५६२५ क ६७५˙ भाजके च क २२५ अनया भाज्ये हृते लब्धम् क २५ क ३ ।

द्वितीयोदाहरणे

न्यासः भाज्यः क २५६ क ३०० ।

भाजकः क २५˙ क २७

अत्र भाजके पञ्चविंशतिकरण्या धनत्वं प्रकल्प्य क २५ क २७ भाज्ये गुणिते धनर्णकरणीनामन्तरे च कृते जातम् क १०० क १२ भाजके च क ४ अनया भाज्ये हृते लब्धम् क २५ क ३ ।

इदानीं पूर्वोदाहरणे गुण्ये भाजके कृते

न्यासः भाज्यः क ९ क ४५० क ७५ क ५४ ।

भाजकः क २५ क ३ ।

अत्रापि त्रिमितकरण्या ऋणत्वं प्रकल्प्य भाज्ये गुणिते युते च जातम् क ८७१२ क १४५२ भाज्यके च क ४८४ अनया हृते भाज्ये लब्धो गुणकः क १८ क ३ ।

पूर्वं गुणके खण्डत्रयमासीदिति योगकरणीयम् । क १८ विश्लेष्या । तत्र "वर्गेण योगकरणी विहृता विशुद्धयेत्" इति नवात्मकवर्गेण ९ विहृता सती शुद्धयतीति लब्धं २ । नवानां मूलम् ३, अस्य खण्डे १।२ अनयोःकृतिः १।४ पूर्वलब्ध्या २ गुणिते २।८ एवं जातो गुणकः क २ क ३ क ८ ।

इति करणीभजनम्

सुधा :—पूर्वोक्त प्रथम उदाहरण भाजक के करणी तीन को ऋणात्मक मानकर (क १८ क ३˙) इससे भाज्य एवं भाजक को गुणने से भाज्य ×

(क १८ क ३˙) = (क ९ क ४५० क ७५ क ५४) (क १८ क ३˙)
= (क ९ क ४५० क ७५ क ५४) क १८ + (क ९ क ४५० क ७५ क ५४) × क ३˙ =

क १६२ क ८१०० क १३५० क ९७२ ।
– (क २७ क १३५० क २२५ क १६२) =
क १६२ क ८ १०० क १३५० क ९७२ क २७˙ क १३५०° क २२५°
क १६२˙ धनर्ण करणियों के अन्तर करने पर = क ८१०० क ९७२ क २७°
क २२५° पुनः
क ८१०० एवं क २२५˙ के तथा क ९७२ क २७° के योग
करने पर = $(९०-१५)^२ = ७५^२$ = ५६२५ क तथा क ६७५
अतः नवीनभाज्य = क ५६२५ क ६७५
एवम् भाजकगत करणी को भी उक्त गुणक से गुणा करने पर गुणनफल
= (क १८ क ३˙) क १८ + (क १८ क ३˙) क ३ =
क ३२४ क ५४˙ + क ५४ क ९˙ = क ३२४ क ९˙ = क २२५ ।

इस प्रकार भाजक में एक करणी हो गई अतः इसी भाजक से पूर्व लिखित नवीन भाज्य क ५६२५ क ६७५ में भाग देने से लब्धि = क २५ क ३
जैसे

क २२५) क ५६२५ क ६७५ (क २५ क ३
क ५६२५
―――――
× क ६७५
क ६७५
―――――
×

द्वितीयोदाहरण के भाज्य = क २५६˙ क ३००
भाजक = क २५˙ क २७

भाजकस्थ क २५˙ को धनात्मक मानकर क २५ क २७ से भाज्य एवं भाजक को गुणने पर
(क २५६˙ क ३००) (क २५ क २७)
= (क २५६˙ क ३००) क २५ + (क २५६° क ३००) क २७
= क ६४००˙ क ७५०० क ६९१२˙ क ८१००

क ६४००° तथा क ८१०० का एवम् क ७५००, और क ६९१२° का योग दोनों के अन्तर स्वरूप ही होगा।

क ६४००˙ तथा क ८१०० के योग के लिए दोनों का वर्गमूल क्रमशः

८०° तथा ९० होंगे। इन दोनों का अन्तर ९०−८०=१०। अतः $(१०)^२$ =१०० क यही दोनों का योग सिद्ध हुआ।

क७४०० तथा क ६९१२° के योग के लिए पूर्वोक्त "आदौकरण्यावपवर्त्त-नीये" आदि सूत्र के अनुसार क ३ से दोनों को अपवर्त्तित करने से क २५००, क २३०४° इन दोनों का क्रमशः मूल ५०, ४८°। इन का अन्तर=२। $२^२$ =४। ४ को इष्टापवर्त्ताङ्क ३ से गुणने पर क १२=उपर्युक्त करणियों का अन्तर रूप योग। अतः नूतन भाज्य=क १०० क १२। इसी क २५ क २७ से भाजक को भी गुणा करने पर

(क २५ क २७), (क २५° क २७)=

(क २५ क २७) क २५°+(क २५ क २७) क २७

=क ६२५° क ६७५°+क ६७५ क ७२९ =

क ६२५° क ७२९ = क ४ = नूतन भाजक

अतः नूतन भाजक से भाज्य में भाग देने पर

क ४) क १०० क १२ (क २५ क ३

क १०० = लब्धि

× क १२

क १२

×

तृतीयोदाहरण में

भाज्य = क ९ क ४५० क ७५ क ५४

भाजक क २५ क ३

भाजकस्थ क ३ को ऋण कल्पना कर इस क २५ क ३° से भाज्य एवं भाजक को गुणने पर

(क ९ क ४५० क ७५ क ५४) (क २५ क ३°)

=(क ९ क ४५० क ७५ क ५४) क २५+(क ९ क ४५० क ७५ क ५४) ×क ३°

=क २२५ क ११२५० क १८७५ क १३५० +

क २७° क १३५०° क २२५° क १६२° =

क ११२५० क १८७५ क १६२° क २७°

=(क ११२५०+क १६२°)+(क १८७५ क २७°)

"आदौ करण्यावपवर्त्तनीये" आदि सूत्र के अनुसार अन्तरस्वरूप योग = क ८७१२ क १४५२ = नूतन भाज्य ऐसा ही भाजक क २५ क ३ को भी क २५ क ३° से गुणन पर (क २५ क ३) (क २५ क ३°) =

(क २५ क ३) क २५ + (क २५ क ३) क ३˙

= क ६२५ क ७५ क ७५˙ क ९˙

= क ६२५ क ९˙ = क ४८४ = नूतनभाजक

भाजक से भाज्य में भाग देने पर ।

भाजक भाज्य

क ३८४) क ८७१२ क १४५२ (क १८ क ३

क ८७१२

× क १४५२

क १४५२

×

अत. लब्धि=क १८ क ३

किन्तु क १८ = योगकरणी । अतः वर्गेण योगकरणीत्यादि सूत्रानुसार क १८ को क ९ से भाग देने पर विशुद्ध होता है, अतः $\sqrt{९}$ = ३ = १ + २ अतः १ तथा २ के वर्ग = १।४ इन्हें पूर्वलब्धि २ से गुणा करने पर क २ क ८ ये ही अभीष्ट करणी हुए ।

अतः लब्धि = क २ क ३ क ८

अथ करणीवर्गादेरुदाहरणम्

द्विकत्रिपञ्चप्रमिताः करण्यस्तासां कृतिं द्वित्रिकसंख्ययोश्च ।
षट्पञ्चकत्रिद्विकसम्मितानां पृथक् पृथङ्मे कथयाशु विद्वन् ।।
अष्टादशाष्टद्विकसम्मितानां कृतीकृतीनां च सखे पदानि ।।२०।।

न्यास— प्रथमः क २ क ३ क ५ ।
द्वितीयः क ३ क २ ।
तृतीयः क ६ क ५ क ३ क २
चतुर्थः क १८ क ८ क २

"स्थाप्योऽन्त्यवर्गश्च चतुर्गुणान्त्यनिघ्नाः" इत्यनेन 'गुण्यः पृथग्गुणकखण्डसम" इत्यनेन वा जाताः क्रमेण वर्गाः ।

प्रथमः रु १० क २४ क ४० क ६०
द्वितीयः रु ५ क २४
तृतीयः रु १६ क १२० क ७२ क ६० क ४० क २४

अत्रापि करणीनां यथासम्भवं योगं कृत्वा वर्गमूले कार्ये तद्यथा क १८ क ८ क २। आसां योगः क ७२। अस्या वर्गः--क ५१८४ अस्यामूलम् रु ७२

इति करणीवर्गः।

सुधा--हे विद्वन्! २।३।५, २।३ तथा ६।५।३।२, प्रमित करणियों का वर्ग अलग-अलग मुझे शीघ्र बताओ। हे मित्र वर्गीकृत १८।८।२ तुल्य करणियों का पद भी बतलाओ॥ २०॥

क २ क ३ क ५ के वर्ग के लिए न्यास:—

$$क २ क ३ क ५ = \sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{५}$$

स्थाप्योऽन्त्यवर्ग इत्यादि सूत्रानुसार अन्तिम करणी का वर्ग तन्मित ही रूप होगा। अत:

$$(\sqrt{२}+\sqrt{३}+\sqrt{५})^२ = रु २ + २\sqrt{२}\times\sqrt{३} + २\sqrt{२}\times\sqrt{५}$$
$$+ रु ३ + २\sqrt{३}\times\sqrt{५}$$
$$+ रु ५$$
$$= रु १० + २\sqrt{६} + २\sqrt{१०} + २\sqrt{१५}$$
$$रु १० + \sqrt{२४}\sqrt{४०} + \sqrt{६०}$$

इसी को यों लिखिये रु १० क २४ क ४० क ६०। वर्ग करते समय द्विगुणित अन्तिम अंक से ही आगे वाले अङ्क को गुणना चाहिए किन्तु करणी वर्ग में द्विगुणान्तिमगुणित अग्रिम अङ्क चतुर्गुणान्त्यगुणित हो जाते जैसा कि पहले भी दिखलाया गया है—

$२\sqrt{६} = \sqrt{२४}$, $२\sqrt{१०} = \sqrt{४०}$, $२\sqrt{१५} = \sqrt{६०}$ आदि।

$$एवम् (क ३ क २)^२ = (\sqrt{३}+\sqrt{२})^२ = रु ३ + २\sqrt{३}\times\sqrt{२}$$
$$+ रु २$$
$$योग = रु ५ + \sqrt{२४}$$

$$अत: (\sqrt{३}+\sqrt{२})^२ = ५ + \sqrt{२४}$$

$$एवमेव (\sqrt{६}+\sqrt{५}+\sqrt{२}+\sqrt{३})^२ =$$
$$६ + २\sqrt{६}\times\sqrt{५} + २\sqrt{६}\times\sqrt{२} + २\sqrt{६}\times\sqrt{३}$$
$$+ ५ + २\sqrt{५}\times\sqrt{२} + २\sqrt{५}\times\sqrt{३}।$$
$$+ २ + २\sqrt{२}\times\sqrt{३}$$
$$+ ३$$
$$१६ + \sqrt{१२०} + \sqrt{४८} + \sqrt{७२} + \sqrt{४०} + \sqrt{६०} + \sqrt{२४}$$

या रु १६ क १२० क ४८ क ७२ क ४० क ६० क २४
    = वर्ग ।

चौथे उदाहरण में क १८ क ८ क २ का वर्ग करना है। यहाँ क १८ क ८ क २ $= \sqrt{\text{१८}} + \sqrt{\text{८}} + \sqrt{\text{२}} = \sqrt{\text{१८}} + \sqrt{\text{१८}} = \sqrt{\text{७२}}$ ।

इसका वर्ग $= \sqrt{\text{७२}} \times \sqrt{\text{७२}} = \sqrt{\text{५१८४}}$
$=$ रु ७२ ।

●

करणीमूले सूत्रं वृत्तद्वयम् :—

वर्गे करण्या यदि वा करण्योस्तुल्यानि रूपाण्यथवा बहूनाम् ।
विशोधयेद्रूपकृतेः पदेन शेषस्य रूपाणि युतोनितानि ॥२१॥
पृथक् तदर्धे करणीद्वयं स्यान्मूलेऽथ बह्वी करणी तयोर्या ।
रूपाणि तान्येव कृतानि भूयः शेषाः करण्यो यदि सन्ति वर्गे ॥२२॥

सुधा—करणी वर्गमूल के आनयन में रूप के वर्ग में से एक, दो या बहुत करणियों का वर्ग घटाकर शेष के मूल के साथ रूप को युतोनित करें। फिर दोनों का आधा करें तो दो करणियाँ होंगी। वर्गराशि में यदि और भी करणी अवशिष्ट रही हो तो पूर्वानीत दो करणियों में से बड़ी करणी को ही रूप मानकर पूर्वत् क्रिया करें ॥ २१-२२ ॥

यहाँ रूपवर्ग में करणियों को घटाते समय छोटी करणी से ही प्रारम्भ कर घटाना चाहिए।

वासना-परमगुरुभिः श्रीमत्सुधाकरद्विवेदिभिर्निम्नाङ्किता वासना प्रत्यपादि। सा चैवम् :—$\text{अ} \pm \sqrt{\text{क}} = \text{ग} \pm \sqrt{\text{घ}}$ इत्येकं समीकरणम्। यत्र अ, ग, इति संख्याद्वयं सम्भवं, क, घ, इति संख्याद्वयं चावर्गाङ्करूपं, तदात्र अ=ग, इति क=घ, इति भविष्यति। यद्येवं न तर्हि कल्पते अ=ग+इ।

$\therefore$ $\text{ग}+\text{इ} \pm \sqrt{\text{क}} = \text{ग} \pm \sqrt{\text{घ}}$ । समशोधनेन $\text{इ} \pm \sqrt{\text{क}} = \pm \sqrt{\text{घ}}$ । वर्गकरणेन $\text{इ}^2 \pm \text{२इ}\sqrt{\text{क}} + \text{क} = \text{घ}$ समशोधनादिना $\dfrac{\text{इ}^2 \backsim (\text{घ} \backsim \text{क})}{\text{२ इ}} = \sqrt{\text{क}}$ ।

अत्र 'क' मूलं भिन्नं वाऽभिन्नं सम्भवसंख्यासमं जातं, परन्तु क मानमवर्गात्मकं पूर्वकल्पितंमवर्गाङ्कस्य मूलं न सावयवं, न निरवयवं च, भिन्न वर्गे भिन्नत्वान्निरवयवाङ्कवर्गे वर्गाङ्कत्वादतः पूर्वकल्पना न तथ्या। ततोऽवश्यं अ=ग, तेन क=घ इति सिध्यति।

अथ कल्प्यते $\text{अ} + \sqrt{\text{क}}$; अस्य मूलम् $= \sqrt{\text{गा}} + \sqrt{\text{का}}$ ततो वर्गेण $\text{या} + \text{का} + \sqrt{\text{४ याका}} = \text{अ} + \sqrt{\text{क}}$। पूर्वसमीकरणयुक्त्या $\text{या} + \text{का} = \text{अ}$ $\sqrt{\text{४ या क}} = \sqrt{\text{क}}$। ततो वर्गेण $\text{या}^{2} + \text{२ या का} + \text{का}^{2} = \text{अ}^{2}$। अतः $\text{४ या का} = \text{क}$ पक्षयोः शोधनेन $\text{या}^{2} - \text{२ या का} + \text{का}^{2} = \text{अ}^{2} - \text{क}$। पदेन $\text{या} - \text{का} = \sqrt{\text{अ}^{2} - \text{क}}$। ततः सङ्क्रमणेन या, का, अनयोर्मानं सुगम मित्युपपन्न मूलानयनम्।

अथाऽन्यथा वा वासनोच्यते—

यतः $(\sqrt{\text{य}} + \sqrt{\text{र}})^{2}$

$= \text{य} + \text{र} + \sqrt{\text{४ य र}}$

एवम् $(\sqrt{\text{य}} + \sqrt{\text{र}} + \sqrt{\text{ल}})^{2} = \text{य} + \text{र} + \text{ल} + \text{२}\sqrt{\text{य}}\times\sqrt{\text{र}} + \text{२}\sqrt{\text{य}}\times\sqrt{\text{ल}} + \text{२}\sqrt{\text{र}}\times\sqrt{\text{ल}} = \text{य} + \text{र} + \text{ल} + \sqrt{\text{४ य र}} + \sqrt{\text{४ य ल}} + \sqrt{\text{४ र ल}}$ एवं चतुः पञ्चादि करणी वर्गेष्वपि।

अतोऽत्र करणीवर्गे मूलकरण्यो र्मूलकरणीनां वा योगसमं रूपं, तयो स्तासां वा चतुर्घाततुल्याः करण्यश्च भवन्तीति स्फुटमवलोक्यते।

अथ च चतुर्गुणस्य घातस्य युतिवर्गस्य चान्तर मित्यादिना करणीयोगतुल्यरूपवर्गे करण्योस्तुल्यानि रूपाण्यपास्य शेषं करणीद्वयान्तरवर्गः। तन्मूलं च करणीद्वयान्तरम्। करणीद्वययोगतुल्यं रूपं ज्ञातमेवास्तीति संक्रमणेन करणीद्वयमवगतं भवेत्। अतो यत्र वर्गे सरूपैका करणी तत्रोक्तरीत्याऽगते करण्यावेव मूलकरण्यौ। यत्र च सरूपा वह्यः करण्यः स्युस्तत्रोक्तरीत्याऽऽगतयोः करण्योरेका मूलगता करणी, शेषा च मूलगतावशिष्टकरणी योगरूपा तदागत करण्योर्महती च। अतोऽवशिष्ट मूलगतकरणीज्ञानाय तामेव महतीं करणीं रूपं प्रकल्प्य पूर्ववत् कृतायां क्रियायामवशिष्टकरणीज्ञानं सुगमम्। पूर्वं करणीमानाच्छेषकरणीयोगेऽल्पे मूलगतावशिष्ट करणी-बोधाय लघ्वीमेव करणीं रूपं प्रकल्प्य क्रिया कार्या। इत एवाचार्य चरणैः कूचिदल्पयेन्यपि प्रत्ययादि।

उदाहरणम्—

द्वितीयवर्गस्य मूलार्थं न्यासः—रू ५ क २४। रूपकृतेः २५ करणी-तुल्यानि रूपाणि २४ अपास्य शेषम् १। ऊनाधिक रूपाणामर्धे जाते मूलकरण्यौ क २ क ३।

प्रथमवर्गस्य

न्यासः—रू १० क २४ क ४० क ६० । रूपकृतेः १०० चतुर्विंशति चत्वारिंशत्करण्योस्तुल्यानि रूपाण्यपास्य शेषम् ३६ । अस्य मूलेनोनाधिकरूपाणामर्धे जाते २।८ तत्रापीयं २ मूलकरणी । द्वितीयां रूपाण्येव प्रकल्प्य पुनः शेषकरणीभिः स एव विधिः कार्यस्तत्रेयं रूपकृतिः ६४ । अस्याः षष्टि रूपाण्यपास्य शेषम् ४ । अस्य मूलम् २ । अनेनोनाधिकरूपाणामर्धे ३।५ जाते मूलकरण्यौ क ३ क ५ । मूलकरणीनां यथाक्रमं न्यासः क २ क ३ क ५ ।

तृतीयवर्गस्य

न्यासः—क १६ क १२० क ७२ क ६० क ४८ क ४० क २४ रूपकृतेः २५६ । करणीत्रितयास्यास्य क ४८ क ४० क २४ तुल्यानि रूपाण्यपास्योक्तवज्जाते खण्डे ।१४ । महती रूपाणीत्यस्याः १४ कृतिः १९६ । अस्य करणीद्वयस्यास्य क ७२ क १२० तुल्यरूपाण्यपास्योक्तवज्जाते खण्डे ६।८ । पुनारूपकृतेः ६४ । षष्टिरूपाण्यपास्योक्तवत् खण्डे ३।५ । एवं मूलकरणीनां यथाक्रमं न्यासः—क ६ क ५ क ३ क २ ।

चतुर्थस्य

न्यासः—रू ७२ । इयमेव लब्धा मूलकरणी क ७२ । पूर्वं खण्डत्रयमासीदिति "वर्गेण योगकरणी विहृता विशुद्धयेदिति षट्त्रिंशता विहृता शुद्धयतीति षट्त्रिंशतो मूलं ६ । एतस्य खण्डानां १।२।३ । कृतयः १।४।९ । पूर्वलब्ध्याऽनया २ क्षुण्णाः २।८।१८ । एवं पृथक् करण्यो जाताः क २ क ८ क १८ ।

सुधा—द्वितीयोदाहरणस्य रु ५ क २४ के मूलानयनार्थ "वर्गे करण्या यदि वा करण्यो" रूपाणीत्यादि सूत्रानुसार $(५)^2 - २४ = १$ । $\sqrt{१} = १$ ।

$\frac{५+१}{२} = ३$ । $\frac{५-१}{२} = २$ । अतः क २ क ३ ये ही मूलकरणीद्वय हुए ।

उदा० (१) रु १० क २४ क ४० क ६० इसका मूल ज्ञातव्य है । पूर्वसूत्र "वर्गे करण्या यदि वा करण्योः" इत्यादि सूत्रानुसार $(१०)^2 = १००$ ।

$१०० - (२४ + ४०) = ३६$ । $\sqrt{३६} = ६$ । $\frac{१०+६}{२} = ८$ । एवम्

$\frac{१० - ६}{२}$ = २ इन आगत क ८। क२ में ८ को रूप मानकर पुनः पूर्ववत् क्रिया की गई—$(८)^२ - ६० = ६४ - ६० = ४$। $\sqrt{४} = २$। $\frac{८+२}{२} = ५$।

$\frac{८-२}{२} = ३$।

इस तरह क २ क ३ क ५ ये मूल करणियाँ हुई। यह उदाहरण रूपवर्ग में दो करणियों के योग घटाकर क्रिया करने का हुआ।

उदा० (३) रु १६ क १२० क ७२ क ६० क ४८ क ४० क २४ इस मूलानयन के उदाहरण में रूप वर्ग में से तीन करणियों के योग को घटा कर क्रिया करनी है। अतः पूर्वसूत्रानुसार $(१६)^२ - (४८+४०+२४) = २५६ - ११२ = १४४$। $\sqrt{१४४} = १२$। $\frac{१६+१२}{२} = १४$ एवं $\frac{१६-१२}{२} = २$ = मूलकरणी। पुनः १४ को रूप मान कर $(१४)^२ = १९६$। $१९६ - (७२+१२०) = १९६ - १९२ = ४$ $\sqrt{४} = २$। $\frac{१४+२}{२} = ८$। $\frac{१४-२}{२} = ६$ =मूलकरणी। पुनः ८ को रूप मानकर $(८)^२ - ६० = ६४ - ६० = ४$। $\sqrt{४} = २$। $\frac{८+२}{२} = ५$। $\frac{८-२}{२} = ३$

अतः मूल करणियाँ = क २ क ३ क ५ क ६।

इस उदाहरण में प्रथमतः तीन करणियों का योग घटा कर क्रिया की गई है। आचार्य ने खुद आगे चल कर रूप वर्ग में कितनी करणियों का योग किस उदाहरण में घटाना चाहिए इसका स्पष्टीकरण कर दिया है।

उदा० (४) रू ७२ का मूल लाना है। यहाँ करणी नही है। अतः पूर्व-सूत्रानुसार $(७२)^२ = ५१८४$। $\sqrt{५१८४ - ०} = ७२$। $\frac{७२+७२}{२} = \frac{१४४}{२}$ = ७२। $\frac{७२-७२}{२} = ०$ अतः यहाँ मूलकरणी ७२ही सिद्ध हुई जो योग करणी है। अतः 'वर्गेण योगकरणी विहृता विशुद्धयेत्' इत्यादि सूत्रानुसार ७२ में वर्गात्मक ३६ से भाग देने पर विशुद्ध = २ लब्धि हो जाती, अतः $\sqrt{३६} = ६$। इसके ईप्सित खण्ड १।२।३ तीन किये। इन खण्डों का वर्ग = १।४।९ इन्हें पूर्वलब्धि २ से गुणा किया तो २।८।१८। ये ही तीनों करणियाँ क २ क ८ क १८ मूलकरणी हैं।

अथ वर्गगतर्णकरण्या मूलानयनार्थं सूत्रं वृत्तम् :—

ऋणात्मिका चेत्करणी कृतौ स्या-
द्धनात्मिकां तां परिकल्प्य साध्ये ।
मूले करण्यावनयोः अभीष्टा:-
क्षयात्मिकैका सुधियाऽवगम्या ।। १९ ।।

सुधा—करणी वर्ग में यदि ऋणात्मक करणी हो तो उसे धनात्मक मान कर पूर्वसूत्रानुसार करणी-मूलानयन करें। इस तरह आगत करणी द्वय में से किसी एक को ऋणात्मक समझें। वर्ग में एकाधिक करणी के क्षयत्व में यथा सम्भव एकाधिक करणीको ऋणात्मक समझें।

वासना:-- $(\sqrt{य}+\sqrt{र})^2 = य + \sqrt{४यर} + र.$

$(\sqrt{य} - \sqrt{र})^2 = य - \sqrt{४यर} + र.$

इत्युभयत्रापि रूपकरण्योर्माने समाने, केवलं करणीचिह्ने व्यत्यासः, प्रथमवर्गे करणी धनात्मिका द्वितीये तु ऋणात्मिका। अतोऽत्र ऋणात्मिकामिमां धनात्मिकां प्रकल्प्य साधितमूलकरण्यो र्यथायोग्यामेकां क्षयात्मिकामवगच्छेदिति कथने नास्ति काचन क्षतिः; आनीतमूलकरणीवर्गस्योद्दिष्टवर्गसमत्वात्। अत उपपन्नं सर्वम्।

उदाहरणम् :—

त्रिसप्तमित्योर्वद मे करण्यो-
र्विश्लेषवर्गं कृतितः पदं च ।। १५ ।।

न्यासः—क ३° क ७। यद्वा क ३ क ७°।

अनयोर्वर्गः सम एव रु १० क ८४°

अत्र वर्गे ऋणकरण्या धनत्वं प्रकल्प्य प्राग्वल्लब्धकरण्योरेकाऽभीष्टागतास्यादितिजातम् क ३° क७ वा क ३ क७°।

सुधा :--करणी तीन करणी सात के अन्तर का वर्ग क्या होगा? और वर्ग से वर्गमूल कैसे आयगा, यह कहो ।। १५ ।।

(क ३° क७)^2 = रु १० क ८४°
वा
(क ३ क७°)^2 = रु१० क ८४°
} इन वर्गों के मूलानयन में ऋणात्मक ८४ को धनात्मक मानकर

$(१०)^2 - ८४ = १०० - ८४ = १६ । \sqrt{१६} = ४$

$\frac{१० + ४}{२}$ = ७ । $\frac{१० - ४}{२}$ = ३ । अतः क ३ क ७

ये मूल करणियाँ हुई जिनमें एक को क्षयात्मक मानने से मूलकरणी = क ३° क ७ वा क ३ क ७° ।

उदाहरणम् :—

> द्विकत्रिपञ्चप्रमिताः करण्यः
> स्वस्वर्णगा व्यस्तधनर्णगा वा ।
> तासां कृतिं ब्रूहि कृतेः पदं च
> चेत् षड्विधं वेत्सि सखे करण्याः ॥ १९ ॥

न्यास :—क२ क३ क५° । वा क २° क३° क ५ ।

आसां वर्गः सम एव जातः रू १० क २४ क ४०° क ६०° ।

अत्रऋणात्मककरण्योस्तुल्यानि धनरूपाणि १००, अपास्य शेषस्य मूलम् ० । अनेनोनाधिकरूपाणामर्धे क५ । क५ अत्रैका ऋणम् क ५° अन्या रूपाणीति ।

न्यासः रू ५ क २४ पूर्ववज्जाते करण्यौ धन एव क ३ क२ । यथाक्रमं—

न्यासः क२ क ३ क ५° ।

अथवाऽनयोः क २४, क ६० तुल्यानि धनरूपाणि ८४ । रूपकृतेः १०० । अपास्योक्तवज्जाते मूलकरण्यौ क ७ क ३ अनयो र्महती ऋणं क ७° । तान्येव रूपाणि प्रकल्प्य रू ७° क ४० । अतः प्राग्वत् करण्यौ क ५ क २ । अनयो रपि महती ऋणमिति यथाक्रमं न्यासः क ३ क२ क ५°)

अथ द्वितीयोराहृणे :—

प्राग्वत् प्रथमपक्षे मूलकरण्यौ क ५ क५ । अनयोरेका ऋणं क ५° तान्येव रूपाणीति ऋणोत्पन्ने करणीखण्डे ऋणे एवेति यथाक्रमं न्यास : क ३° क२° क५ ।

द्वितीयपक्षेणापि यथोक्ता एव मूलकरण्यः क २° क ३° क५ । एवं बुद्धिमताऽनुक्तमपि ज्ञायत इति ।

सुधा :—दो, तीन, पाँच करणियाँ जो क्रमशः धन, धन, तथा ऋण हैं अर्थात् क२ + क३ + क५°, अथवा वे ही करणियाँ व्यस्तधनर्णग = ऋण, ऋण, धन, अर्थात् क२° क३° क ५ हैं तो इनका वर्ग तथा वर्गों का वर्गमूल बतलाओ यदि षड्विध करणी जानते हो ।

उदाहरण :

(क २° क ३° क ५)^{२} = रु १० क २४ क ४०° क ६०°

(क २ क ५ रु ५°)^{२} = रू १० क २४ क ४०° क ६०°

दोनों का वर्ग तुल्य ही हुआ ।

वर्गमूल के लिए "वर्गे करण्या यदि वा करण्योः" आदि सूत्र के अनुसार क ४०° तथा ६०° के योग = १००° । इसे ऋणात्मिकाचेदित्यादि सूत्र के अनुसार धनात्मक ही माना गया । पुनः सूत्रानुसार

$(१०)^{२} - १०० = ० । \sqrt{०} = ० । \frac{१० + ०}{२} = \frac{१०}{२} = ५$

एवम् $\frac{१० - ०}{२}$ = ५ । इन दोनों में से एक ५ को ऋणात्मक माना गया अन्यथा वर्ग करने पर ऋणात्मक क ४० एवम् क ६० क होना असम्भव हो जायगा । दूसरे पाँच को रूप मानकर पुनः सूत्रानुसार $(५)^{२} - २४ = २५ - २४ = १ । \sqrt{१} = १ ।$

$\frac{५ + १}{२} = ३, \frac{५ - १}{२} = २$ ये दोनों क २ क ३ धन हीं होगी क्योंकि किसी को ऋण मानने से धनात्मक क २४ वर्ग में नहीं सम्भव है । अतः मूलकरणी = क २ क ३ क ५° । अथवा—रूप के वर्ग में से क २४ क ६० तुल्यधनरूप घटाने से $(१०)^{२} - (२४ + ६०) = १०० - ८४ = १६ । \sqrt{१६} = ४ ।$
$\frac{१० + ४}{२} = ७ । \frac{१० - ४}{२}$ इन दोनों करणियों में बड़ी करणी ७ को ऋण तथा उसे ही रूप कल्पना कर $(७°)^{२} - ४० = ४९ - ४० = ९ । \sqrt{९} = ३ ।$ इसे सात में जोड़ने, घटाने एवम् आधा करने पर ५ । २ हुए । इनमें ५ को ऋण मानने से मूलकरणी = क २ क ३ क ५° ।

पूर्वोक्त उदाहरण में ५।५ दो करणियाँ आयी थीं जिनमें मूल करणी ऋण पाँच, और रूप ५ धन करणी मान कर क्रिया की गई । अब मूल करणी को ही ५ धन और ऋण ५ को रूप मानकर, रूप वर्ग २५ में से शेष करणी २४ क घटाने ख शेष = १ । $\sqrt{१} = १$ । रूप में इसे जोड़ने तथा घटाने और दोनों को अर्धित करने पर २.३ करणियाँ आईं । किन्तु इन दोनों को ऋण ही मानना पड़ेगा क्योंकि एक को ऋण मानने से वर्ग करने पर करणी २४ धनात्मक नहीं होगी, दोनों को धन मानने पर क ४० क ६० ऋण नहीं होगी अतः मूल करणी = क ५ क ३° क २° ।

पूर्वैर्नायमर्थो विस्तीर्योक्तो बालबोधार्थं तु मयोच्यते:—

एकादिसङ्कलितमितकरणीखण्डानि वर्गराशौस्युः ।
वर्गे करणीत्रितये करणीद्वितयस्य तुल्यरूपाणि ।।२०।।
करणीषट्के तिसृणां दशसु चतसृणां तिथिषु च पञ्चानाम्
रूपकृतेः प्रोह्य पदं ग्राह्यं चेदन्यथा न सत्क्वापि ।।२१।।
उत्पत्स्यमानयैवं मूलकरण्याऽल्पया चतुर्गुणाया ।
यासामपवर्त्तः स्याद्रूपकृतेस्ता विशोध्याः स्युः ।।२२।।
अपवर्त्तादपि लब्धा मूलकरण्यो भवन्ति ताश्चापि ।
शेषविधिना न यदि ता भवन्ति मूलं तदा तदसत् ।।२३।।

करणीवर्गराशौ रूपैरवश्यं भवितव्यम् । एककरण्या वर्गे रूपाण्येव, द्वयोः सरूपैका करणी तिसृणां तिस्रः, चतसृणां षट् । पञ्चानां दश । षण्णां पञ्चदश इत्यादि ।

अतो द्व्यादीनां करणीनां वर्णेषु एकादिसंकलितमितानि करणीनां खण्डानि रूपाणि च यथाक्रमं स्युः । अथ यदि उदाहरणे तावन्ति न भवन्ति तदाऽसौ योगकरणी विश्लेष्या वा भवतीति कृत्वा मूलं ग्राह्य मित्यर्थः । करणीत्रितये करणीद्वितयस्य तुल्यरूपाणीति स्पष्टार्थम् ।

सुधाः—करणी वर्ग में एकादि संकलित तुल्य करणी खण्ड होते हैं । अतः जिस करणी वर्ग में तीन करणी हों, मूलानयन के समय रूपवर्ग में से दो करणियों का योग घटाकर शेष का मूल ग्रहण करें । इस तरह छे करणी खण्ड वाले करणीवर्ग में तीन करणियों का योग, दश करणी वाले वर्ग में चार करणियों का योग, पन्द्रह करणी वाले वर्ग में पांच करणियों का योग, रूप वर्ग में से घटाकर पद ग्रहण कर आगे की क्रिया करें । अन्यथा मूलानयन शुद्ध नहीं होगा ।

इस प्रकार आगत दो करणियों में से चतुर्गुणित छोटी करणी से जिन करणियों में अपवर्त्तन हो, उन्ही करणियों को रूप वर्ग में घटाना चाहिए । चतुर्गुणित छोटी करणी से भाग देने पर जो लब्धियाँ आवें वे ही शेष विधि से अर्थात् आगत दो करणियों में बड़ी को रूप बनाकर उसके वर्ग में से शेष करणी को घटा कर, शेष मूल को रूप में जोड़ने घटाने तथा आधे करने से यदि आ जांय तो मूल शुद्ध अन्यथा अशुद्ध समझना चाहिए । कहीं कहीं चतुर्गुणित बड़ी करणी से जिन करणियों में अपवर्त्तन हो वे ही विशोध्य होती हैं । करणी वर्ग में रूप का होना अनिवार्य है ।

एक करणी के वर्ग में रूप मात्र. दो करणियों के वर्ग में सरूप एक करणी, तीन करणियों के वर्ग में सरूप तीन करणियां, चार करणियों के वर्ग में सरूप छे करणियाँ, पाँच करणियों के वर्ग में सरूप दश करणियाँ और छे करणियों के वर्ग में पन्द्रह करणियाँ होगी।

वासना-- $\sqrt{अ}+\sqrt{क}+\sqrt{ग}+\sqrt{य}$ एतन्मितस्य करणी संकुलस्य वर्गः

$$=अ+\sqrt{४अ क}+\sqrt{४ अ ग}+\sqrt{४ अ य}+क+\sqrt{४क ग}+\sqrt{४ क य}$$
$$+ग+\sqrt{४ग य}$$

एवमुपगतवर्गराशौ प्रथमतः प्रथमकरणीवर्गः ततश्चतुर्घ्नप्रथमकरणी-हता द्वितीयादिकरण्यः, ततो द्वितीय करणीवर्ग स्ततश्च चतुर्घ्नद्वितीयकरणीहता द्व्यूनकरणीसंख्यकाः करण्यः ततश्च तृतीय करणीवर्गः, ततश्च चतुर्घ्नतृतीय करणीहृतास्त्र्यूनकरणीसंख्यकाः करण्यः ततश्च चतुर्थकरणीवर्गश्चेत्यवलोक्यते।

एवमत्र वर्गराशौ करणीसंख्या--

अनुपदमुल्लिखितकरणीसंकुलस्य वर्गविलोकनेनेति अवगम्यते यत्प्रथमपंक्तौ रूपोनपदतुल्याः, द्वितीयायां च तस्यां द्व्यूनपदतुल्याः तृतीयपंक्तौ च त्र्यून पदतुल्याः करण्यो भवन्ति, अतस्तासां योगः $=(प-१)+(प-२)+(प-३)+(प-४\cdots$ इत्यादि)

अत्र रूपोनपदस्थानस्थितानामाद्यखण्डानां संकलनम् $= प\ (प-१)$ द्वितीयखण्डानामृणात्मकानां योगो रूपोनपदस्य सङ्कलितेन समः तेन करणी मानानि $प(प-१)-\frac{प\ (प-१)}{२}=$

$$\frac{२प\ (प-१)-प\ (प-१)}{२}=\frac{प\ (प-१)}{२}=$$

$\frac{(प-१+१)\ (प-१)}{२}$ इदं "सैक पदघ्नपदार्धमथैकाद्यङ्कयुतिः किल सङ्कलिताख्ये" ति नियमात् $प-१$ मिते पदे सङ्कलितसमानम्। अतो द्व्यादि करणीनां वर्गे एकादिसङ्कलितमितकरणीखण्डानि भवन्तीति साधूपपन्नम्ः।

एक करणीवर्गे रूपाण्येव, द्वयोः करण्योर्वर्गे एकाकरणी, तिसृणां वर्गे तिस्रः करण्यः, चतसृणां वर्गे षट्करण्यः, पञ्चानां करणीनां वर्गे दशकरण्यो भवन्तीति प्रत्यक्षतोऽवलोकनयोग्यम्। अतो वर्गराशौ यद्येकैव करणी तदा रूपकृतेः सैव विशोध्या। यदि च वर्गराशौ करणीत्रयं तदा मूलेऽपि करणीत्रयेण भवितव्यमिति प्रथम मेकां करणीं विहाय करणीद्वययोगसमं रूपकृतेर्विशोध्यम्। करणीषट्-

कवति वर्गराशौ मूले करणीचतुष्टयेन भवितव्यमिति एकामपहाय त्रयाणां योग-सम रूपवर्गतो विशोध्यम् । दशकवति वर्गे तन्मूले करणीपञ्चकमतस्तत्र रूपवर्गात् चतुः करणीयोगसमं रूपं विशोध्यम् । एवमत्र वर्गे करणीत्रितये करणीद्वितीयस्य शुध्यरूपाणी" त्यादि न सत्वक्वापीत्यन्तमुपपन्नम् ।

उत्पत्स्यमानयेति :—

यथाऽत्र कल्प्यते $\sqrt{य}$, $\sqrt{र}+\sqrt{ल}$, इतिखण्डद्वयात्मकस्य राशेर्वर्गे क्रियमाणे खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नीत्यादिना वर्गः

$$= (\sqrt{य})^{२} + २\sqrt{य} \times (\sqrt{र}+\sqrt{ल}) + (\sqrt{र}+\sqrt{ल})^{२}$$
$$= य + २\sqrt{य} \times \sqrt{र} + २\sqrt{य} \times \sqrt{ल} + (\sqrt{र}+\sqrt{ल})^{२}$$
$$= य + \sqrt{४ य र} + \sqrt{४ य ल} + (\sqrt{र}+\sqrt{ल})^{२}$$

अत्र प्रथम खण्डस्य $\sqrt{य}$ मितस्य शेषकरणीद्वययोगरूपद्वितीयखण्डतोऽल्पत्वे वर्गराशेर्मूलग्रहणावसरेऽल्पया चतुर्गुणया यासामपवर्त्तः स्यात्ताएव रूप कृतेर्विशोध्या इति ग्रन्थकारोक्तिः सर्वथैव सङ्गता । यतोऽ$\sqrt{४ य}$ नेन $\sqrt{४ य र}$, $\sqrt{४ य ल}$ अनयो रपवर्त्तनं भवति

प्रथमखण्डतो द्वितीयखण्डस्याल्पत्वस्थितौ क्वचिन्महत्यापीति आचार्य-प्रवरोक्तिः "अल्पयाचतुर्गुणयेति" नियमं न सार्वत्रिकमिति ज्ञपयति । एवमागता अपि मूलकरण्यो यदि शेषविधिना "विशोधयेद्रूपकृतेः पदेने" त्यादिना नागच्छेयुः स्तदा तदानीतं मूलमसदेवेति विज्ञेयम् । एवमत्र मूलानयनसम्बद्धमखिलं पद्यमन-वद्यमिति सूपपन्नम् ।

उदाहरणम्

वर्गे यत्र करण्यो दन्तैः सिद्धैर्गजैर्मिता विद्वन् ।
रूपैर्दशभिरुपेताः किं मूलं ब्रूहि तस्य स्यात् ॥१७॥

न्यासः । रू १० क ३२ क २४ क ८ ।

अत्र वर्गे करणीत्रितये करणीद्वितयस्यैव तुल्यानि रूपाणि प्रथमं रूपकृतेरपास्य मूलं ग्राह्यं पुनरेकस्याः, एवं क्रियमाणेऽत्र पदं नास्तीति अतोऽस्य करणीगतमूलाभावः । अथाऽनियमेन सर्वकरणी-तुल्यानि रूपाणि अपास्य मूलमानीयते तदिदम् क २ क ८ समागच्छति इदमसद्यतोऽस्य वर्गोऽयम् रू १८ ।

अथ वा दन्तगजमितयो र्योगं कृत्वा, रू १० क ७२ क २४ आनीयते तदिदमप्यसत् रू २ क ६ ।

सुधाः—जिस करणीवर्ग में रूप दश से सहित ३२, २४, ८ करणियाँ हैं उसका वर्गमूल क्या होगा ? हे विज्ञ ! यह बतलाओ । अर्थात् रु १० क ३२ क २४ क ८ का वर्गमूल क्या है ?

चूँकि इस वर्ग में रूप के अतिरिक्त तीन करणियाँ हैं, अतः "करणीत्रितये करणीद्वितयस्यैव तुल्यानि रूपाणि रूपकृतेः विशोध्यानि" इस पूर्वोक्त नियमानुसार रूपवर्ग $(१०)^२ = १००$ में क २४, क ८ के योग तुल्य रूप घटाने से १०० − (२४+८) = १०० − ३२ = ६८ = शेष। इस शेष का मूल नहीं होता अतः शेषस्य पदेनेत्यादि नियम के नहीं लागू होने के कारण मूलाभाव सिद्ध हुआ।

नियम की उपेक्षा कर रूपवर्ग १०० में सभी करणियों के योग घटाने से १०० − (३२ + २४ + ८) = १०० − ६४ = ३६ = शेष। आगे की क्रिया करने से—$\sqrt{३६}$ = ६। $\frac{१० + ६}{२}$ = ८। $\frac{१० - ६}{२}$ = २। अतः मूल करणी = क २ क ८ यह भी असत् है क्योंकि (क २ क ८) का वर्ग = रू १८।

अथवा—करणी ८ करणी ३२ का योग = क ७२ अतः रु १० क ७२ क २४ के वर्गमूल के लिए रूपवर्ग १०० में करणीद्वय योग ७२ + १४ = ९६ को घटाने पर शेष = ४। $\sqrt{४}$ = २। $\frac{२ + १०}{२}$ = ६, $\frac{१० - २}{२} = \frac{८}{२}$ = ४ अतः मूलकरणी = क ४ क ६ यह भी असत् है क्योंकि इसका वर्ग रु १० क ९६ है। अतः यह उदाहरण ही मूलानयन के लिए अनुपयुक्त है।

उदाहरम्

वर्गे यत्र करण्यस्तिथिविश्वहुताशनैश्चतुर्गुणितैः।
तुल्या दशरूपाढ्याः किं मूलं ब्रूहि तस्य स्यात् ॥१८॥

न्यासः—रू १० क ६० क ५२ क १२।

अत्र किल वर्गे करणीत्रितयमस्तीति करणीद्वयस्य द्विपञ्चाशद् द्वादशमितस्य क ५२ क १२ तुल्यरूपाण्यपास्य ये मूलकरण्यावुत्पद्येते क ८ क २। तयोरल्पययाऽनया २ चतुर्गुणया द्विपञ्चाशद् द्वादश मितयोरपवर्त्तो न स्यादतस्ते न शोध्ये यत उक्तमुत्पत्स्यमानयैवमित्यादि। अत्राल्पयेत्युपलक्षणं तेन क्वचिन्महत्याऽपि तदा मूल करणीं रूपाणि प्रकल्प्यान्ये करणीखण्डे साध्ये सा महती प्रकल्प्येत्यर्थः। तथा कृते मूलम् क २ क ३ क ५। इदमप्यसद्यतोऽस्य वर्गोऽयम्—रू १० क २४ क ४० क ६०।

सुधा—जिस वर्ग में दश रूप सहित चतुर्गुणित—पन्द्रह, तेरह तथा तीन करणियाँ हैं (अर्थात् दश रूप युक्त क ६० क ५२ क १२ ये करणियाँ है) उस वर्गात्मक राशि का मूल क्या होगा यह कहो।

यहाँ रु १० क ६० क ५२ क १२ यही वर्गात्मक राशि है जिसका मूल निकालना है।

"वर्गे करणीत्रितये करणीद्वितयस्य तुल्य रूपाणि" के अनुसार रूपवर्ग $(१०)^२$ में क ५२ क १२ के योग तुल्य रूप घटाने पर $१०० - (५२ + १२) = १०० - ६४ = ३६$। $\sqrt{३६} = ६$

$\frac{१० + ६}{२} = ८$। $\frac{१० - ६}{२} = २$ अतः लब्ध करणी = क ८ क २। 'उत्पत्स्यमानयाऽल्पया चतुर्गुणया" के अनुसार चतुर्गुणित क २ = क ८ से चूँकि क ५२ तथा क १२ में भाग नहीं लगता अतः यह उदाहरण अशुद्ध है।

पूर्वानीत क २ क ८ में बड़ी करणी ८ को रूप मानकर उसके वर्ग ६४ में से क ६० को घटाकर शेष ४ का मूल = २। $\frac{८+२}{२} = ५$, $\frac{८-२}{२}$ ३ अतः मूलकरणी = क २ क ३ क ५ किन्तु इसका वर्ग चूंकि रु १० क २४ क ४० क ६० है अतः आनीत मूल अशुद्ध है।

उदाहरणम्

अष्टौ षट्पञ्चाशत् षष्टिः करणीत्रयं कृतो यत्र।
रूपैर्दशभिरूपेतं किं मूलं ब्रूहि तस्य स्यात्॥१९॥

न्यास :—रु १० क ८ क ५६ क ६०।

अत्राद्यखण्डद्वये क ८ क ५६। शोधिते उत्पन्नयाऽल्पया चतुर्गुणया ८ तयोः खण्डयो रपवर्त्तनलब्धे खण्डे १।७ परं शेषविधिना मूलकरण्यौ नोत्पद्येते अतस्ते खण्डे न शोध्ये अन्यथा तु शोधने कृते मूलं नायातीत्यतस्तदसत्।

सुधा—जिस करणी के वर्ग में दश रूप तथा करणी आठ, करणी छप्पन, एवं करणी साठ, ये तीन करणियाँ हैं उसका वर्गमूल क्या होगा?

जैसे वर्गराशि = रू १० क ८ क ५६ क ६० है तो करणीत्रितये करणी द्वितयस्येत्यादि के अनुसार वर्गमूल लाने के लिए $(१०)^२ - (५६+८) = १०० - ६४ = ३६$। $\sqrt{३६} = ६$। $\frac{१०+६}{२} = ८$। $\frac{१० - ६}{२} = २$, पुनः

८ को रूप मानकर $(८)^२ - ६० = ६४ - ६० = ४$। $\sqrt{४} = २$। $\frac{८+२}{२} = ५$

एवम् $\frac{८ - २}{२} = ३$। अतः मूलकरणी = क २ क ३ क ५ परन्तु यह आनीत

वर्गमूल अशुद्ध है क्योंकि "उत्पत्स्यमानयाऽल्पया चतुर्गुणया" के अनुसार क २× ४ = क ८। किन्तु क ८ से क ८ क ५६ में भाग लेने से १।७ लब्धियाँ आती हैं और शेषविधि से क ५ क ३ आती हैं। अतः रूपवर्ग में क ८, क ५६ का योग घटाना अनुपयुक्त है। इसीलिए "शेष विधिना यदि न ता भवन्तिमूलं तदा तदसत" इसके अनुसार पूर्वलिखित मूलकरणी अशुद्ध है।

उदाहरणम्

चतुर्गुणाः सूर्यतिथीषुरुद्र--
नागर्त्तवो यत्र कृतौ करण्यः।
सविश्वरूपा वद तत्पदं मे
यद्यस्ति बीजे पटुताभिमानः ॥ २० ॥

न्यासः रू १३ क ४८ क ६० क २० क ४४ क ३२ क २४।

अत्र करणीषट्के तिसृणां करणीनां तुल्यानि रूपाणि प्रथमं रूपकृते रपास्य मूलं ग्राह्यं पश्चाद् द्वयो स्तत एकस्याः, एवं कृतेऽत्र मूलाभावः। अथाऽन्यथा तु प्रथममाद्यकरण्यास्तुल्यानि रूपाण्यपास्य पश्चाद् द्वितीयतृतीययोस्ततः शेषाणां रूपकृतेः विशोध्यानीति तन्मूलम् क १ क २ क ५ क ५। तदिदमप्यसत् यतोऽस्य वर्गोऽयम् रु १३ क ४ क ८० क १६०। यैरस्य मूलानयनस्य नियमो न कृतस्तेषामिदं दूषणम्। एवंविधवर्गे करणीनामासन्नमूलकरणेन मूलान्यानीय रूपेषु प्रक्षिप्य मूलं वाच्यम्। अथ महती रूपाणीत्युग्रलक्षणम् यतः क्वचिदल्पापि।

सुधा—जिस वर्ग राशि में १२।१५।५।११।८।३ को चतुर्गुणित करने से जो अंक हों तत्समान करणियाँ और १३ रूप हैं उसका वर्गमूल कहो अगर बीजगणित में पाण्डित्य का अभिमान है ॥२०॥

इस उदाहरण में वर्गराशि = रू १३ क ४८ क ६० क २० क ४४ क ३२ क २४। इसमें ६ करणियाँ हैं। 'करणीषट्के तिसृणाम्' के अनुसार रूपवर्ग में प्रथमतः तीन करणियों का योग तुल्य रूप घटाना है। पुनः दो करणियों का और अन्त में एक करणी तुल्य रूप घटाकर मूल ग्रहण करना चाहिए। परन्तु ऐसा करने से वास्तविक मूल नहीं मिलता। अतः बिना नियम के ही पहले रूप वर्ग में से प्रथम करणी ४८ तुल्य रूप घटाने से १६९ − ४८=१२१। $\sqrt{१२१}$ =११। $\frac{१३+११}{२} = \frac{२४}{२} = १२$। $\frac{१३-११}{२} = १$ अतः आगत लघुकरणी क १ को मूलकरणी और क १२ को रूप मानकर पुनः क्रिया करने से $(१२)^२ - (६० + २०) = १४४ - ८० = ६४ =$ शेष। $\sqrt{६४} = ८$।

$\frac{१२+८}{२}=१०$ । $\frac{१२-८}{२}=२$ । यहाँ भी क २ को मूलकरणी और करणी १० को रूप मान कर पुनः $(१०)^२ - (४४+३२+२४)=१०० - १००=०=$ शे० $\sqrt{०}=०$ । $\frac{१०+०}{२}=५$ । $\frac{१०-०}{२}=५$ अतः मूलकरणी=क १ क २ क ५ क ५ ।

किन्तु यह मूल ठीक नहीं है क्योंकि (क १ क २ क ५ क ५) का वर्ग = रू १३ क ८ क २० क २० क ४० क ४० क १०० इसमें क २०+क २० = क ८० एवम् क ४०+क ४० = क १६० । अतः करणीवर्ग = रू १३ क ८ क ८० क १६० क १०० = रू २३ क ८ क ८० क १६० ∵ $\sqrt{१००}=१०$ ।

करणी मूलानयन के सम्बन्ध में ग्रंथकार ने आगे कहा है—

जिन आचार्यों ने मूलानयन का नियम नहीं बनाया, यह उनका दोष है । इस तरह के वर्गमूलानयन में करणियों का आसन्न मूल लाकर उसे रूप में जोड़ कर मूल जानना चाहिए ।

उदाहरणम्

चत्वारिंशदशीति द्विशतीतुल्याः करण्यश्चेत् ।
सप्तदशरूपयुक्तास्तत्र कृतौ किं पदं ब्रूहि ॥२१॥

न्यासः—रू १७ क ४० क ८० क २०० । शोधिते जाते खंडे क १० क ७ । पुनर्लघ्वीं करणीं रूपाणि, कृत्वा लब्धे करण्यौ क ५ क २ । एवं मूलकरणीनां न्यासः क १० क ५ क २ ।

इति करणी षड्विधम् ।

सुधा—जिस वर्गराशि में चालिस, अस्सी और दो सौ ये तीन करणियाँ तथा रूप १७ हैं उसका वर्गमूल बतलाओ ॥ २१ ॥

वर्गराशि=रू १७ क ४० क ८० क २००

तीन करणी रहने के कारण रूपवर्ग में से दो करणियों (क ८० क २००) के योगतुल्य रूप घटाने से—$(१७)^२ - (८०+२००)=२८९ - २८०=९$ ।

$\sqrt{९}=३$ । $\frac{१७+३}{२}=\frac{२०}{२}=१०$ । $\frac{१७-३}{२}=७$ ।

अतः यहाँ नियमतः क १० क ७ ये दो करणियाँ उपलब्ध हुईं । अब बड़ी करणी को रूप मानकर क्रिया करने से $(७)^२ - ४०=४९ - ४०=९$ ।

$\sqrt{९}=३$ । $\frac{७+३}{२}=५$ । $\frac{७-३}{२}=२$ । अतः मूलकरणी = क १० क ५ क २ ।

आगत मूल करणी क १० क ५ क २ का वर्ग=
रू १० क २०० क ८०
रू ५ क ४०
रू २

रु १७ क २०० क ८० क ४० । इस से स्पष्ट हुआ कि आनीत मूल करणी शुद्ध है किन्तु "मूलेऽथ वह्वी करणी तयोर्या यहाँ वह्वी का उपादान उपलक्षण मात्र है प्रत्युत कहीं कहीं लघ्वी करणी को ही रूप मान कर क्रिया करनी चाहिए, यह भी इस उदाहरण से स्पष्ट हो गया।

विमर्शः—

जिस तरह व्यक्तांक या अव्यक्त वर्णों का सङ्कलन व्यवकलन, गुणन, भजन, वर्ग, वर्गमूल ये खड्विध प्रकियाएँ होती हैं, उसी तरह करणी के भी उपर्युक्त षड्विध विधाएँ बतलाई गई हैं। संकलन एवं व्यवकलन के लिए 'योगं करण्यो-र्महतीं प्रकल्प्य आदि प्रथम, लघ्वा हृतायास्तु पदं महत्या आदि द्वितीय, एवं आदौ करण्यावपवर्त्तनीये आदि तृतीय नियम इस में बतलाए गए हैं। इन तीनों नियमों में प्रथम एवं द्वितीय नियम ग्रन्थकार ने स्वयं बतलाये हैं किन्तु तृतीय नियम किसी दूसरे विद्वान् ने अभिव्यक्त किया है। गुणन भजन की प्रक्रिया अव्यक्त वर्णों की तरह ही है किन्तु करणी भजन के लिए एक दूसरा भी नियम 'धनर्णताव्यत्ययमीप्सिताया श्छेदे करण्या असकृद् विधाय' इत्यादि के द्वारा व्यक्त किया गया है। करणो वर्गानयन के लिए कोई विशेष नियम नहीं है। प्रत्युत 'स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः' इसी का भरपूर प्रयोग हुआ है। करणो वर्ग में पहले प्रथम करणी का वर्ग, फिर द्विगुणित प्रथम करणी से आगे की करणियों का गुणन होता है अतः यहाँ द्विगुणान्त्यनिघ्नाः के स्थान में चतुर्गुणान्त्यनिघ्नाः समझना चाहिए। जैसा कि $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ = रु२ + $2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+3$ = रु ५ + $\sqrt{4\times2\times3}$ = रु ५ + $\sqrt{24}$

करणी वर्गमूल में अव्यक्त वर्गों के वर्गमूल से बिलकुल भिन्नता है। करणी बर्गमूल के लिए "वर्गे करण्या यदि वा करण्योः आदि नियम विशेष रूप से ध्येय है। करणी वर्ग में एकादिसङ्कलितमितकरणी खण्डों का होना, और वर्गमूल के आनयन में करणीत्रितये करणीद्वितयस्य आदि शोधनविधान वस्तुतः इस ग्रन्थ में प्रशंसनीय है।

यद्यपि करणियों का योग, वियोग, गुणन, भजन, वर्ग वर्गमूल ये सभी षड्विध विधाएँ यहाँ ग्रन्थकार ने खुद बतलाई हैं किन्तु छात्रों के बुद्धिवैशद्य के लिए नये सङ्केतों के अनुसार कुछ सोदाहरण प्रश्न दे रहा हूं।

जहाँ भास्करीय बीजगणित'क' से वर्गमूल का संकेत मिलता है वहीं आधुनिक बीजगणित में वर्गमूल का सांकेतिक चिह्न $\sqrt[२]{\ }$, या $\sqrt{\ }$ है। घनमूल का चिह्न=$\sqrt[3]{\ }$, एवम चतुर्घात मूल का=$\sqrt[४]{\ }$, पञ्चघात मूल का=$\sqrt[५]{\ }$, इसीतरह आगे भी। इन सभी संकेतों को पाश्चात्य गणित में Swrd (सर्ड) कहते हैं। भास्कराचार्य द्वारा प्रतिपादित करणी से वर्गमूल मात्र का बोध होता है।

भास्कराचार्य ने जहाँ अपने ग्रन्थ में क२ क३ क४ आदि लिखा है, आधुनिक बीजगणित में उसे $\sqrt{२}$, $\sqrt{३}$, $\sqrt{४}$ यों लिखा जाता है। अतः $(\sqrt{अ})^{२} =$ अ। $\sqrt[3]{अ^{3}}=$अ। $(\sqrt[४]{अ})^{४}=$अ। इसी तरह आगे भी।

करणियाँ द्विविध होती हैं। एक ऐसी करणी जिसका वर्गरूप खण्ड नहीं हो जैसे—$\sqrt{२}$ $\sqrt{३}$ $\sqrt{५}$ $\sqrt{६}$ $\sqrt{७}$ आदि। दूसरी तरह की करणी जो वर्गात्मक, अवर्गात्मक खण्डों का गुणनफल रहती जैसे $\sqrt{८}$, $\sqrt{१२}$, $\sqrt{१८}$, $\sqrt{२०}$, $\sqrt{२४}$, $\sqrt{२७}$, $\sqrt{३२}$ आदि। इन करणियों को यों भी लिखा जा सकता —$\sqrt{८}=\sqrt{४\times२} =२\times\sqrt{२}$, $\sqrt{१२}=\sqrt{४\times३}=२\times\sqrt{३}$। $\sqrt{१८}=\sqrt{९\times२}=३\times\sqrt{२}$। $\sqrt{२०}=\sqrt{४\times५}=२\times\sqrt{५}$। $\sqrt{२४}=\sqrt{४\times६} =२\times\sqrt{६}$। $\sqrt{२८}=\sqrt{४}\times\sqrt{७}=२\times\sqrt{७}$, इनमें द्वितीय खण्ड $\sqrt{२}$, $\sqrt{३}$, $\sqrt{२}$, $\sqrt{५}$, $\sqrt{६}$, $\sqrt{७}$ ये सभी मूलकरण्यङ्क नाम से कहे जाते हैं।

परिभाषा—१

जिन करणियों में मूलकरण्यङ्क समान हो उन्हें सजातीय करणी कहते हैं। जैसे $\sqrt{१८}$, $\sqrt{३२}$, $\sqrt{५०}$, $\sqrt{७२}$ आदि करणियाँ सजातीय हैं क्योंकि इनमें मूलकरण्यङ्क सभी जगह $\sqrt{२}$ के समान ही है।

नियम १

सजातीय करणियों का योगान्तर, अव्यक्ताङ्कों की तरह ही होता है।

प्रश्न : (१) $\sqrt{५०}$, $\sqrt{२००}$ का योगान्तर क्या है :--

$\sqrt{५०}+\sqrt{२००}=\sqrt{२५\times२}+\sqrt{१००\times२}=५\times\sqrt{२}+१०\times\sqrt{२}=१५\times\sqrt{२}=$ योग।

$\sqrt{२००}-\sqrt{५०}=१०\times\sqrt{२}-५\times\sqrt{२}=(१०-५)\times\sqrt{२} =५\times\sqrt{२}=$ अन्तर।

प्रश्न : (२) $\sqrt{२४}+\sqrt{५४}-\sqrt{९६}$ का मान बतलाइए।

$\sqrt{२४}+\sqrt{५४}-\sqrt{९६}=\sqrt{६\times४}+\sqrt{९\times६}-\sqrt{१६\times६} =२\times\sqrt{६}+३\times\sqrt{६}-४\sqrt{६}=(५-४)\times\sqrt{६}=1\times\sqrt{६}=\sqrt{६}$।

प्रश्न (३) $\sqrt[3]{३२}$, $\sqrt[3]{१०८}$ का योगान्तर क्या है ?

$$\sqrt[3]{३२} = \sqrt[3]{८ \times ४} = २ \times \sqrt[3]{४}।$$

एवम् $\sqrt[3]{१०८} = \sqrt[3]{२७ \times ४} = ३ \times \sqrt[3]{४}।$

$\therefore \sqrt[3]{३२} + \sqrt[3]{१०८} = २ \times \sqrt[3]{४} + ३ \times \sqrt[3]{४} = ५ \times \sqrt[3]{४},$

एवम् दोनों का अन्तर $\sqrt[3]{१०८} - \sqrt[3]{३२} = ३ \times \sqrt[3]{४} - २ \times \sqrt[3]{४}$
$= १ \times \sqrt[3]{४} = \sqrt[3]{४}।$

प्रश्न (४) सरल कीजिए :—

$$\sqrt{२०} + \sqrt{२७} + \sqrt{८} + \sqrt{४५} - \sqrt{३२} + \sqrt{४८}$$
$$= \sqrt{४ \times ५} + \sqrt{९ \times ३} + \sqrt{२ \times ४} + \sqrt{९ \times ५} - \sqrt{१६ \times २} + \sqrt{१६ \times ३}$$
$$= २ \times \sqrt{५} + ३ \times \sqrt{३} + २ \times \sqrt{२} + ३ \times \sqrt{५} - ४ \times \sqrt{२} + ४ \times \sqrt{३}$$
$$= ५ \times \sqrt{५} + ७ \times \sqrt{३} - २ \times \sqrt{२} = \text{उत्तर}$$

प्रश्न (५) $३ य \times \sqrt{४ क^3 ग}$, $४ क \times \sqrt{य^२ क ग}$, इन दोनों का योगान्तर बतलाइए :—

$३ य \times \sqrt{४ क^3 ग} = ३ य \times \sqrt{४ क^२ क ग} = ३ य \times २ क \sqrt{क ग}$
$= ६ य क \times \sqrt{क ग}।$

एवम् $४ क \times \sqrt{य^{.} क ग} = ४ क \times य \times \sqrt{क ग} = ४ य क \sqrt{क ग}$

$\therefore ३ य \times \sqrt{४ क^3 ग} + ४ क \times \sqrt{य^२ क ग}$
$= ६ य क \times \sqrt{क ग} + ४ य क \times \sqrt{क ग} = १० य क \times \sqrt{क ग}।$

एवम् $३ य \times \sqrt{४ क^3 ग} - ४ क \times \sqrt{य^२ क ग} =$
$६ य क \times \sqrt{क ग} - ४ य क \times \sqrt{क ग} = २ य क \times \sqrt{क ग}$
$=$ अन्तर।

प्रश्न (६) सरल कीजिए :—

$$२ \times \sqrt{५ क^२ \quad १० क + ५} - \sqrt{२० क^२ - २० क + ५}$$
$$= \sqrt{२० क^२ + ४० क + २०} - \sqrt{२० क^२ - २० क + ५}$$
$$= \sqrt{२० (क^२ + २ क + १)} - \sqrt{५ \times (४ क^२ - ४ क + १)}$$
$$= \sqrt{५ \times ४ (क^२ + २ क + १)} - \sqrt{५ \times (२ क - १)^२}$$
$$= २ (क + १) \times \sqrt{५} - (२ क - १) \times \sqrt{५}$$
$$= (२ क + २) \times \sqrt{५} - (२ क - १) \times \sqrt{५}$$

$= \{(२ क + २) - (२ क - १)\} \times \sqrt{५} = ३ \times \sqrt{५} =$ उत्तर

प्रश्न (७) $२ \times क \times \sqrt{८ क य^२} - ३ य \times \sqrt{२ क^३} + ७ क य \times \sqrt{३ क} = ८ क य \times \sqrt{२ क}$ यह कैसे ?

$२ क \times \sqrt{८ क य^२} - ३ य \times \sqrt{२ क^३} + ७ क य \times \sqrt{२ क} =$

$२ क \times \sqrt{४ य^२ \times २ क} - ३ य \times \sqrt{क^२ \times २ क} + ७ कय \times \sqrt{२क}$

$= ४ क य \sqrt{२ क} - ३ य क \sqrt{२ क} + ७ क य \times \sqrt{२ क}$

$= (४ क य - ३ य क + ७ क य) \times \sqrt{२ क}$

$= ८ क य \times \sqrt{२ क}$ ।

करणी योग वियोग सम्बन्धी कुछ प्रश्न :—

सरल कीजिए

(१) $\sqrt{१२} + \sqrt{७५}$ (२) $\sqrt{१८} + \sqrt{३२}$ (३) $\sqrt{२०} + \sqrt{१८०}$ (४) $\sqrt{९८} - \sqrt{५०}$ (५) $\sqrt[३]{१२८} - \sqrt[३]{५४}$ (६) $\sqrt[४]{८०} + \sqrt[४]{४०५}$ (७) $\sqrt[४]{७०८} - \sqrt[४]{२४३}$ (८) $२ \times \sqrt{२७} - \sqrt{७५} + \sqrt{१२}$ (९) $२ \sqrt{४०५} - ३ \times \sqrt{१२५}$ (१०) $४ \times \sqrt[३]{१९२} + ४ \times \sqrt[३]{३७५} + २ \times \sqrt[३]{२४}$ ।

करणी-गुणन भजन सम्बन्धी नियम

दो या अधिक करणियों के गुणन तथा भजन की प्रणाली दो या दो से अधिक बीजगणित की मिश्र राशियों के गुणन, भजन, प्रणाली के समान ही होती है :—

उदाहरण (१) गुणा कीजिए :– $३ \times \sqrt{य} + २ \times \sqrt{३}$ को $\sqrt{य} - \sqrt{३}$ से,

$$(३ \times \sqrt{य} + २\sqrt{३}) (\sqrt{य} - \sqrt{३})$$
$$= (३.\sqrt{य} + २\sqrt{३}) \times \sqrt{य} - (३.\sqrt{य} + २.\sqrt{३}) \times \sqrt{३}$$
$$= ३ \times य + २.\sqrt{३य} - ३.\sqrt{३ य} - २ \times ३ =$$
$$= ३.य - \sqrt{३य} - ६ ।$$

उदाहरण (२) गुणा कीजिए:— $७ \times \sqrt{२} + \sqrt{३}$ को $७.\sqrt{२} - \sqrt{३}$ से

$$(७.\sqrt{२} + \sqrt{३}) (.७.\sqrt{२} - \sqrt{३}) = (७.\sqrt{२} + \sqrt{३}$$
$$\times ७.\sqrt{२} - (७.\sqrt{२} + \sqrt{३}) \times \sqrt{३} = ४९ \times २ + ७.\sqrt{६}$$
$$- ७.\sqrt{६} - ३ = ९८ - ३ = ९५$$

उदाहरण (३) वर्ग कीजिए :—

$$(\sqrt{३अ + क} + \sqrt{३ अ - क})^२$$
$$= ३ अ + क + २\sqrt{३अ + क} \times \sqrt{३ अ - क} + ३अ - क$$
$$= ६अ + २ \sqrt{९अ^२ - क^२} ।$$

प्रश्नमाला :—

गुणा कीजिए :—

(१) $\sqrt{अ}+\sqrt{ब}$ को $\sqrt{अ}$ व से (२) $\sqrt{अ}+\sqrt{ब}$ को $\sqrt{अ}-\sqrt{ब}$ से

(३) $३\sqrt{अ}-५$ को $२\sqrt{अ}$ से

(४) $४.\sqrt{अ}+३\sqrt{ब}$ को $४.\sqrt{अ}-३\sqrt{ब}$ से

(५) $२\times\sqrt{अ-५}+४$ को $३\times\sqrt{अ-५}-६$ से

(६) $३\times\sqrt{५}-४.\sqrt{२}$ को $२\times\sqrt{५}+३\times\sqrt{२}$ से

(७) $\sqrt{२}+२\times\sqrt{३}+\sqrt{७}$ को $\sqrt{२}+२\times\sqrt{३}-\sqrt{७}$ से

(८) $३-\sqrt{५}+\sqrt{८}$ को $\sqrt{३}-\sqrt{५}-\sqrt{८}$ से

(९) $\sqrt[३]{४}+\sqrt[३]{९}+\sqrt[३]{४८}$ को $\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{३}$ से

(१०) $६\times\sqrt{२}$ को $३\times\sqrt[३]{२}$ से

निम्नांकित का वर्ग निकालिए :—

(११) $\sqrt{(अ+क)}-\sqrt{अ-क}$

(१२) $२\times\sqrt{८}+\times\sqrt{६}$

(१३) $२\times\sqrt{५}+३\times\sqrt{७}$

(१४) $\sqrt{अ^२+२व^२}-\sqrt{अ^२-२ब^२}$ का।

(१५) $२\times\sqrt{अ^२+व^२}+५\times\sqrt{अ^२-व^२}$

विशेष :—

(अ) सममूलीय करणियोंके गुणा या भाग में मूलक और अमूलक खण्डों को अलग २ गुणा या भाग लेना चाहिए।

(क) करणी गुणन या भजन में करणियों को सममूलीय करणी के रूप में बदल कर गुणन या भजन में सुविधा होती है।

जैसे (१) $६\sqrt{२}$ को $३\sqrt[३]{२}$ से गुणा या भाग लेना हो तो दोनों को सममूलीय करणी के रूप में बदल कर रखने से $६\times\sqrt{२}=६\times २^{\frac{१}{२}}=६\times २^{\frac{३}{६}}=६\times\sqrt[६]{२^३}=६\times\sqrt[६]{८}$।

इसी तरह $३\times\sqrt[३]{२}=३\times २^{\frac{१}{३}}=३\times २^{\frac{२}{६}}=३\times\sqrt[६]{२^२}=३\times\sqrt[६]{४}$।
इस प्रकार $६\sqrt{२}$, $३\times\sqrt[३]{२}$ ये दोनों $६\times\sqrt[६]{८}$, $३\times\sqrt[६]{४}$ इस रूप में सममूलीय हो गए। अतः दोनों का गुणनफल $=६\times\sqrt{२}\times३\sqrt[३]{२}=६\times\sqrt[६]{८}\times३\times\sqrt[६]{४}$ यहाँ मूलक और अमूलक को अलग २ गुणा करने से गुणनफल $=१८\times\sqrt[६]{३२}$।

इसी तरह भागफल $= \text{६} \times \sqrt[\text{६}]{\text{८}} \div \text{३} \times \sqrt[\text{६}]{\text{४}}$

$= (\text{६} \div \text{३}) \times \sqrt[\text{६}]{\text{८} \div \text{४}} = \text{२} \times \sqrt[\text{६}]{\text{२}} =$ भागफल

(२) गुण्य $= \text{५क} \times \sqrt{\text{य र}}$ । गुणक $= \text{३अ} \times \sqrt[\text{३}]{\text{यर}}$

गुणनफल लाने के लिए सममूलीय के रूप में बदलने से

$\text{५क} \times \sqrt{\text{य र}} = \text{५क} \times (\text{य र})^{\frac{\text{१}}{\text{२}}} = \text{५क} \times (\text{यर})^{\frac{\text{३}}{\text{६}}} = \text{५क} \times$

$\sqrt[\text{६}]{\text{य}^{\text{३}}.\text{र}^{3}}$ एवम् $\text{३अ}\sqrt[3]{\text{यर}} = \text{३अ} \times (\text{यर})^{\frac{\text{१}}{3}} = \text{३अ} \times (\text{यर})^{\frac{\text{२}}{\text{६}}}$

$= \text{३ अ} \times \sqrt[\text{६}]{\text{य}^{\text{२}}\text{र}^{\text{२}}}$ अंतः गुणनफय $= \text{५ क}\sqrt{\text{यर}} \times \text{३अ}$

$\times \sqrt[\text{३}]{\text{यर}} = \text{५ क} \times \sqrt[\text{६}]{\text{य}^{3}.\text{र}^{3}} \times \text{३ अ} \times \sqrt[\text{३}]{\text{य}^{\text{२}}.\text{र}^{\text{२}}} = \text{५क}$

$\times \text{३ अ} \times \sqrt[\text{६}]{\text{य}^{3}.\text{र}^{\text{३}}} \times \sqrt[\text{६}]{\text{य}^{\text{२}}.\text{र}^{\text{२}}} = \text{१५ अ.क} \times$

$\sqrt[\text{६}]{\text{य}^{\text{५}}.\text{र}^{\text{५}}}$ ।

एवम् भाज्य $= \text{५क} \times \sqrt{\text{यर}}$ भाजक $= \text{३अ} \times \sqrt[\text{३}]{\text{यर}}$ ।

भागफल $=$ भाज्य $\div$ भाजक $= \text{५क} \times \sqrt{\text{यर}} \div \text{३अ} \times \sqrt[3]{\text{यर}}$

$= \text{५क} \times \sqrt[\text{६}]{\text{य}^{3}.\text{र}^{3}} \div \text{३ अ} \times \sqrt[\text{६}]{\text{य}^{\text{२}}.\text{र}^{\text{२}}}$

$= \frac{\text{५क}}{\text{३अ}} \times \sqrt[\text{६}]{\text{यर}}$ ।

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) $\sqrt{\text{१५}} \times \sqrt{\text{६}} = \text{३} \times \sqrt{\text{१०}}$

(२) $\sqrt[\text{३}]{\text{५}} \times \sqrt[3]{\text{२५}} = \text{५}$

(३) $\sqrt{\text{२}} \times \sqrt{\text{६}} = \sqrt[\text{६}]{\text{८६४}}$,

(४) $\sqrt{\text{२}} \times \sqrt[\text{३}]{\text{६}} = \sqrt[\text{६}]{\text{२८८}}$

(५) $\sqrt[\text{३}]{\text{४}} \times \sqrt{\text{८}} = \text{४} \times \sqrt[\text{६}]{\text{२}}$

(६) $\sqrt[\text{३}]{\text{९}} \times \sqrt{\text{२७}} = \text{९} \times \sqrt[\text{६}]{\text{३}}$

(७) $\sqrt[\text{४}]{\text{३}} \times \sqrt[\text{८}]{\text{३}} = \sqrt[\text{८}]{\text{२७}}$,

(८) $\sqrt[\text{६}]{\text{२}} \times \sqrt[\text{९}]{\text{३}} = \sqrt[\text{१८}]{\text{७२}}$

(९) $\text{४} \times \sqrt[3]{\text{७२}} \times \text{५} \times \sqrt[3]{\text{५७६}} = \text{४८०} \times \sqrt[3]{\text{३}}$

(१०) $\text{७} \times \sqrt[\text{३}]{\text{८अ}^{\text{३}} \times \text{ब}^{\text{२}}} \times \text{५}.\sqrt{\text{२७ब}^{2} \times \text{स}^{3}}$

$= \text{२१० असब}\sqrt[3]{\text{ब}}$

(११) $\text{८}\sqrt{\text{१०}} \div \text{४}\sqrt{\text{१५}} = \text{२}\sqrt{\frac{\text{२}}{\text{३}}}$,

(१२) $\text{३}\sqrt{\text{१२}} \div \text{६}\sqrt{\text{२७}} = \frac{\text{१}}{\text{३}}$,

(१३) $\sqrt[3]{\text{३६}} \div \sqrt[\text{३}]{\text{४८}} = \sqrt[\text{३}]{\frac{\text{३}}{\text{४}}}$

(१४) $२४\sqrt{१४} \div ८.\sqrt[३]{७} = ३ \times \sqrt[६]{५६}$

(१५) $१२ य \sqrt{र} \div ३ \times \sqrt{यर} = ४ \times \sqrt[६]{य^{४}.र}$

करणी-वर्ग-घन चतुर्घात आदि सम्बद्ध नियम :—

करणी वर्ग, घन, चतुर्घात पञ्चघात आदि, अव्यक्त राशि के ही वर्ग घन, चतुर्घात पञ्चघात आदि की तरह लाए जाते हैं। जैसे व्यक्ताव्यक्त में समद्विघात वर्ग, समत्रिघात घन, समचतुर्घात चतुर्घात आदि होते हैं वैसे ही करणी के भी वर्गादि के आनयन में समझना। एक खण्डात्मक करणी राशि का वर्गादि आसानी से लाए जाते किन्तु अनेक खण्डात्मक करणी राशि के वर्गादि लाने में निश्चित सिद्धान्त का सहारा लेना श्रेयस्कर होता है।

प्रश्न (१) $३ \times \sqrt{५}$ तथा $४ \times \sqrt[३]{५}$ का वर्ग, घन तथा चतुर्घात बतलाइए :—

$(३\sqrt{५})^{२} = ३^{२} \times (\sqrt{५})^{२} = ९ \times ५ = ४५$

$(४ \times \sqrt[३]{५})^{२} = ४^{२} \times \sqrt[३]{५^{२}} = १६ \times \sqrt[३]{२५}$

$(३ \times \sqrt{५})^{३} = ३^{३} \times \sqrt{५^{३}} \times २७ \sqrt{१२५} = २७ \times ५ \sqrt{५}$

$= (१३५ \times \sqrt{५}$

इसीतरह $(४ \times \sqrt[३]{५})^{३} = ४^{३} \times \sqrt[३]{५^{३}} = ६४ \times ५ = ३२०$

$(३ \times \sqrt{५})^{४} = (३\sqrt{५})^{२ \times २} = ४५ \times ४५ = २०२५$

$(४ \times \sqrt[३]{५})^{४} = (१६ \times \sqrt[३]{२५})^{२}$

$= १६^{२} \times \sqrt[३]{२५^{२}} = २५६ \times \sqrt[३]{६२५}$

$= २५६ \times \sqrt[३]{१२५ \times ५} - २५६ \times ५ \times \sqrt[३]{५}$

$= १२८० \times \sqrt[३]{५}.$

मिश्र करणी का वर्ग—

भास्करीय 'स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्ना:' के प्रयोग से आसानी से निकल सकता।

प्रश्न (२)

$२ + \sqrt{३} + \sqrt{२}$ तथा $अ + ३\sqrt{अ} + २$ का वर्ग बतलाइए :—

$(२ + \sqrt{३} + \sqrt{२})^{२} = ४ + ४\sqrt{३} + ४\sqrt{२} + ३ + २ \times \sqrt{३ \times २} + २ = ९ + \sqrt{४८} + \sqrt{३२} + \sqrt{२४}$

$(अ + ३\sqrt{अ} + २)^{२} = अ^{२} + २अ \times ३ \times \sqrt{अ} + ४अ + ९अ + ६ \times \sqrt{अ} \times २ + ४$

$= अ^{२} + ६अ \times \sqrt{अ} + १३ अ + १२ \times \sqrt{अ} + ४ =$

$अ^{२} + (१२ + ६अ) \times \sqrt{अ} + १३अ + ४$

मिश्र करणी के वर्गानयन के बहुत से प्रश्न दिए जा चुके है मिश्र करणी के घनानयन में भी भास्करीय नियम–पूरे राशि को खण्ड बनाकर प्रथमतः अन्तिम का घन, त्रिगुणित अन्तिमाङ्क से आदि का गुणन, फिर आदि के वर्ग को त्रिगुणित अन्तिम से गुणना, फिर आदि का घन, जैसे $(\text{अ} + \text{क})^3 = \text{अ}^3 + ३\,\text{अ}^२\text{क} + ३\text{अक}^२ + \text{क}^3$ वाले भास्करीय सूत्र का प्रयोग आसानी से किया जा सकता।

करणी = वर्गमूल

करणी वर्गमूल में भी सरल एवं मिश्र करणी के वर्गमूल के लिए अलग२ प्रक्रिया है :—

सरल करणी के वर्गमूल का उदाहरण :—

जैसे (१) $४ \times \sqrt{३}$ तथा $९ \times \sqrt[3]{२५}$ का वर्गमूल लाना है

तो $४\sqrt{३}$ का वर्गमूल $= \sqrt{४ \times \sqrt{३}} = \sqrt{४} \times \sqrt{\sqrt{३}} =$

$$२ \times (३^{\frac{१}{२}})^{\frac{१}{२}} = २ \times ३^{\frac{१}{४}} = २ \times \sqrt[४]{३},$$

इसीतरह $९ \times \sqrt[3]{२५}$ का वर्गमूल $= \sqrt{९ \times \sqrt[3]{२५}} =$

$$३ \times \sqrt{\sqrt[3]{२५}} = ३\sqrt[3]{५}$$

या

$$(९ \times \sqrt[3]{२५})^{\frac{१}{२}} = (३^२ \times ५^{\frac{२}{3}})^{\frac{१}{२}}$$

$$= ३^{२ \times \frac{१}{२}} \times ५^{\frac{२}{3} \times \frac{१}{२}} = ३ \times \sqrt[3]{५}$$

(२) $४\text{अ} - १६\sqrt{\text{अ}} + १६$ का वर्गमूल के लिए पूर्ववन्न्यास :—

$४\text{अ} - १६\sqrt{\text{अ}} + १६$ ($२\sqrt{\text{अ}} - ४$ = वर्गमूल

४अ

$४\sqrt{\text{अ}} - ४$) $\times - १६\sqrt{\text{अ}} + १६$

$- १६\sqrt{\text{अ}} + १६$

$\times \quad \times$

यह अव्यक्त राशि के वर्गमूल की तरह ही समझना।

करणी मूलानयन का दूसरा प्रकार

जैसे रू५ क २४ का वर्गमूल भास्करीय मूलानयन रीति से क २ क ३ होगा यह पहले भी आ चका है।

आधुनिक प्रक्रिया के अनुसार :—

(१) $५ + \sqrt{२४} = ५ + २\sqrt{६} =$

$५ + २\sqrt{२ \times ३} = ५ + २ \times \sqrt{२} \times \sqrt{३} = ३ + २ + २ \times \sqrt{२} \times \sqrt{३}$

अतः $\sqrt{५ + \sqrt{२४}} = \sqrt{३ + २ + २\sqrt{३}.\sqrt{२}} =$

$\sqrt{३} + \sqrt{२}.$

(२) $४ - २\sqrt{३}$ का वर्गमूल लाना है

$४ - २\sqrt{३} = ३ + १ - २\sqrt{३ \times १} = ३ + १ - २\sqrt{३}\sqrt{१}$

$\therefore \sqrt{४ - २\sqrt{३}} = \sqrt{३ + १ - २\sqrt{३}\sqrt{१}} =$

$\sqrt{३} - \sqrt{१}$ = अभीष्ट वर्गमूल।

सविमर्शसुधान्विताऽधुना
करणीषड्विधबीजवासना।
परिपूर्तिमगाद् बुधैरतः
कृपया पूर्णतया विलोक्यताम् ॥

इति सविमर्शसुधाख्याख्योपेतं सवासनं करणीषड्विधं–
समाप्तम्।

—:०:—

अत्यधिक उपयोगी होने के कारण गुणावयव (Faelor) की चर्चा करना आवश्यक समझता हूँ।

गुणावयव का तात्पर्य है कि किसी अव्यक्त राशि को दो या दो से अधिक गुणन खण्डों में परिवर्त्तित करना। जैसे—$(अ^२ - ब^२) = (अ + ब) (अ - ब)$। यहाँ $अ^२ - ब^२$ के दो गुणन खण्ड हुए। इसी तरह राशियाँ अनेक गुणनखण्डों में वरिवर्त्तित की जाती हैं।

गुणावयव जानने के लिए कुछ विशेष सूत्र या सिद्धान्त जानना परमावश्यक है :-

(१) $(अ + क)^२ = अ^२ + २ अ क + क^२ = (अ + क) (अ + क)$

$(अ - क)^२ = अ^२ - २ अ क + क^२ = (अ - क) (अ - क)$

राश्योर्द्वयो वर्गयोगो द्विघ्नघातयुतोनितः।
राशियोगान्तरकृतिर्द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ॥

इसी तरह यदि राशि अनेक पदों के योग से बनी हो तो दो पदों के योग को राशि मानकर वर्ग लाना चाहिए।

(२) यतः $(अ + क)^२ - (अ^२ + क^२) = २ अ क$।

वर्गयोगस्य यद्राश्यो र्युतिवर्गस्यचान्तरम् ।
द्विघ्नघातसमानं स्याद् द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ।।२।।

(३) $अ^{२} - ब^{२} = अ^{२} + अ ब - अ ब + ब^{२} = अ (अ + ब) - ब (अ + ब) =$
$(अ + ब) (अ - ब)$

अतः राश्योर्योगान्तहृति स्तयोर्वर्गन्तरं भवेत् ।।३।।
या वर्गान्तरं योगान्तरघातसमम् ।

(४) $(अ + क)^{3} = (अ + क) (अ + क) (अ + क)$
$= (अ + क)^{२} \times (अ + क) =$
$(अ^{२} + २ अ क + क^{२}) (अ + क)$
$(अ^{२} + २ अ क + क^{२}) अ + (अ^{२} + २ अ क + क^{२}) क$
$= अ^{3} + २ अ^{२} \cdot क + क^{२} \cdot अ + अ^{२} \cdot क + २ अ क^{2} + क^{3}$
$= अ^{3} + ३ अ^{२} \cdot क + ३ अ \cdot क^{२} + क^{3} = अ^{3} + क^{3} + ३ अ क (अ + क)$

एवम् $(अ - क)^{3} = (अ - क) (अ - क) (अ - क)$
$= (अ - क) । (अ - क)^{2} = (अ - क) (अ^{2} - २ अ क + क^{2})$
$= अ (अ^{2} - २ अ क + क^{2}) - क (अ^{2} - २ अ क + क^{2})$
$= अ^{3} - २ अ^{2} \cdot क + अ क^{2} - अ^{2} \cdot क + २ अ क^{2} - क^{3}$
$= अ^{3} - ३ अ^{2} \cdot क + ३ अ क^{2} - क^{3} = अ^{3} - क^{3} - ३ अ क (अ - क)$

इसीलिए भास्कराचार्य ने घनायनय के सम्बन्ध में "समत्रिघातश्च धनः प्रदिष्टः स्थाप्योघनोऽन्त्यस्य तनोऽन्त्यवर्गः कहा है।

(५) सूत्र ३ के अनुसार दो राशियों का वर्गान्तर उन दोनों के योग एवं अन्तर के गुणनफल के तुल्य होता है—अतः $(अ + क) (अ - क) =$ $अ^{2} - क^{2}$ अतः $\frac{अ^{2} - क^{2}}{अ - क} = अ + क$ ।

अतः सिद्ध हुआ कि किन्हीं दो राशियों के वर्गान्तर में उन दोनों के अन्तर से भाग लेने पर दोनों राशियों का योग आता है और दोनों के वर्गान्तर में दोनों योग से भाग देने पर दोनों राशियों का अन्तर आता हैं। भास्कराचार्य ने "वर्गान्तरं राशिवियोगभक्तं योगः" कहा है।

या यों कहिए :—

राश्योर्वर्गान्तरं राशिवियोगेन विभाजितम् ।
राश्योर्योगः फलं ज्ञेयो योगभक्तं तदान्तरम् ।।

(६) $अ^3 + क^3 = अ^3 + अ^2 \cdot क - अ^2 \cdot क + क^3 = अ^2 (अ + क) - क (अ^2 - क^2)$

$= अ^2 (अ + क) - क (अ + क) (अ - क)$

$= (अ + क) (अ^2 - अ क + क^2)$

= घनयोग का गुणावयव।

इससे सिद्ध हुआ कि

राश्योर्वर्गयुती राशिद्वयघातविहीनिता
राशियोगहता राश्योर्घनयोगमिति भवेत्।

इसी तरह

(६) $अ^3 - क^3 = अ^3 + अ^2 क - अ^2 क - क^3$

$= अ^2 (अ - क) + क (अ^2 - क^2)$

$= अ^2 (अ - क) + क (अ + क (अ - क)$

$= (अ - क) \{ अ^2 + क (अ + क) \}$

$= (अ - क) (अ^2 + अ क + क^2)$

= घनान्तर का गुणावयव।

अतः सिद्ध हुआ कि :—

राश्योर्वर्गयुयी राशिद्वयघातयुतो हतः
राश्यो वियोगतस्तर्हि घनान्तरमितिर्भवेत्।

सूत्रावली—

(१) $(अ + क)^2 = अ^2 + २ अ क + क^2$

(२) $(अ - क)^2 = अ^2 - २ अ क + क^2$

(३) $(अ + क)^3 = अ^3 + ३ अ क (अ + क) + क^3$

(४) $(अ - क)^3 = अ^3 - ३ अ क (अ - क) - क^3$

(५) $अ^2 - क^2 = (अ + क) (अ - क)$

(६) $अ^3 + क^3 = (अ + क) (अ^2 - अ क + क^2)$

(७) $अ^3 - क^3 = (अ - क) (अ^2 + अ क + क^2)$

(८) $(य + अ) (य + ब) = य^2 + (अ + ब) य + अ ब$

इन सूत्रों को ध्यान में रखकर प्रत्येक सूत्र सम्बद्ध कुछ सोत्तर उदाहरणों को अभ्यासार्थ मैं आगे दे रहा हूँ। इन सूत्रों के अभ्यास से प्रायः अनेक विध राशियों का गुणावयव आसानी से निकाला जा सकता है।

प्रथम सूत्र—$(अ + क)^2 = अ^2 + २ अ क + क^2$

एवम् द्वितीय सूत्र—$(अ - क)^2 = अ^2 - २ अ क + क^2$

$(अ + क)^2 = (अ + क) (अ + क) = अ^2 + अ क + अ क + क^2 = अ^2 + २ अ क + क^2$

अतः द्वितीयसूत्र $(अ - क)^2 = (अ - क) (अ - क) = अ^2 - अ क - अ क + क^2 = अ^2 - २ अ क + क^2$

उपर्युक्त स्वरूप देखने से स्पष्ट होता कि किन्हीं दो व्यञ्जकों का योग वर्ग दोनों के वर्ग योग और उनके द्विगुणघात के योग के बराबर होता है।

दो से अधिक व्यञ्जकों का वर्ग लाना हो तो दो व्यञ्जकों को एक मानकर पूर्ववत् क्रिया करने से आसानी से वर्ग लाया जा सकता है।

जैसे 'अ+ब+स' का वर्ग अपेक्षित हो तो अ+ब, को प्रथम व्यञ्जक और स को द्वितीय व्यञ्जक मानकर पूर्ववत् क्रिया करें।

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) $(अ+४)^2 = अ^2 + ८ अ + १६$

(२) $(अ+२ ब)^2 = अ^2 + ४ अ ब + ब^2$

(३) $(३ अ^2 + २ ब^2)^2 = ९ अ^४ + १२ अ^2 ब^2 + ४ ब^४$

(४) $\left(\frac{१}{अ} + \frac{१}{ब}\right)^2 = \frac{१}{अ^2} + \frac{२}{अब} + \frac{१}{ब^2}$

(५) $(३ अ - ५ क)^2 = ९ अ^2 - ३० अ क + २५ क^2$

(६) $(अ^2 ब - अ ब^2)^2 = अ^४ ब^2 - २ अ^3 ब^3 + अ^2 ब^3$

(७) $\left(\frac{१}{२अ} - \frac{१}{ब}\right)^2 = \frac{१}{४ अ^2} - \frac{१}{अब} + \frac{१}{ब^2}$

(८) $(अ+२ ब+३ स)^2 = अ^2 + ४ अ ब + ६ अ स + ४ ब^2 + १२ ब स + ९ स^2$

(९) $(२ अ+३ ब+४ स)^2 = ४ अ^2 + १२ अ ब + १६ अ स + ९ ब^2 + २४ ब स + १६ स^2$

(१०) $(अ+ब+२ य+३ र)^2 = अ^2 + २ अ ब + ४ अ य + ६ अ र + ब^2 + ४ ब य + ६ ब र + ४ य^2 + १२ य र + ९ र^2$

(११) $(२ अ - ३ ब - ४ स)^3 = ४ अ^2 - १२ अ ब - १६ अ स + ९ ब^2 + २४ ब स + १६ स^2$

(१२) $(अ - ब - स - द)^2 = अ^2 - २ अ ब - २ अ स - २ अ द + ब^2 + २ ब स + २ ब द + स^2 + २ स द + द^2$

मूल्य निकालिए

(१३) $९ अ^2 + १२ अ + ४$, यदि, अ = − १,

(१४) $१६ अ^2 + ६४ अ + ६४$, यदि अ = − २

(१५) $२५ य^2 + ४० य र + १६ र^2$, यदि य = − १८, र = २३,

(१६) $अ + \frac{१}{अ} = ४$, हो तो सिद्ध कीजिए $अ^२ + \frac{१}{अ^2} = १४$

(१७) $अ^२ ब^२ - १२ अ ब स + ३६ स^2$, यदि अ=४ ब=७ स=५ हो

(१८) यदि $अ - \frac{१}{अ} = ब$, हो तो सिद्ध कीजिए $अ^२ + \frac{१}{अ^2} = ब^2 + २$

वर्गात्मक राशि का गुणावयव उसका वर्गमूल ही होता है। अतः किसी वर्गात्मक राशि के वर्गमूल को उसका गुणावयव समझना चाहिए।

वर्गात्मक राशि के गुणावयव लाने के कुछ उदाहरण--

(१) $अ^२ + २ अ क + क^2 = अ^2 + अ क + अ क + क^2 = अ (अ+क) + क (अ + क) = (अ + क) (अ + क)$।

(२) $९ अ^2 + ३० अ ब + २५ ब^2 = ९ अ^2 + १५ अ ब + १५ अ ब + २५ ब^2$।

$= ३ अ (३ अ + ५ ब) + ५ ब (३ अ + ५ ब) =$
$= (३ अ + ५ ब) (३ अ + ५ ब)$

(३) $अ^2 - २ अ ब + ब^2 = अ^2 - अ ब - अ ब + ब^2$
$= अ (अ - ब) - ब (अ - ब)$
$= (अ - ब) (अ - ब)$

गुणावयव निकालिए—

(१) $२५अ^2 + ७० अ ब + ४९ब^2 = (५ अ + ७ ब) (५ अ + ७ ब)$.

(२) $४९ अ^४ + १२६ अ^2 ब^2 + ८१ ब^४ = (७ अ^२ + ९ ब^२)$. $(७ अ^२ + ९ ब^२)$

(३) $४९अ^2 ब^२ + ७० अ ब^२ स + २५ ब^२ स^२ = (७ अ ब + ५ ब स) \times (७ अ ब + ५ ब स)$

(४) $९ अ^२ब^२ + २४ अ ब^२ स + १६ ब^२स^२ = (३ अ ब + ४ ब स) (३ अ ब + ४ ब स)$।

(५) $४ अ^२ + १२ अ ब + २० अ स + ९ ब^2 + ३० ब स + २५ स^२$
$= (२ अ + ३ ब + ५ स) (२ अ + + ३ ब + ५ स)$

(६) $अ^४ + २ अ^2 ब^२ + २ अ^2 स^2 + ब^४ + २ ब^2 स^२ + स^४$
$= (अ^2 + ब^2 + स^2) (अ^2 ब + ^2 + स^2)$

(७) $४ अ^2 - १२ अ ब + ९ ब^२ = (२ अ - ३ ब) (२ अ - ३ ब)$

(८) $अ^४ - ४ अ^२ ब^२ + ४ ब^४ = (अ^२ - २ ब^2) (अ - २ ब^२)$

(९) $अ^2 + २ अ ब - २ अ स + ब^2 - २ ब स + स^2 =$
$(अ + ब - स) (अ + ब - स)$

(१०) $४ अ^2 - १२ अ ब + २० अ स + ९ ब^2 - ३० ब स + २५ स^2$
$= (२ अ - ३ ब + ५ स) (२ अ - ३ ब + ५ स)$

(११) $अ^2 - २ अ ब + २ अ स - २ अ द + ब^2 - २ ब स + २ ब द + स^2$
$- २ स द + द^2 = (अ - ब + स - द) (अ - ब + स - द)$

(१२) $९ अ^2 + ५४ अ ब - १२ अ स + ८१ ब^2 - ३६ ब स + ४ स^2$
$= (३ अ + ९ ब - २ स) (३ अ + ९ ब - २ स)$

(१३) $अ^4 - २ अ^2 ब^2 - २ अ^2 स^2 + ब^4 + २ ब^2 स^2 + स^4$
$= (अ^2 - ब^2 - स^2) (अ^2 - ब^2 - स^2)$

तृतीय सूत्र :—$(अ+क)^3 = (अ+क)^2 \times (अ+क) = (अ^2+२ अ क+क^2)$ $(अ+क) = अ^3+२ अ^2 क + अ क^2 + अ^2 क + २ अ क^2 + क^3 = अ^3 + ३ अ^2 क + ३ अ क^2 + क^3 = अ^3 + क^3 + ३ अ क (अ+क)$

अर्थात् "खण्डाभ्यां वा हतो राशिस्त्रिघ्नः खण्डघनैक्य युक्" अर्थात् खण्ड द्वय से पूरे राशि को गुणाकर पुनः तीन से गुणें, और दोनों खण्डों का घन योग उस में जोड़ दें तो अभीष्ट राशि का घन निकल जाता है।

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न :—

(१) $(अ+३)^3 = अ^3 + ३ \times अ (अ+३) + २७$

(२) $(३ अ+ब)^3 = २७ अ^3+३\times३ अ ब (३ अ+ब) + ब^3$

(३) $(अ^2+२ ब)^3 = अ^6+३ अ^2 २ ब (अ^2+२ ब) + ८ ब^3$

(४) $(\frac{१}{२} अ+\frac{२}{३} ब)^3 = \frac{१}{८} अ^3 \times ३ \times \frac{१}{२} अ \times \frac{२}{३} ब (\frac{१}{२} अ+\frac{२}{३} ब)$
$+ \frac{८}{२७} ब^3 = \frac{अ^3}{८} + \frac{१}{२} अ^2 ब + \frac{२ अ}{३} ब^2 + \frac{८ ब^3}{२७}$

(५) $\left(\frac{१}{य}+\frac{१}{र}\right)^3 = \frac{१}{य^3} + ३ \times \frac{१}{य} \times \frac{१}{र}\left(\frac{१}{य}+\frac{१}{र}\right) + \frac{१}{र^3}$

(६) $\left(\frac{२}{३ अ} \times \frac{३}{५ ब}\right)^3 = \frac{८}{२७ अ^3} + ३ \times \frac{२}{३ अ} \times \frac{३}{५ ब} \times$
$\left(\frac{२}{३ अ} + \frac{३}{५ ब}\right) + \frac{२७}{१२५ ब^3} = \frac{८}{२७ अ^3} + \frac{६}{५ अ ब} \times$
$\left(\frac{२}{५ अ} + \frac{३}{५ ब}\right) + \frac{२७}{१२५ ब^3}$

निम्नाङ्कित व्यञ्जकों का मूल्य निकालिए

(१) अ^3+६अ^2+१२ अ+८, यदि अ = − २

(२) ८ अ^3+३६ अ^{2}ब+५४ अ ब^2+२७ ब^3, यदि अ = − ३, ब = २

(३) अ^3+१८ अ^2+१०८ अ+३५१, यदि अ = − ११,

(४ य+र=५ हों तो सिद्ध कीजिए कि य^3+र^3+१५यर=१२५

(५) अ+ब = २ हों तो सिद्ध कीजिए कि अ^3+ब^3+६ अ ब=८

(६) अ^2+ब^2=स^2 हों तो सिद्ध कीजिए कि—

अ^6×ब^6+३ अ^2 ब^2 स^2=स^6

चतुर्थ सूत्र :—(अ − क)^3 = (अ − क)^2 × (अ − क) = (अ^2 − २ अ क+क^2) (अ − क) = अ^3 − २ अ^2 क + क^2 अ − अ^{2}क +२ अक^2 − क^3 = अ^3 − ३ अ^2 क + ३ अ क^2 − क^3 = अ^3 − ३ अ क(अ − क)

यहाँ भी "खण्डाभ्यां वा हतो राशि स्त्रिघ्न: खण्डघनैक्ययुक्" का ध्यान कर पूर्वोक्त वत् घन किया जा सकता है।

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

निम्नलिखित व्यञ्जकों का घन निकालिए :—

(१) (अ − २)^3 = अ^3 − ८ −६ अ (अ − २)

(२) (२ अ − ५ ब)^3 = ८ अ^3 − १२५ ब^3 − ३० अ ब (२ अ − ५ब)

(३) (३ − ४ अ)^3 = २७ − ६४ अ^3 − ३६ अ (३ − ४ अ)

(४) $\left(\frac{\text{१}}{\text{य}} - \frac{\text{१}}{\text{र}}\right)^3 = \frac{\text{१}}{\text{य}^3} - \frac{\text{१}}{\text{र}^3} - \frac{\text{३}}{\text{य र}}\left(\frac{\text{१}}{\text{य}} - \frac{\text{१}}{\text{र}}\right)$

(५) (२ अ − ब − स)^3= ८ अ^3 − ब^3− स^3 − १२ अ^2 ब − १२ अ^{2}स +६ अ ब^2+६ अ स^2 − ३ ब^{2}स − ३ ब स^2+१२ अबस

सरल कीजिए:—

(६) (अ+२ ब)^3 − ३ (अ+२ ब)^2 (अ − २ ब)+३ (अ + २) (अ − २ ब)^2 − (अ − २ ब)^3

= { (अ+२ ब) − (अ − २ ब) }^{3}

= (४ ब)^3 = ६ ४ ब^3

(७) (५ अ − ८)^3 − (३ अ − ८)^3 − ६ अ (५ अ − ८) (३ अ − ८) = ८ अ^3

(८) (३ अ − ८ ब)^3 − (२ अ − ७ ब)^3 − ३ (३ अ − ८ ब) (२ अ − ७ ब) (अ − ब)= अ^3 − ब^3 − ३ अब (अ − ब)

निम्नलिखितों का मूल्य निकालिए :—

(९) $अ^3 - १२ अ^2 ब + ४८ अ ब^2 - ६४ ब^3$ यदि अ=१२, ब=३.

(१०) $२७ अ^3 - १३५ अ^2 + २२५ अ - १२५$, यदि अ=४,

(११) $८ - ९ अ + २७ अ^2 - २७ अ^3$, यदि अ=३

पञ्चम सूत्र=$(अ+क) (अ - क)=अ^2 - क^2$

$(अ+क) (अ - क)=(अ+क) अ - (अ+क) क=$

$अ^2+अ क - अ क - क^2=अ^2 - क^2$

अर्थात् दो राशियों के योग एवम् दोनों के अन्तर का गुणनफल दोनों राशियों के वर्गान्तर के बराबर होता है। साथ ही ऐसे वर्गान्तर के वे दोनों (राशिद्वययोग एवम् राशिद्वयान्तर) गुणावयव होंगे।

उदा० १ गुणा कीजिए—$(३ अ+५ ब) (३ अ - ५ ब)$

$(३ अ+५ ब)\times३ अ - (३ अ+५ ब) ५ ब=$

$९ अ^2+१५ अ ब - १५ अ ब - २५ ब^2=९ अ^2 - २५ ब^2$

उदा० २—अ+ब - स को अ - ब+स से गुणा करना है

तो $(अ+ब - स) (अ - ब+स) = (अ + ब - स) (अ - (ब - स)$

अर्थात् प्रथम राशि=अ, द्वितीय राशि ब - स हों तो अ+ब - स=राशिद्वय का योग, एवम् अ - ब+स=राशिद्वय का अन्तर। अतः दोनों का गुणनफल= दोनों राशियों के वर्गान्तर।

अतः $(अ+ब - स) (अ - ब+स)=अ^2 - (ब - स)^2$

$अ^2 - (ब^2 - २ ब स+स^2)=अ^2 - ब^2 + २ ब स - स^2$

उदा० ३—$९ अ^2 - २५$ का गुणावयव क्या है? दिया हुआ व्यञ्जक ३ अ, और ५ का वर्गान्तर है, और वर्गान्तर दोनों के योग और अन्तर के गुणन फल के बराबर होता है, अतः $९ अ^2 - २५=(३ अ+५) (३अ - ५)$

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न—गुणनफल निकालिए

(१) $(अ+५) (अ - ५)=अ^2 - २५$,

(२) $(५ अ+१३ ब) (५ अ - १३ ब)=२५ अ^2 - १६९ ब^2$

(३) $\left(३ अ+\frac{१}{३अ} \right) \left(३ अ - \frac{१}{३अ} \right)=९अ^2 - \frac{१}{९अ^2}$

(४) $(१+२ अ^2) (१ - २ अ^2)=१ - ४ अ^4$

(५) $(य+९ य^3) (य - ९ य^3)=य^2 - ८१ य^6$

(६) $(११+म^3) (११ - म^3)=१२१ - म^6$

गुणावयव निकालिए

(१) $६४ य^४ - ४९ र^६ = (८ य^2 + ७ र^3) (८ य^2 - ७ र^3)$

(२) $३६ अ^४ - १ = (६ अ^२ + १) (६ अ^२ - १)$

(३) $१६ अ^५ - ८१ अ = अ (१६ अ^४ - ८१) = अ (४ अ^२ + ९)$
$(४ अ^2 - ९) = अ (४ अ^2 + ९) (२ अ + ३) (२ अ - ३)$

(४) $८१ य^{१२} - ६४ अ^{१०} = (९ य^६ + ८ अ^५) (९ य^६ - ८ अ^५)$

(५) $३६ - य^४ र^2 = (६ + य^2 र) (६ - य^2 र)$

(६) $१९२ अ^९ - २४३ अ^५ य^४ = ३ अ^५ (६४ अ^४ - ८१ य^४) =$
$३ अ^५ (८ अ^2 + ९ य^2) (८ अ^२ - ९ य^2)$

(७) $१४४ य^७ - २५ य^3 र^४ = य^3 (१४४ य^४ - २५ र^४) = य^3$
$(१२ य^2 + ५ र^2) (१२ य^2 - ५ र^2)$

(८) $९८ अ^३ य^५ - १२८ अ य = २ अ य (४९ अ^2 य^४ - ६४) = २ अ य \times$
$(७ अ य^2 + ८) (७ अ य^2 - ८)$

(९) $अ^2 - (३ ब - ५ स)^2 = (अ + ३ ब - ५ स) (अ + ५ स - ३ ब)$

(१०) $(अ + ३ ब)^2 - २५ स^2 = (अ + ३ ब + ५ स) (अ + ३ ब - ५ स)$

(११) $(य + र)^2 - (य - र)^2 = २ य \times २ र = ४ य र$

(१२) $४ (अ - ब)^2 - ९ (स - द)^2 = \{२ (अ - ब)\}^2 - \{३(स - द)\}^2$
$= २ (अ - ब) + ३ (स - द) (२ (अ - ब) - ३ (स - द)$
$(२ अ - २ ब + ३ स - ३ द) (२ अ - २ ब - ३ स + ३ द)$

(१३) $(८ अ + ५)^2 - (९ अ - ७)^2 = (१७ अ - २) (१२ - अ)$

(१४) $(५ अ^2 - ३ अ + ७)^2 - (५ अ^2 - ३ अ - ७)^2$
$= (१० अ^2 - ६ अ) \times १४$ ।

(१५) $(य + र)^3 (अ + ब) - (य + र) (अ + ब)^3$
$(य + र) (अ + ब) (य + र)^2 - (अ + ब)^2$
$= (य + र) (अ + ब) (य + र + अ + ब) (य + र - अ - ब)$

अब ऐसे व्यञ्जकों का गुणावयव निकालना है जिन्हे दो राशियों के वर्गान्तर के रूप में प्रकट कर सकते हैं।

जैसे —

उदा० (१) $अ^४ + अ^2 ब^2 + ब^४$ का गुणावयव जानना है तो दिए हुए व्यञ्जक में '$अ^2 \cdot ब^2$' जोड़ने तथा घटाने पर व्यञ्जक $= अ^४ + २ अ^2 \cdot ब^2 +$

$ब^४ - अ^2 \cdot ब^2 = (अ^2 + ब^2)^2 - (अ ब)^2 = (अ^2 + ब^2 + अ ब)$ $(अ^2 + ब^2 - अ ब)$ ।

उदा० २—$अ^४ + ४$ का गुणावय लाना है तो $अ^४ + ४ = अ^४ + ४ + ४ अ^2 - ४ अ^2 = (अ^2 + २)^2 - (२ अ)^2 = (अ^2 + २ + २ अ)$ $(अ^2 + २ - २ अ)$ ।

उदा० ३—$अ^४ = ६ अ^2 + १ = अ^४ - २ अ^2 + १ - ४ अ^2$

$= (अ^2 - १)^2 - (२ अ)^2 =$

$(अ^2 + २ अ - १)\ \ अ^2 - २ अ - १) =$ यही उपर्युक्त

$अ^४ - ६ अ^2 + १$ का गुणावयव हुआ ।

उदा० ४—$अ^2 - ब^2 + २ ब स - स^2$ का गुणावयव क्या है ? दिया हुआ व्यञ्जक $= अ^2 - ब^2 + २ ब स - स^2 =$

$अ^2 - (ब^2 - २ ब स + स^2) = अ^2 - (ब - स)^2 = (अ + ब - स)$ $(अ + स - ब)$ ।

उदा० ५—$२ (अ ब \times + स द) - अ^2 - ब^2 + स^2 + द^2$ का गुणावयव क्या है ।

व्यञ्जक $= २ अ ब + २ स द - अ^2 - ब^2 + स^2 + द^2 =$

$स^2 + द^2 + २ स द - (अ^2 - २ अ ब + ब^2)$

$= (स + द)^2 - (अ - ब)^2 =$

$(स + द + अ - ब)(स + द + ब - अ)$

उपर्युक्त पांचों उदाहरणों में प्रथम द्वितीय उदाहरण ऐसे हैं जिनमें कुछ जोड़ने तथा घटाने पर और शेष तीनों के स्वरूपान्तर करने पर आसानी से दो राशियों के वर्गान्तर बन जाते हैं। पुनः "वर्गान्तरं योगान्तरघातसमम्" मन्त्र के द्वारा गुणावयव निकालना परम सरल हो जाता है ।

उपर्युक्त पाचों उदाहरणों से सम्बद्ध कुछ प्रोत्तर प्रश्न नीचे दे रहा हूँ जिनसे छात्रों को ऐसे प्रश्नों के गुणावयव निकालने में सहायता मिलेगी ।

गुणाययव निकालिए

१. $अ^४ + अ^2 + १ = (अ^2 + अ + १)(अ^2 - अ + १$

२. $अ^8 + अ^४ + १ = (अ^४ - अ^2 + १)(अ^2 + अ + १)(अ^2 - अ + १)$

३. $अ^4 + अ^2 ब^2 + ब^४ = (अ^2 + अ ब + ब^2)(अ^2 - अ ब + ब^2)$

४. $अ^8 + अ^4 ब^4 + ब^८ = (अ^2 + अ ब + ब^2)(अ^2 - अ ब + ब^2)$ $(अ^4 - अ^2 ब^2 + ब^४)$

५. $अ^4 + ६४ = (अ^2 + ४अ + ८)(अ^2 - ४अ + ८)$

६. $४अ^4 + ८१ = (२अ^2 + ६अ + ९)(२अ^2 - ६अ + ९)$

७. $९अ^4 + ३६ = ९(अ^2 + २अ + २)(अ^2 - २अ + २)$

८. $अ^4 + २अ^2 + ९ = (अ^2 + २अ + ३)(अ^2 - २अ + ३)$

९. $अ^4 - ७अ^2 + ९ = (अ^2 + अ - ३)(अ^2 - अ - ३)$

१०. $४अ^4 + ८अ^2 + ९ = (२अ^2 + २अ + ३)(२अ^2 - २अ + ३)$

११. $९अ^4 - ३३अ^2 + १६ = (३अ^2 + ३अ - ४)(३अ^2 - ३अ - ४)$

१२. $९अ^4 - १९अ^2ब^2 + ब^4 = (३अ^2 + ७अब + ५ब^2)$
$(३अ^2 - ७अब + ५ब^2)$

१३. $अ^2 - ब^2 + २बस - स^2 = (अ + ब - स)(अ - ब + स)$

१४. $४अ^2 - ब^2 - ९स^2 + ६बस = (२अ + ब - ३स)$
$(२अ - ब + ३स)$

१५. $९अ^2 - ४ब^2 + १२बस - ९स^2 = (३अ + २ब - ३स)$
$(३अ - २ब + ३स)$

१६. $३०अस + १६ब^2 - ९अ^2 - २५स^2 = (३अ + ४ब - ५स)$
$(४ब - ३अ + ५स)$

१७. $(अ^2 - २अब) - (स^2 - २बस) = (अ - २ब + स)(अ - स)$

१८ $४य^2 - १ + ९अ^2 - २५ब^2 + १२अय - १०ब$
$= (२य + ३अ + ५ब + १)(२य + ३अ - ५ब - १)$

१९. $९अ^2 - ४ब^2 - ४९स^2 - ३०अ + २८बस + २५$
$= (३अ + २ब - ७स - ५)(३अ - २ब + ७स - ५)$

२०. $१६अ^2 - ९ब^2 - १६स^2 - २४अ + २४बस + ९)$
$= (४अ - ३ब + ४स - ३)(४अ + ३ब - ४स - ३)$

घनयोग और घनान्तर के रूप में प्रकटित व्यञ्जकों के गुणावयव निकालने की विधि षष्ठ एवं सप्तम सूत्र के द्वारा बताई जा चुकी है फिर भी अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न यहाँ दे रहा हूं :—

घनयोग $(अ^3 + ब^3) = (अ + ब)(अ^2 - अब + क^2)$ एवम् घनान्तर $(अ^3 - ब^3) = (अ - ब)(अ^2 + अब + ब^2)$ यह पहले ही बताया जा चुका है।

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

गुणावयव निकालिए :—

१. ($अ^3+१$) = (अ+१) ($अ^2$ − अ + १)

२. ($अ^3+८$) = (अ+२) ($अ^2$ − २ अ + ४)

३. ८ $अ^3+१$ = (२ अ + १) (४ $अ^2$ − २ अ + १)

४. २७ $अ^3+८$ = (३ अ + २) (९ $अ^2$ − ६ अ + ४)

५. ८ $अ^3$+ १२५ $ब^3$ = (२ अ+५ ब) (४ $अ^2$ − १० अब+२५ $ब^2$)

६. ८ $अ^3$+२१६ $ब^3$ = (२ अ + ६ ब) (४ $अ^2$ − १२ अब+३६ $ब^2$)

७. २७ $अ^3$ $ब^3$+६४ $य^3$ $र^3$ = (३ अब+४ यर) (९ $अ^2$ $ब^2$ − १२ अ ब य र+१६ $य^2$ $र^2$)

८. ६४ $य^6$ − $अ^3$ $ब^6$ = (४ $य^2$ − $अब^2$) (१६ $य^4$+४$अ$य^2$ब^2$+$अ^2$$ब^4$)

९. १ − ८ $य^3$=(१ − २ य) (१+२ य+४ $य^2$)

१०. $य^3$ − २७ = (य − ३) ($य^2$+३ य + ९)

११. २७ $अ^3$ − ८ $ब^3$ $र^3$=(३अ − २ ब र) (९ $अ^2$+६ अबर+४$ब^2$$र^2$)

१२. ६४ $अ^3$ $ब^3$ − $ब^3$ $स^3$=(४ अ ब − ब स) (१६ $अ^2$$ब^2$+४अ$ब^2$स +$ब^2$ $स^2$)

१३. १२५ $अ^3$ − १ = (५ अ − १) (२५ $अ^2$+५ अ+१)

१४. २७ $अ^3$ $ब^3$ − ६४ $य^3$ $र^6$ = (३ अ ब − ४ य $र^2$) ($अ^2$ $ब^2$ +१२ अ ब य $र^2$+१६ $य^2$ $र^4$)

१५. २१६ $अ^3$ − १२५ $ब^3$=(६ अ − ५ ब) (३६ $अ^2$+३० अब+२५ $ब^2$)

पूर्वोक्त सूत्रावली में निर्दिष्ट अन्तिम सूत्र = (य + अ) (य + ब) = $य^2$+(अ+ब) य+अ ब । खण्डत्रयात्मक ऐसी राशि के गुणावयव निकालने के लिए अ, ब, व्यञ्जकों के मान वे ही होंगे जिनका योग राशि के द्वितीय खण्ड का गुणकाङ्क, और गुणनफल राशि का अन्तिम खण्ड होता है। जैसे $य^2$+१७ य+३० अ खण्डत्रयात्मक राशि का गुणावयव निकालने के लिए राशि के द्वितीय खण्ड के गुणकाङ्क १७ को एसे दो खण्डों में विभक्त किया जिनका गुणनफल = ३० और उन खण्डों का योग = १७ हो इस प्रकार मध्यखण्डीय गुणकाङ्क को उपयुक्त दो खण्ड बनाने के बाद राशि का गुणावयव आसानी से निकाला जा सकता है।

उदा० (१) $य^2$+१७ य+३० का गुणावयव जानना है। उपर्युक्त नियमानुसार मध्यखण्डीय गुणकाङ्क १७ को १५, २ खण्डों में विभक्त किया जिनका योग = १५ + २ = १७ और गुणनफल = १५ × २ = ३०। अतः उपर्युक्त

राशि = $य^2$ + (१५ + २) य + १५×२ = $य^2$ + १५ य + २ य + १५×२
= य (य + १५) + २ (य + १५) = (य + २) (य + १५) अतः
उद्दिष्ट राशि के ये ही दो गुणावयव हुए।

उदा० (२) $अ^2$ - ५ अ - ३६ का गुणावयव निकालना है उपर्युक्त नियमानुसार मध्यखण्डीय गुणकाङ्क ऋणात्मक ५ को ऐसे दो खण्डों में रक्खा जिनका गुणनफल ऋणात्मक ३६ हो। ऐसे दो खण्ड = ९, + ४ ही हो सकते जिनका योग ऋणात्मक ५ और गुणनफल ऋणात्मक ३६ होगा।

इस तरह राशि = $अ^2$ - ५ अ - ३६ = $अ^2$ + (- ९ + ४) अ - ९×४
= $अ^2$ - ९ अ + ४ अ - ९ × ४

अ (अ - ९) + ४ (अ - ९) =

(अ + ४) (अ - ९) ! अतः ये ही उपर्युक्त राशि के दो गुणावयव हुए।

उदा० (३)— $अ^2$+७ अ ब+१२ $ब^2$ का गुणावयव जानना है। उपर्युक्त नियमानुसार मध्यखण्डीय गुणाकाङ्क ७ ब को ३ ब, ४ ब ऐसे दो खण्डों में रक्खा जिनका योग = ७ ब और गुणनफल = १२ $ब^2$ है। अतः उपर्युक्त राशि $अ^2$+७ ब अ+१२ $ब^2$=$अ^2$+४ ब अ+३ ब अ+१२ $ब^2$=अ (अ+४ ब)+ ३ ब (अ+४ ब) = (अ+३ ब) (अ+४ ब)। अतः उद्दिष्ट राशि के ये ही दो गुणावयव हुए।

उदा० (४)— ८ $य^2$ + २ य - ३ का गुणावयव निकालना है। पूर्वोक्त उदाहरणों से यह विलक्षण उदाहरण है। इसमें प्रथम खण्ड भी गुणकाङ्क युक्त है। ऐसे उदाहरणों में प्रथम खण्ड के गुणकाङ्क से अन्तिम खण्ड को गुणा कर गुणन फल को ऐसे दो अंकों का गुणानफल बनाया जिनका योग उद्दिष्ट राशि के मध्य खण्डीय गुणाङ्क हो जाय। जैसे प्रस्तुत उदाहरण में प्रथम खण्ड के गुणकाङ्क ८ से अन्तिम खण्ड ऋणात्मक ३ को गुणा करने पर गुणनफल = ८× - ३ = - २४ को ६, - ४, को गुणनफल के रूप में बनाया जिससे दोनों का योग = ६+(- ४) = २ = मध्यखण्डीय गुणाङ्क। इस प्रकार गुणावयव निकालने के लिए—उद्दिष्ट राशि ८ $य^2$+२ य - ३ = ८ $य^2$+ ६ य - ४ य - ३ = २ य (४ य + ३) - १ (४ य + ३)=(२ य - १) (४ य + ३)।

उदा० (५)—१२ $य^2$+७ य - १० का गुणावयन क्या है? उपर्युक्त नियमानुसार प्रथम खण्डीय गुणकाङ्क १२ से अन्तिम खण्ड ऋणात्मक दश को गुणा करने और गुणन फल ऋणात्मक १२० को १५, - ८ अंकों का गुणनफल

बनाया जिनका योग = १५ + (− ८) = ७ = मध्य खण्डीय गुणकाङ्क । अतः उद्दिष्ट राशि १२ य^2 + १५ य − ८ य − १० = ३ य (४ य + ५) − २ (४य + ५) = (३ य − २) (४ य + ५) ।

निष्कर्ष यह हुआ कि ऐसी खण्डत्रयात्मक राशि जिसमें प्रथम खण्ड गुणकांक रहित वर्गात्मक, द्वितीय खण्ड गुणकाङ्क युक्त अवर्गात्मक या वर्गात्मक, और अन्तिम खण्ड व्यक्ताङ्क हो तो उसके गुणावय जानने के लिए मध्य खण्डीय गुणकाङ्क को ऐसे दो खण्डों में रक्खें जिससे दोनों का गुणनफल अन्तिम खण्ड (व्यक्ताङ्क) के समान और दोनों का योग मध्य खण्ड के गुणकाङ्क तुल्य हो ।

यदि उपर्युक्त वर्गात्मक प्रथम खण्ड गुणकाङ्क युक्त हो तो उस गुणकाङ्क से अन्तिम खण्ड को गुणा कर गुणनफल को ऐसे दो अंकों का गुणन फल बनावें जिनका योग द्वितीय (मध्य) खण्ड के गुणकाङ्क तुल्य हो ।

इस प्रकार दोनों स्थिति में समस्त राशि का गुणावयव उपर्युक्त उदाहरणानुसार सरलता से निकाला जा सकता है ।

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

१. य^2 + ३ य + २ = (य + १) (य + २)
२. य^2 − ५ य + ४ = (य − ४) (य − १)
३. य^2 + ८ य + १५ = (य + ५) (य + ३)
४. य^2 − ५ य − ३६ = (य − ९) (य + ४)
५. य^2 + ७ य − ३० = (य + १०) (य − ३)
६. य^2 − ३ य − ४० = (य − ८) (य + ५)
७. य^2 + २२ य + १२० = (य + १२) (य + १०)
८. य^2 − २१ य − ७२ = (य + ३) (य − २४)
९. य^2 − २० य − ९६ = (य + ४) (य − २४)
१०. य^2 − २९ य − ९६ = (य + ३) (य − ३२)
११. अ^2 − १२ अब + ३२ ब^2 = (अ − ८ ब) (अ − ४ ब)
१२. अ^2 − २ अ ब − १५ ब^2 = (अ − ५ ब) (अ + ३ ब)
१३. अ^2 − १४ अ ब + ४८ ब^2 = (अ − ८ ब) (अ − ६ ब)
१४. अ^2 + अ ब − ३० ब^2 = (अ + ६ ब) (अ − ५ ब)
१५. अ^2 − अ ब − ४२ ब^2 = (अ − ७ ब) (अ + ६ ब)
१६. अ^2 + अब − १२ ब^2 = (अ + ४ ब) (अ − ३ ब)
१७. अ^2 + ३ अब − ४० ब^2 = (अ + ८ ब) (अ − ५ ब)

१८. अ^{2} − ७ अब − ८ ब^{2} = (अ − ८ ब) (अ + ब)

१९. अ^{4} + ४ अ^{2} − ५ = (अ^{2} + ५) (अ^{2} − १)

२०. अ^{4} + २ अ^{2} − १५ = (अ^{2} + ५) (अ^{2} − ३)

२१. अ^{6} − १० अ^{3} + १६ = (अ^{3} − २) (अ^{3} − ८)

२२ अ^{8} − २० अ^{4} + ६४ = (अ^{4} − १६) (अ^{4} − ४)

२३. अ^{8} − ११अ^{4} − ८० = (अ^{4} − १६) (अ^{4} − ५)

२४. २अ^{2} + अ − १५ = (२ अ − ५) (अ + ३)

२५. ८अ^{2} − ६ अ − ९ = (४ अ + ३) (२ अ − ३)

२६. १०अ^{2} − ४१ अ ब + २१ ब^{2} = (५ अ − ३ ब) (२अ − ७ब)

२७. १८अ^{2} + २१अ^{2}·व − ७२ अ ब^{2} = ३ अ (३ अ + ८ व) (२ अ − ३ब)

२८. २०अ^{2} + अ व − ३०ब^{2} = (५ अ − ६ व) (४ अ + ५ ब)

अथ कुट्टकः

भाज्यो हारः क्षेपकश्चापवर्त्यः
केनाप्यादौ सम्भवे कुट्टकार्थम् ।
येनच्छिन्नौ भाज्यहारौ न तेन
क्षेपश्चतं दुष्टमुद्दिष्टमेव ।। १ ।।

सुधाः—कुट्टक का तात्पर्य सुबोधिनी टीकाकार पं० जीवनाथ झा जी के अनुसार गुणक विशेष है ।

जिस गुणक से गुणित कोई अंक अभीष्ट क्षेप से युतोन एवं अभीष्ट भाजक से भाग देने पर निःशेष हो जाय उस गुणक की संज्ञा कुट्टक कही गई है । वस्तुतः प्रकरण विशेष का नाम कुट्टक है ।

ऐसे गणित में राशि (गुणक) को जिससे गुणा करते हैं उसे भाज्य, योग-अन्तर किए जाने वाले व्यक्ताङ्क को क्षेप और भाजक को हार, और निःशेष होने पर आनेवाली लब्धि को लब्धि कहते हैं । जैसे कौन सी राशि (गुणक) है जिसे २२१ से गुणाकर, ६५ जोड़ने तथा १९५ से भाग लेने पर निःशेष हो जाती है ? ऐसे प्रश्नों में राशि (गुणक) को २२१ से गुणा करते हैं, अतः २२१ को भाज्य, ६५ जोड़ देते हैं, अतः ६५ को क्षेप, और १९५ से भाग देने पर निःशेष लब्धि मिलती है अतः १९५ को भाजक कहते हैं । मान लीजिए कि ५=राशि है, जिसे कुट्टक प्रकरण में गुण नाम से भी कहते हैं, भाज्य से गुणा कर क्षेप जोड़ने तथा १९५ से भाग देने पर निःशेष लब्धि=६ है, तो ५, और ६ कुट्टक प्रकरण में क्रमशः गुण लब्धि के नाम से व्यवहृत होते । इस प्रकरण में मुख्यतः इन्हीं गुण लब्धियों का आनयन है ।

कुट्टक ज्ञानार्थ उपर्युक्त भाज्य हार क्षेप में, यदि सम्भव हो, तो किसी एक अङ्क से अपपवर्त्तन देना चाहिए । जिस अङ्क से भाज्य और हार छिन्न (अपवर्तित) हो जांय और क्षेप अपवर्तित नहीं हो तो उस प्रश्न को ही अशुद्ध समझना ।। १ ।।

वासना :—

कुट्टकप्रकरणे भाज्यहारक्षेपवशेन गुणलब्धी साध्येते । ते च गुणलब्धी

अपवर्त्तितभाज्यहारक्षेपवशेनापि भवितुमर्हत इत्यङ्कलाघवाय भाज्यहारक्षेपाः सम्भवे सति केनाऽपि अपवर्त्तनीयाः ।

यथाऽत्र कल्प्यते गुणकः=गु, भाज्यः=भा,

हारः=हा क्षेपः=क्षे, लब्धिः=ल,

अतोलब्धिः $= \frac{\text{गु, भा} \pm \text{क्षे}}{\text{हार}} =$ ल, =

$\frac{\frac{\text{गु, भा}}{\text{क}} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{क}}}{\frac{\text{हार}}{\text{क}}}$ यतो भाज्यहारौ केनापि गुणितावपवर्त्तितौ वा लब्धौ नैव वैकृत्य—मानयतः ।

अतो लब्धिः$= \frac{\text{गु.भा}' \pm \text{क्षे}'}{\text{हा}'}$ ।

एतेन भाज्योहारः क्षेपकश्चापवर्त्यः

केनाप्यादौ सम्भवे कुट्टकार्थमित्युपपन्नम् ।

पूर्वोक्त लब्धिः $= \frac{\text{गु. भा} \pm \text{क्षे}}{\text{हार}} =$ ल

अतः ल × हार = गु. भा ± क्षे

पक्षौ समेनापवर्त्तितेऽपि समावेवातः;

$\text{ल} \times \frac{\text{हार}}{\text{क}} = \text{गु} \times \frac{\text{भा}}{\text{क}} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{क}}$ ।

'क' अनेन यदि भाज्यहारौ छिद्येते किन्तु क्षेपो न छिद्यते तर्हि ल × हा'

$= \text{गु} \times \text{भा}' \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{क}}$ ।

अत्र प्रथम पक्षोऽभिन्नाङ्क इति द्वितीयपक्षेणापि तथैवाभिन्नेन भवितव्यम् । द्वितीय पक्षे च खण्डद्वयं यत्र गु × भा'=अभिन्नाङ्कः, अतो द्वितीयखण्डेना $\pm \frac{\text{क्षे}}{\text{क}}$ नेनापि अभिन्नाङ्केन भवितव्यमन्यथा भिन्नाङ्काभिन्नाङ्कयोर्योगः कथमभिन्नः ? अतोऽ$\pm \frac{\text{क्षे}}{\text{क}}$ यमवश्यमभिन्नाङ्कोऽर्थात् 'क' अनेन क्षेपोऽपि छेद्य एवेति । अच्छेद्यत्वे पक्षयोरसमत्वात् प्रश्न एव खिलो बोध्य इति दुष्ट-मुद्दिष्टमेवेत्यन्तमुपपन्नम् ।

परस्परं भाजितयोर्ययोर्यः
शेषस्तयोः स्यादपवर्त्तनं सः ।
तेनाऽपवर्त्तेन विभाजितौ यौ
तौ भाज्यहारौ दृढ़संज्ञकौ स्तः ॥२॥
मिथो भजेत्तौ दृढ़भाज्यहारौ
यावद् विभाज्ये भवतीह रूपम् ।
फलान्यधोऽधस्तदधो निवेश्यः
क्षेपस्तथाऽन्त्ये खमुपान्तिमेव ॥३॥
स्वोर्ध्वे हतेऽन्त्येन युते तदन्त्यं
त्यजेन्मुहुः स्यादितिराशियुग्मम् ।
ऊर्ध्वो विभाज्येन दृढ़ेन तष्टः
फलं गुणः स्यादधरो हरेण ॥४॥

सुधा—दो राशियों में परस्पर भाग देने पर जो (अन्तिम) शेष बचे उसे उन दोनों राशियों का अपवर्त्तनाङ्क कहते हैं। उस अपवर्त्ताङ्क से विभाजित वे राशियाँ (भाज्य, हार) दृढ़ कहलाती हैं।

उन दृढ़ भाज्य हारों को परस्पर तब तक भाग लें, जब तक कि भाज्य में एक शेष हो जाय। फलों को एक के नीचे दूसरे को लिखते जायँ। फलों के बाद क्षेप को, फिर अन्त में शून्य को लिखें।

(इस प्रकार ऊर्ध्वाधर रूप में बनी अङ्कों की पंक्ति को वल्ली कहते हैं)।

उपान्तिम (अन्तिमाङ्क के उपरितन अङ्क) से उसके ऊपर के अङ्क को गुणा कर अन्तिम अङ्क (शून्य) को जोड़ दें फिर अन्तिम को त्याग कर बार बार ऐसी क्रिया करें। इस प्रकार आगत दो राशियों से उपरितन अङ्क को दृढ़ भाज्य से और अधरतन को हर से तष्टित करें तो क्रमशः लब्धि और गुण आ जायँगे।

वासना

$\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ अत्र महत्तमापवर्तनाङ्कविचारे यदि भाज्यो हारेण निःशेषं विभज्येत तदा हार एव महत्तमसमापवर्त्तकः। हारभक्तभाज्ये शेषस्थितो कल्प्यते यथा—

$\frac{अ}{क} = ल + \frac{शे}{क}$ $\therefore अ = ल \times क + शे$ ।

$\frac{क}{शे} = ल_1 + \frac{शे'}{शे}$ $\therefore क = ल_1 \times शे + शे'$ ।

$\frac{शे}{शे'} = ल_2 + \frac{शे''}{शे'}$ $\therefore शे = ल_2 \times शे' + शे''$ ।

$\frac{शे'}{शे''} = ल_3$, निःशेषालब्धि श्चेत्तदा शे'' । अनेन

शे' इति निश्शेषं विभज्यत इति सिद्धति । अतश्च शे इत्यपि शे'' अनेन निःशेषतामायास्यति । एवं 'अक' भाज्यहारावपि तेन निःशेषतामियात् । अतः अ, क भाज्यहारयोः शे'' इति महत्तमोऽपवर्त्ताङ्कः सेत्स्यति । शे'' तो महतिकस्मिंश्चिदपवर्त्तनाङ्के कल्पिते तेन शे'' संज्ञकशेषेऽपवर्त्तनाभावात् भाज्यहारयोरपि नैव तेनावर्त्तनसम्भवम् । अत. शे'' इत्येव भाज्यहारयोर्महत्तमसमापवर्त्तकः । अतः उपपद्यते शेषस्तयोः स्यादपवर्त्तनं स इत्यन्तम् ।

महत्तमसमापवर्त्तकेन विभाजितौ भाज्यहारौ दृढावेव । अदृढत्वे पुनरन्याङ्केनापवर्त्तनप्रसङ्गात्, प्रथमसिद्धमहत्तमसमापवर्त्तकादपि महन्महत्तमापवर्त्तकसम्भवापत्तिः ।

गुणालब्ध्योरानयनप्रसङ्गे परमगुरु म० म० श्री सुधाकर-द्विवेदिकृता वासनैका परममञ्जुला । सा च यथा—कुट्टक प्रश्नानुसारेण :—

$$का = \frac{१०० या + क्षे}{६३} = या + \frac{३७ या + क्षे}{६३} = या + नी$$

$$यदि\ नी = \frac{३७ या + क्षे}{६३}\ तद\ या = \frac{६३ नी - क्षे}{३७} = नी + पी ।$$

$$यदि\ पी = \frac{२६ नी - क्षे}{३७}$$

$$तदा\ नी = \frac{३७ पी + क्षे}{२६} = पी + लो ।$$

$$यदि\ लो = \frac{११ पी + क्षे}{२६}\quad तदा\ पी = \frac{२६ लो - क्षे}{११} = २ लो + ह ।$$

$$यदि\ ह = \frac{४ लो - क्षे}{११}\quad तदा\ लो = \frac{११ ह + क्षे}{४} = २ ह + श्वे ।$$

$$यदि\ श्वे = \frac{३ ह + क्षे}{४}\quad तदा\ ह = \frac{४ श्वे - क्षे}{३} = श्वे + चि ।$$

यदि चि $= \frac{\text{श्वे} - \text{क्षे}}{२}$ तदा श्वे $= \frac{२\ \text{चि} + \text{क्षे}}{१}$ ।

यद्यत्र चि = ० तदा श्वे = क्षे

अत्र यावत्तावत्कालकादिगुणवशेन जाता वल्ली, अर्थात् भाज्यहारयोर-न्योन्यभजनेनागता लब्धय: क्रमशोऽधोऽध: स्थाप्यास्तत: क्षेपस्ततश्चान्ते शून्यमिति स्वोर्ध्वेहतेऽन्त्येनयुते तदन्त्यमित्यादिनाऽऽनीतं यावत्कालकमानमेव गुण-लब्धिमानम् । एतेनोपपन्नं राशियुग्ममित्यन्तम् । पूर्वलिखितसमीकरणेनैव स्फुटं दृश्यते यत् धनक्षेपे समा वल्ली ऋणक्षेपे च विषमा भवति ।

कुट्टकोक्तरीत्या लब्धि: = ल = $\frac{\text{गु. भा} \pm \text{क्षे}}{\text{हा}}$

∴ ल. हा = गु. भा ± क्षे ।

यद्यत्र $\frac{\text{गु}}{\text{हा}} = \text{इ} + \frac{\text{गुशे}}{\text{हा}}$ इति कल्प्यते

तदा गु = इ. हा + गुशे ।

वा गु − इ हा = गुशे ....(१)

अत्रे "ल. हा = गु. भा ± क्षे" ति पूर्वसिद्धमस्ति पक्षयो: इ × भा × हा इदं चेद्विशोध्यते तदा स्वरूपम् = ल. हा − इ भा. हा = गु. भा ± क्षे − इ. भा हा ।

∴ तुल्यगुणकपृथक्करणेन

हा (ल − इ. भा) = भा (गु − इ. हा) ± क्षे

$\frac{\text{ल}}{\text{भा}} = \text{इ} + \frac{\text{लशे}}{\text{भा}}$ इति च कल्प्यते चेत्तदा ल = इ. भा + ल शे

∴ ल − इ. भा = ल शे........... (२)

गुणशेषलब्धिशेषस्वरूपयो: एकद्विसंख्याङ्कितयोरवलोकनैव सिद्धयति यद् दृढभाज्यतष्ट ऊर्ध्वाङ्को लब्धिशेषरूपो हि फलम् = लब्धि:, दृढहारतष्टोऽधराङ्को गुणस्वरूपो गुणश्चेति "ऊर्ध्वोविभाज्येन दृढेन तष्ट: फलं गुण: स्यादधरोहरेण" इति साधूपपद्यते, तक्षणे गुणलब्धित: इष्टगुणितहारभाज्ययो: शोधनेनैव गुणशेष-लब्धिशेषरूपयो: गुणलब्ध्योर्जायमानत्वात् ।

एवमुभयत्रापीष्टगुणितावेव हारभाज्यौ विशोध्येते तदैव गुणलब्धीति गुण-लब्ध्यो: सभं ग्राह्यं धीमता तक्षणे फलमित्यपि सूपपन्नम् ।

विमर्श

उपरितन 'परस्परं भाजितयो र्ययो र्यः शेष' इत्यादि कथन ही आधुनिक महत्तम समापवर्त्तन का बोधक है। भास्कराचार्य ने जिसे 'अपवर्त्तन' संज्ञा दी उसे ही आधुनिक बीजगणित में महत्तम समापवर्त्तन कहा जाता है, वस्तुतः उसे महत्तम समापवर्त्तक कहना ही अधिक उपयुक्त है।

दो या दो से अधिक अंकों या पदों में जितने अङ्को या पदों से भाग लगे उनमें सबसे बड़ा अङ्क या पद उनका महत्तम समापवर्त्तक कहलाता है।

बीजगणित में जैसे अकग, कगघ, पदों में क, ग, कग इन तीनों से भाग लग सकते अतः ये तीनों अपवर्त्तक हुए। इन तीनों में सबसे बड़ा क ग है अतः उपर्युक्त अकग, कगघ, पदो का महत्तम समापवर्त्तक कग कहलाया।

बीजात्मक पदों का महत्तम समापवर्त्तक केवल उन पदों को विचारपूर्वक देखने से तुरन्त ज्ञात हो जाता है, जैसा कि २४ अय^{२}र^{३} और १६य^{२}र^{२}ल का महत्तम समापवर्त्तक ८ य^{२} र^{२} है। इस महत्तम समापवर्त्तक से विभाजित उपर्युक्त पद ३ अ र, २ य ल ये दोनों परस्पर दृढ़ हैं।

इस तरह केवल देखने से ही ज्ञेय महत्तम समापवर्त्तक के कुछ उदाहरण—

(१) १५ य^{३} र, १० य र^{२} ग और २० र^{२} ल का म० स०=५ र

(२) ३ य र (अ − क)^{२} और यग (अ − क)^{२} का महत्तम समापवर्त्तक = य (अ − क)^{२}

(३) २ (य+र)^{२} (य+३ र)^{२}, ३ (य+र) (य+३ र)^{२}, और ५ (य+र)^{२} (य+३ र)^{२} का म० स० = (य+र) (य+३ र)

बीजात्मक दो संयुक्त राशियों के महत्तम समापवर्त्तक लाने की रीति—

संयुक्त राशियों को इस रूप में लिखें कि गुण रूप वर्ण के घातों के घातमापक उत्तरोत्तर बढ़ते या घटते हुए हों। भागहार की प्रक्रिया को ध्यान में रखकर दोनों राशियों को लिखें। उन दोनों में से लघुपद से दूसरे में भाग दें, शेष से लघुपद में भाग देने पर आगत नये शेष से पूर्व शेष में भाग दें। इस प्रकार की क्रिया तब तक हों जब तक कि अन्तिम शेष से विभक्त पूर्वशेष निःशेष न हो जाय। इस प्रकार निःशेष करने वाला शेष ही दोनों का महत्तम समापवर्त्तक होगा।

यदि दोनों संयुक्त राशियां किसी एक पद से निःशेष हो जाय तो निःशेष किए गए दोनों पदों का महत्तम समापवर्त्तक लाकर उसे निःशेष कारक पूर्वपद से गुणा करें तो संयुक्त पदों का महत्तम समापवर्त्तक हो जायगा।

अधिक संयुक्त पदों का महत्तम समापवर्त्तक लाने के लिए पहले दो पदों का लाकर उसके साथ तीसरे पद का लावें वही उन अधिक पदों का महत्तम समापवर्त्तक होगा।

जैसे—उदा० (१)

२ क^{२}+क − १५ , ६ क^{३}+क^{२} − ४४ क+१०, इन दोनों संयुक्त पदों का महत्तम समापवर्तक क्या है ?

परस्पर भाग के लिए न्यास—

२ क^{२}+क − १५) ६क^{३}+क^{२} − ४४ क+१० (३क − १
६क^{३}+३क^{२} − ४५ क
× − २ क^{२}+क+१०
− २ क^{२} − क+१५
२क − ५ = शेष

इस शेष से लघुपद भाजक में भाग देने पर

२क − ५) २क^{२}+क − १५ (क+३
२क^{२} − ५क
६क − १५
६क − १५
× ×

अतः उद्दिष्ट दोनों पदों का महत्तम समापवर्त्तक = २क − ५

उदा० (२) ३ अ^{३} − १० अ^{२}+१० अ − ७ और
२ अ^{३}+३ अ^{२} − ३ अ+५ का म० स० लाना है।

यहाँ उद्दिष्ट पदों में किसी एक से भाग देने पर लब्धि भिन्नात्मक होगी। अतः प्रथम उद्दिष्ट पद को दो से गुणाकर गुणनफल को भाज्य माना—

३ अ^{३} − १० अ^{२}+१० अ − ७
×२
६ अ^{३} − २० अ^{२}+२० अ − १४ = भाज्य

भाजक = द्वितीय उद्दिष्ट पद।

महत्तम समापवर्त्तक लाने के लिए न्यास

२ अ^{३}+३ अ^{२} − ३ अ+५) ६ अ^{३} − २० अ^{२}+२० अ − १४ (३
६ अ^{३}+९ अ^{२} − ९ अ+१५
× − २९ अ^{२}+२९ अ − २९=शे०

चूंकि यह शेष − २९ से निःशेष हो जाता अतः ऋणात्मक २९ से शेष में भाग देकर लब्धि अ^2 − अ+१ को शेष मानकर इसे भाजक और पूर्वभाजक को भाज्य मानकर पूर्ववत् क्रिया करनी चाहिए।

अ^2 − अ − १) २ अ^3 + ३ अ^2 − ३ अ+५ (२ अ+५
२ अ^3 − २ अ^2 +२ अ
—————————
५ अ^2 − ५ अ+५
५ अ^2 − ५ अ+५
—————————
× × ×

अतः महत्तम समापवर्त्तक = अ^2 − अ+१

उदा० (३) १२ य^5 − ४८ य^4 + ३९ य^3+९ य^2 और ६ य^5 − २७ य^4 +५७ य^3 − ४५ य^2 का महत्तम समापवर्त्तक क्या है ?

ये दोनों उद्दिष्ट पद ३ य^2 से निशेष होते हैं अतः इससे तष्टित दोनों पद ४ य^3 − १६ य^2 + १३ य+३ और २ य^3 − ९ य^2+१९ य − १५ ये हुए। नियमानुसार इन तष्टित पदों के महत्तम समापवर्त्तक को ३ य^2 से गुणा करने पर उद्दिष्ट पदों का महत्तम समापवर्त्तक होगा।

तष्टित पदों के महत्तम समापवर्त्तक लाने के लिए न्यास :—

२य^3 − ९य^2 + १९य − १५) ४य^3 − १६य^2 + १३य + ३ (२
४य^3 − १८य^2 + ३८य −३०
—————————
× २य^2 − २५य +३३

२य^2 − २५य + ३३) २य^3 − ९य^2 + १९य − १५ (य + ८
२य^3 − २५ य^2 + ३३य
—————————
१६य^2 − १४य − १५
१६य^2 −२००य+२६४
—————————
१८६य−२७९ = नूतन शेष

इस नूतन शेष से पूर्वस्थ भाजक में भाग लेना है, किन्तु भाग लेने पर भिन्नाङ्क आने की सम्भावना को देख नूतन शेष को ९३ से भाग देकर (२य − ३) रूप में लघुतर बना लिया गया। क्योंकि लब्धि की कोई आवश्यकता नहीं होती केवल शेष का ही इसमें महत्त्व रहता है। अतः भिन्नाङ्क आने की स्थिति में भाजक को किसी अंक से भाग लेकर छोटा बना लिया जाय या भाज्य को ही किसी पूर्णाङ्क से गुणा कर बड़ा बनाकर भाग दें।

अतः—

$$
\begin{array}{l}
२य - ३\ )\ २य^{२} - २५य + ३३\ (\ य - ११ \\
\qquad\qquad २य^{२} - ३य \\
\qquad\qquad \overline{\qquad - २२य + ३३} \\
\qquad\qquad\qquad - २२य + ३३ \\
\qquad\qquad\qquad \overline{\quad \times \qquad \times}
\end{array}
$$

अतः तष्टित पदों का महत्तम समापवर्त्तक = २ य − ३ । अतः इसे ३य^{२} से गुणा करने पर ६य^{३} − ९य^{२} = उद्दिष्ट पदों का महत्तम समापवर्त्तक ।

अभ्यासार्थं कुछ सोत्तर प्रश्न :—

१. अ^{२} + ५अ + ६ और अ^{२} + ६अ + ८ का महत्तम समावर्त्तक = अ + २.

२. अ^{२} + अ − २० और अ^{२} − ११ अ + २८ का महत्तम समापवर्त्तक = अ − ४.

३ २अ^{२} + ७अ + ६ तथा अ^{२} + अ − २ का महत्तम समापवर्त्तक = अ + २.

४. अ^{२} + ७अ − ८ तथा अ^{३} − ४अ^{२} + १०अ − ७ का महत्तम समापवर्त्तक = अ − १.

५. अ^{२} − ९अ + १४ और २ अ^{३} − अ^{२} − ११अ + १० का महत्तम समापवर्त्तक = अ − २.

६. अ^{२} + १३अ + ३६ तथा ५अ^{३} + १३अ^{२} − २६ अ + ८ का महत्तम समापवर्त्तक = अ + ४.

७. य^{3} − ४य^{2} − २६य + ३५ तथा य^{3} − ११य^{2} + २९ य − ७ का महत्तम समापवर्त्तक = य − ७.

८. य^{3} + ३य^{2} − १८ य और ३य^{3} − १३य^{2} + १७ य − १५ का महत्तत समापवर्त्तक = य − ३.

९. य^{3} + ९य^{2} + २५य + २५ तथा य^{3} + ८य^{2} + १८य + १५ का म० स० = य + ५.

१०. य^{3} + २य^{2}.र − ८ य र^{2} + ५र^{2} और य^{3} − ३य^{2}र + ५यर^{2} − ३र^{3} का म० स० = य − र.

११. $२य^3 - १७य^2 + २२य - ७$ और $३य^3 - २३य^2 + १८य - २८$ का म० स० = य − ७

१२ $अ^3 - अक^2 - ६क^3$ तथा $अ^3 - ३अ^2क + ४क^3$ का महत्तम स० = अ − २क

१३. $३य^3 - २५य^2 + ६७य - १५०$ तथा $६य^3 - ७य^2 - ४७य + १०२$ का म० स० = य − ६.

१४ $य^3 + अय^2 - २७अ^2य + १८अ^3$ और $य^3 + १३अय^2 + ४०अ^2य - १०अ^3$ का म० स० = य + ६अ.

बीजात्मक असंयुक्त राशियों के—

महत्तम समापवर्तक निकालने का दूसरा प्रकार :—

दो या अधिक पदों में जितने मूल गुणावयव उभयनिष्ठ या सर्वनिष्ठ हों उनका गुणनफल ही उन पदों का महत्तम समापवर्त्तक होगा।

जैसे $६अ^2ब(य^2 - १)$ तथा $१५अब^2(य^2 - ३य + २)$ का महत्तम समापवर्त्तक लाने के लिए दोनों पदों को अलग-अलग मूलगुणावयव के रूप में खण्डित कर रखने पर

$६अ^2ब(य^2 - १) = ३ \times २ \times अ \times अ \times ब(य + १)(य - १)$
तथा $१५अब^2(य^2 - ३य + २) = ३ \times ५ \times अ \times ब \times ब(य - १)(य - २)$

उपर्युक्त दोनों पदों में उभयनिष्ठ मूलगुणावयव = ३, अ, ब, और (य − १)। इनका गुणनफल ही ३ अ ब (य − १) = महत्तम समापवर्त्तक

विशेष :—मूलगुणावयव का तात्पर्य ऐसे गुणनखण्डों से है जिनका पुनः गुणनखण्ड नहीं हो सके।

उदाहरण (१)—$अ^2ब^4स^5$, $अ^4ब^3स^6$ और $अ^3ब^5स^4$ का महत्तम समापवर्त्तक क्या है?

तीनों में मूलगुणावयव क्रमशः $अ^2$, $ब^3$, $स^4$, है। अतः महत्तम समापवर्त्तक $= अ^2ब^3स^4$।

उदाहरण (२)—$२४अब^2य^3र^4$, $३६अ^2य^4ल^5$ और $२४०ब^3य^6र^2ल$ का महत्तम समापवर्त्तक क्या है?

यहाँ $२४अब^2य^3र^4 = ३ \times २^3 अब^2य^3र^4$
$३६अ^2य^4ल^5 = २^2 \times ३^2 अ^2य^4ल^5$
एवम् $२४०ब^3य^6र^2ल = ३ \times ५ \, २^4 \times ब^3य^6र^2ल$

स्पष्ट विदित होता है कि ३, २, य ये मूलगुणावयव तीनों में हैं जिनका सर्वोच्च घात उपर्युक्त राशियों में क्रमशः ३, $२^{२}$, $य^{3}$ ये हैं। अतः जो मूलगुणावयव सर्वोच्चघात के रूप में, सभी राशियों में है उनका गुणनफल

$३ \times २^{२} \times य^{3} = १२\ य^{3}$ = महत्तम समापवर्त्तक।

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

निम्नाङ्कितों का महत्तम समापवर्तक बतलाइए :—

१. $अ^2\ ब^3$ तथा $व^2\ अ^3$ का, म० स० = $अ^2\ ब^2$

२. १२ $अ^3$ ब तथा २० $अ^2\ ब^3$ का, ,, ४ $अ^2$

३. ९ य $र^2\ ल^3$ तथा २४ $य^3\ र^४$ का, ,, = ३ य $र^2$

४. २० $अ^3\ य^४\ र^५$ तथा ७५ $अ^2\ य^3$ का, ,, = ५ $अ^2\ ब^3$

५. २४ $म^2$ न $प^५$, ६० म $न^2$प तथा ८४ $म^3 प^2$ का ,, = १२ म प

६. ३६ $अ^2\ ब^2\ स^४\ य^५$, ५४ $अ^५\ स^2\ य^४$ तथा
९० $अ^४\ ब^3\ स^५$ का ,, = १८ $अ^2\ स^2$

७. ७२ $अ^3\ ब^४\ स^५$, ९६ $ब^3\ स^४\ द^५$, तथा
१२० $स^3\ द^४\ अ^५$ का ,, = २४ $स^3$

८. ४५ $य^3\ र^2\ ल^४$, ७५ $य^2\ र^४\ ल^3$ तथा
९० $य^४\ र^3\ ल^2$ का ,, = १५ $य^2\ र^2\ ल^2$

९. ४८ $अ^५\ य^४\ र^3\ ल^2$, ६० $य^५\ र^४\ ल^3\ व^2$,
७२ $र^५\ ल^४\ ब^3\ अ^2$, तथा ८४ $ल^५\ ब^४\ अ^3\ य^2$ का ,, = १२ $ल^२$

१०. ५४ $अ^2\ ब^५\ स^3\ द^४$, ७२ $अ^५\ ब^2\ स^४\ द^3$,
१०८ $अ^3 ब^४ स^५ द^2$ तया १२६ $अ^४ ब^3 स^2 द^५$ का ,, = १८ $अ^2 ब^2 स^2 द^2$

●

एवं तदैवात्र यदा समास्ताः
स्युर्लब्धयश्चेद्विषमास्तदानीम् ।
यदागतौ लब्धिगुणौ विशोध्यौ
स्वतक्षणात् शेषमितौ च तौ स्तः ॥ ५ ॥

सुधाः—इस प्रकार आगत लब्धियाँ समसंख्यक हों तो लब्धि, गुणक, यथार्थ होंगे। विषम संख्यक लब्धियों के होने पर उन्हें दृढ़ भाज्य हारों में से क्रमशः घटावें, तो वास्तविक लब्धि गुणक होंगे ॥ ५ ॥

वासनाऽत्रत्या कल्पान्यश्चोऽस्तद्वयोनिवेश्य इत्यादिपद्योक्तवासनाप्रसङ्गे

म० म० परमगुरुसुधाकरदिवेदिकृतसमीकरणावलोकनेनैव स्फुट। तत्रापि धनक्षेपे समा बल्ली ऋणक्षेपे विषमेति प्रतिपाद्य सर्वं व्यक्तीकृतं मया।

भवति कुट्टविधे युंतिभाज्ययोः
समपवर्त्तितयोरथवा गुणः।
भवति यो युतिभाजकयोः पुनः
सच भवेदपवर्त्तनसंगुणः ॥ ६ ॥

सुधा :—सम्भव रहने पर अपवर्त्तित भाज्य और क्षेप पर से कुट्टक नियमानुसार जो गुण और लब्धि आवे उनमें अपवर्त्तनाङ्क गुणित लब्धि वास्तव लब्धि होगी। और आगत गुण को यथावत गुण समझना चाहिए। इसी तरह अपवर्त्तित हार तथा क्षेप पर से कुट्टक नियमानुसार आगत गुण को अपवर्त्तनांक से गुणने पर वास्तव गुण होगा किन्तु लब्धि यथावत् वास्तव ही आयगी ॥६॥

वासना :—कुट्टक प्रश्नानुसारम्

$$\frac{\text{गु. भा} \pm \text{क्षे}}{\text{हार}} = \text{ल.}$$

$$\therefore \text{गु भा} \pm \text{क्षे} = \text{ल हा.}$$

अत्र भाज्य क्षेपयो रपवर्त्तनाङ्कः सति सम्भवे 'अ' कल्प्यते तदा

$$\frac{\text{गु.भा} \pm \text{क्षे}}{\text{अ}} = \frac{\text{ल.हार}}{\text{अ}}$$

$$\text{वा.गु.} \frac{\text{भा}}{\text{अ}} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{अ}} = \text{हा.}\frac{\text{ल}}{\text{अ}}$$

$$\text{अथवा गु. भा}' \pm \text{क्षे}' = \text{हा.}\frac{\text{ल}}{\text{अ}}$$

$$\therefore \frac{\text{गु.भा}' \pm \text{क्षे}'}{\text{हा}} = \frac{\text{ल}}{\text{अ}} = \text{ल}'$$

एतदवलोकमेनैव स्फुटमवगम्यते यदपवर्त्तितभाज्यक्षेपाभ्यामागता लब्धि रपवर्त्तनाङ्कविभक्ताऽऽगच्छति। अतो वास्तवलब्धिज्ञानाय अपवर्त्तनाङ्कगुणिता सा विधेया किन्तु गुणस्तु वास्तव एव आयास्यति।

एवञ्च हारक्षेपयोरपवर्त्तनसम्भवे

$$\text{यथो } \frac{\text{गु.भा} \pm \text{क्षे}}{\text{अ}} = \frac{\text{ल.हा}}{\text{अ}} \text{ क्त समीकरणम्}$$

$$= \frac{\text{गु.}}{\text{अ}} \times \text{भा} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{अ}} = \text{ल} \times \frac{\text{हा}}{\text{अ}}$$

वा $गु'.भा \pm क्षे' = ल \times हा'$

$$\therefore \frac{गु'.भा \pm क्षे'}{हा'} = ल$$

अथैतदवलोकनेनापि स्फुटमवगम्यते यदपवर्त्तिताभ्यां हारक्षेपाभ्यामागता- लब्धि र्वास्तवा किन्तु गुणोऽपवर्त्तनाङ्कविभक्त आगच्छतीति गुणोऽपवर्त्तनसंगुणः सन्नेव वास्तवः। लब्धिस्तु वास्तवैवागच्छतीति यथावत् संरक्षणीयेति सर्वं निरवद्यम्।

योगजे तक्षणाच्छुद्धे गुणाप्ती स्तो वियोगजे।
धनभाज्योद्भवे तद्वद् भवेतामृणभाज्यजे ॥७॥

सुधा—योगज (धनक्षेप वश आगत) गुण लब्धि को अपने-अपने तक्षण में (क्रमशः हार भाज्य में) घटाने से ऋण क्षेप में वे आ जाते हैं।

इसी प्रकार धनभाज्योत्थ गुणलब्धि को अपने तक्षण में घटाने से ऋण भाज्य में ये होते हैं ॥ ७ ॥

वासना—कुट्टक प्रश्नानुसारेण।

$$\frac{भा\ गु + क्षे}{हा} = ल \quad \therefore गु\ भा + क्षे = ल.हा.$$

हारगुणितभाज्यतः पक्षावुभावपि शोधितौ

$हा.भा - (गु.भा + क्षे) = हा.भा - ल.हा$

$\therefore हा \times भा - गु.भा - क्षे = हा (भा - ल)$

या $भा (हा - गु) - क्षे = हा (भा - ल)$

अतः $\frac{भा (हा - गु) - क्षे}{हा} = भा - ल$

अत्र कुट्टक विधिना साधितौ गुणलब्धी क्रमेण $हा - गु$, $भा - ल$। एतौ च स्वस्वतक्षणाच्छोधितौ तदा स्वरूपम्।

$$लब्धिः = भा - (भा - ल) = ल$$

$$गुणः = हा - (हा - गु) = गु$$

अतः स्फुटमवसीयते यद् धनक्षेपसिद्धौ गुणलब्धी स्वतक्षणशोधितौ क्षय- क्षेपजौ भवत इत्युपन्नं सर्वम्।

गुणलब्ध्योः समं ग्राह्यं धीमता तक्षणे फलम्।
हरतष्टे धनक्षेपे गुणलब्धी तु पूर्ववत् ॥८॥
क्षेपतक्षणलाभाढ्या लब्धिः शुद्धौ तु वर्जिता।

सुधा—तक्षण करते समय गुण और लब्धि दोनों में समान ही फल लेना चाहिए। अर्थात् ऊर्ध्वौ विभाज्येन दृढ़ेन तष्ट इत्यादि कथनानुसार पूर्व साधित राशिद्वय को तष्टित करते समय ऊर्ध्वस्थित राशि में यद् गुणित भाज्य घटावें तद्गुणित ही हर अधः स्थित राशि मे घटाना चाहिए। राशियुग्म में जहाँ थोड़ा तक्षण फल मिले उसी के समान दूसरे में भी फल ग्राह्य है।

हाराधिक क्षेप रहने पर हार से क्षेप को तष्टित कर तष्टित क्षेप पर से ही पूर्वकथनानुसार आनीत गुण एवं लब्धि में गुण वास्तव ही आता है। किन्तु लब्धि में तक्षण फल जोड़ने पर वास्तविक लब्धि होगी'।

ऋण क्षेप में हर तष्टित क्षेप से' 'योगजे तक्षणाच्छुद्धे गुणाप्ती स्तो वियोगजे" के अनुसार गुण लब्धि लावें। इस तरह आगत गुण वास्तव गुण होता है किन्तु लब्धि में तक्षण फल घटाने से वास्तव लब्धि होगी।

वासना—गुणलब्ध्योः समंग्राह्यमित्यस्य वासना पूर्वमुल्लिखितया "ऊर्ध्वौ विभाज्येन दृढेन तष्ट" इत्यादेर्वासनयैव स्फुटा। हरतष्टे धनक्षेप इत्यादे र्वासनार्थं कल्प्यते कुट्टकानुसारम् :—

गु० भा $\pm$ क्षे = हा ल = (१)

अत्र यदि क्षे > हा अर्थात्क्षेपाद्धारोऽल्पश्तदा

$$\frac{\text{क्षे}}{\text{हा}} = \text{ल}' + \frac{\text{क्षे शे}}{\text{हा}} \quad \therefore \text{क्षे} = \text{हा. ल}' + \text{क्षे शे}$$

अनेन पूर्वांकितैकस्वरूपे उत्थापिते

गु. भा $\pm$ हा. ल' $\pm$ क्षे शे = हा. ल।

$$\therefore \frac{\text{गु. भा} \pm \text{हा ल}' \pm \text{क्षे शे}}{\text{हा.}} = \text{ल}$$

$$\text{वा} \ \frac{\text{गु. भा} \pm \text{क्षे शे}}{\text{हा}} \pm \text{ल}' = \text{ल}$$

$$\text{यतोऽत्र} \ \frac{\text{गु. भा} \pm \text{क्षे शे}}{\text{हा}} = \text{ल}'$$

अतो वास्तवा लब्धिः = ल $\mp$ ल', एतेन क्षेपतक्षणलाभाढ्या लब्धिः शुद्धौ तु वर्जितेत्युपपन्नम्।

अथवा भागहारेण तष्टयोः क्षेपभाज्योः ॥ ९ ॥
गुणः प्रागवत्ततोलब्धिर्भाज्याद्धतयुतोद्धृतात्।

सुधा—अथवा हार से क्षेप और भाज्य को तष्टित करे पूर्वोक्त रीति से गुण लब्धि लावें। तथाऽऽगत गुण वास्तव गुण होगा। लब्धि वास्तव नहीं होगी। लब्धि के लिए आगत गुण को भाज्य से गुणा कर क्षेप जोड़ दें, और पुनः हार से भाग लें तो आई हुई लब्धि ही वास्तव लब्धि होगी।

यह स्थिति हराधिक भाज्य और क्षेप के रहने पर ही होगी।

वासना—कुट्टकप्रश्नानुसारम्—

$$ल = \frac{भा. गु \pm क्षे}{हा} \quad \therefore ल. हा = भा. गु \pm क्षे = (१).$$

यदि भाज्यक्षेपौ हारतोऽधिकौ तदा

$$\frac{भा}{हा} = ल' + \frac{भा शे}{हा} \quad \therefore भा = हा. ल' + भा. शे.$$

$$एवम् \frac{क्षे}{हा} = ल'' + \frac{क्षे शे}{हा} \quad \therefore क्षे = ल''. हा + क्षे. शे$$

अथैताभ्यां भाज्यक्षेपस्वरूपाभ्यां पूर्वोल्लिखितैकस्वरूपे उत्थापिते तदा हा. ल = गु (हा. ल' + भाशे) $\pm$ (ल''. हा + क्षे शे) = गु. हा. ल' + गु. भा. शे $\pm$ ल''. हा $\pm$ क्षे शे = हा.ल.

$$\therefore हा (गु.ल' \pm ल'') + गु. भा. शे \pm क्षे शे = हा. ल$$

$$\therefore गु. ल' \pm ल'' + \frac{गु. भा शे \pm क्षे शे}{हा} = ल.$$

एवमुपरितनस्वरूपावलोकनेन स्फुटमित्यवगम्यते यत् गुणघ्नभाज्यशेषक्षेपशेषहारैः कुट्टकविधिनाऽऽनीतो गुणो वास्तव एव गुणः। लब्धिरवास्तवा। अतो वास्तवगुणज्ञानान्तरं क्षेपयुतोनादगुणघ्नभाज्याद्धारभक्ताल्लब्धिराचार्येणानीता। एतेनोपपन्नं सर्वम् ॥

क्षेपाभावोऽथवा यत्र क्षेपः शुद्ध्येद्धरोद्धृतः। १०॥
ज्ञेयः शून्यं गुण स्तत्र क्षेपो हारहृतः फलम् ॥

सुधा—जिस कुट्टक प्रश्न में क्षेप का अभाव या हार से शेष में भाग लेने पर पूर्ण लब्धि हो जाय, वहाँ शून्य ही गुण होता, और क्षेप में हार से भाग लेने पर आगत लब्धि ही लब्धि होगी।

वासना—क्षेपाभाववति कुट्टकप्रश्ने

$$\frac{गु. भा \pm ०}{हा} = ल$$

एवं विधप्रश्ने स्वोध्वें हृतेऽन्येन युते तदन्त्यमित्यादिनाऽऽनीतौ लब्धिगुणौ शून्या वेवागमिष्यतः। अतोऽत्र गुणस्य शून्यत्वं स्फुटम्। यत्र च हरोद्धृतः क्षेपः शुद्धये- त्तत्र हरतष्टे घन'क्षेपे' इत्यादिना हरोद्धृते क्षेपे शेषं शून्यम्। तेन लब्धिगुणा- वपि शून्यसमौ। क्षेपतक्षणलाभेन लब्धिरिति। हारहृतोऽत्र क्षेपः फलमिति' कथनं संयुक्तिकम्॥

इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते

ते वा भवेतां बहुधा गुणाप्ती ॥ ११ ॥

सुधा :—इष्टगुणित भाज्य हर को आगत लब्धि गुण में क्रमशः जोड़ देने पर अनेकविध लब्धि एवं गुण होते हैं।

वासना:—कुट्टकप्रश्नानुसारम्

गु×भा ± क्षे = हा. ल.।

समानपक्षयोः समे युक्तेऽपि पक्षद्वयमपि सममतः पक्षयोः 'इ. भा. हा' इति योजिते।

गु० भा ± क्षे + इ. भा. हा = हा, ल + इ. भा. हा

∴ भा (गु + इ हा) ± क्षे = हा (ल + इ. भा)

$$\therefore \frac{\text{भा (गु + इ. हा) ± क्षे}}{\text{हा}} \; \text{ल + इ. भा}$$

अत्र इष्टगुणितहारयुक्तो गुणो गुणः, इष्टघ्नभाज्ययुता लब्धिर्लब्धिरिति सूपपद्यते इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते ते वा भवेतां बहुधा गुणाप्तीति।

उदाहरणम्

एकविंशतियुतं शतद्वयं

यद्गुणं गणक ! पञ्चषष्टियुक्।

पञ्चवर्जितशतद्वयोद्धृतं

शुद्धिमेति गुणकं वदाशु तम् ॥१॥

न्यासः—भा २२१। हा १९५। क्षे ६५।

अत्र परस्परं भाजितयोर्भाज्यभाजकयोः शेषः १३। अनेन भाज्य- हार क्षेपा अपवर्तिता जाता दृढाः भा १७। हा १५। क्षे ५। अनयो

दृढभाज्यहारयोः परस्परं भक्तयो र्लब्धिमधोऽधस्तदधः क्षेपस्तदधः शून्यं निवेश्यमिति न्यस्ते जाता वल्ली १
७
५
०

उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हत इत्यादिकरणेन जातं राशिद्वयम् ४० / ३५ । एतौ दृढभाज्यहाराभ्यामाभ्यां १७ / १५ । तष्टौ शेषमितौ लब्धिगुणौ ६ / ५ । अनयोः स्वतक्षणमिष्टगुणं क्षेप इत्यथ वा लब्धिगुणौ २३ / २० । ४० / ३५ वा इत्यादि ।

सुधा—हे गणक ! कौन सा गुणक है जिसे २२१ से गुणकर ६५ जोड़ दें और १९५ से भाग लें तो निःशेष हो जाता है । उस गुणक को बतलाओ ।

उदाहरण

यहाँ पर भाज्य = २२१, हार = १९५, क्षेप = ६५ है । भाज्य, हार और क्षेप का पहले महत्तम समापवर्त्तक लाया गया । महत्तम समापवर्त्तक लाने के लिए पहले भाज्य और हार का "परस्परं भाजितयोर्ययोर्यः" के अनुसार १९५ से २२१ में भाग लेने पर शेष = २६, पुनः १९५ में २६ से भाग देने पर शेष = १३ । इस नवीन शेष से प्रथम शेष २६ में भाग देने पर शेष का अभाव हो जाता है । अतः भाज्य और हार का महत्तम समापजर्त्तक यही हुआ । पुनः इस मह० समापवर्त्तक और क्षेप का महत्तम समापवर्त्तक १३ (तेरह) ही होगा क्योंकि ६५ में १३ से निःशेष भाग लग जाता है । अतः भाज्य हार और क्षेप का महत्तम समापवर्त्तक = १३ । इससे भाज्य, हार एवं क्षेप को अपवर्तित करने से दृढ भा = १७ दृढ़हा = १५ दृढ़ क्षेप = ५ हुए ।

इन दृढ़ भाज्य हारों में "मिथो भजेत्तौ दृढभाज्यहारौ" इत्यादि के अनुसार परस्पर भाग लेने तथा लब्धियों को एक के नीचे दूसरे को रखने के बाद में क्षेप और अन्त में शून्य को रखने से निष्पन्न वल्ली = १
७
५
०

यहाँ उपान्तिम ५ से उपरितन ७ को गुणा कर शून्य जोड़ने से ३५ हुए । पुनः ३५ से ऊपर वाले एक को गुणा कर ५ जोड़ने से ४० / ३५ ये दो राशियाँ हुईं ।

इन राशियों में ऊर्ध्वस्थ ४० में दृढ़ भाज्य १७ से भाग देने पर शेष ६ = लब्धि हुई और अधरस्थ ३५ में दृढ़ हार १५ से भाग देने पर शेष = ५ = गुणक हुआ ।

अनेकविध लब्धि गुण लाने के हेतु

"इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते ते वा भवेतां बहुधा गुणाप्ती"

इष्ट एक से गुणित भाज्य १७ में आगत लब्धि ६ जोड़ने से १७ + ६ = २३ = लब्धि'। एवम् १५ को एक से गुणाकर ५ जोड़ने से १५ + ५ = गुण'। इस तरह विविध इष्ट मानने पर अनेकविध लब्धि गुणक होंगे।

तात्पर्य यह कि ५, २० आदि ही गुणक है जिसे २२१ से गुणाकर ६५ जोड़ने और १९५ से भाग लेने पर ६, २३ आदि पूर्ण लब्धियाँ होती हैं।

उदाहरण :—

शतं हृतं येन युतं नवत्या विवर्जितं वा विहृतं त्रिषष्टया।
निरग्रकं स्याद् वद मे गुणं तं स्पष्टं पटीयान् यदि कुट्टकेऽसि॥

न्यास :—भा १०० । हा ६३ । क्षे ९० ।

	१			
	१	उपान्तिमेनेत्यादिना जातं राशिद्वयं		
	१			
वल्ली	५	२४३०	पूर्ववल्लब्धिगुणौ	३०
	२	१५३०		१८
	९०			
	०			

अथवा भाज्यक्षेपौ दशभिरपवर्तितौ भा १० । हा ६३ । क्षे ९ ।

	०
	६
एभ्यः पूर्ववद् वल्ली	३
	९
	२

उपान्तिमेनेत्यादिना राशिद्वयम् २७ / १७१

पूर्ववज्जातौ लब्धिगुणौ ७ / ४५ अत्र लब्धयो विषमा

इति स्वतक्षणाभ्यामाभ्यां १० / ६३ शोधितौ जातौ लब्धिगुणौ ३ / १८

अत्र लब्धिर्न ग्राह्या गुणघ्नभाज्ये क्षेपयुते हारभक्ते लब्धिश्च ३०। अथवा भाज्यक्षेपापवर्तनेन १० पूर्वानीता लब्धिः ३ गुणिता जाता सैव लब्धिः ३०।

अथवा हरक्षेपौ नवभिरपवर्तितौ भा १०० । हा ७ । क्षे १० ।

पूर्ववद् वल्ली $\begin{matrix}१४\\३\\१०\\०\end{matrix}$ अतो जातं राशिद्वयम् $\begin{matrix}४३०\\३०\end{matrix}$ तक्षणे

जातम् $\begin{matrix}३०\\२\end{matrix}$ हारक्षेपापवर्तनेन ९ गुणं संगुण्य जातौ लब्धिगुणौ

तावेव $\begin{matrix}३०\\१८\end{matrix}$ अथवा भाज्यक्षेपौ चापवर्त्य न्यासः—भा १० । हा ७ ।
क्षेपः १ ।

अत्र जाता वल्ली $\begin{matrix}१\\२\\१\\०\end{matrix}$ पूर्ववज्जातं राशिद्वयम् $\begin{matrix}३\\२\end{matrix}$

तक्षणाज्जातं तदेव $\frac{३}{२}$

भाज्यहारक्षेपापवर्त्तनेन क्रमेण लब्धिगुणौ गुणितौ
जातौ तावेव $\begin{matrix}३०\\१८\end{matrix}$ गुणलब्ध्योः स्वहारौ क्षेपावित्यथवा

लब्धिगुणौ $\begin{matrix}१३०\\८१\end{matrix}$ वा $\begin{matrix}२३०\\१४४\end{matrix}$ इत्यादि ।

योगजे गुणाप्ती $\begin{matrix}१८\\३०\end{matrix}$ स्वतक्षणाभ्यामाभ्यां $\begin{matrix}६३\\१००\end{matrix}$ शुद्धे जाते

नवति शुद्धौ गुणाप्ती $\begin{matrix}४५\\७०\end{matrix}$ वा $\begin{matrix}१०८\\१७०\end{matrix}$ वा $\begin{matrix}१७१\\२७०\end{matrix}$ इत्यादि

सुधा :—कौन सा अंक है जिसे एक सौ से गुणा कर नब्बे जोड़ या घटा देते हैं और तिरेसठ से भाग देते हैं तो निःशेष हो जाता है ? यदि कुट्टक गणित में तुम प्रवीण हो तो कहो ।

उदाहरण :—भाज्य = १००, हार = ६२ क्षेप = ९०

यहाँ परस्परं भाजितयोर्ययोर्यः के अनुसार भाज्य हार में परस्पर भाग देने पर चूँकि अन्तिम शेष एक होता है, अतः एक ही अपवर्त्तनाङ्क हुआ । अतः इस से भाज्य हार में भाग देने पर भी भाज्य हार ही दृढ़ भाज्य हार हुए । उपर्युक्त इन भाज्य हारों से परस्पर भाग देने, तथा लब्धियों को अधोऽधः क्रम से रखने, ततः पर क्षेप और अन्तिम में शून्य रखने से आगत वल्ली =

१
१
१　यह हुई। स्वोर्ध्वे हतेऽन्त्येनयुते इत्यादि के
२
२　अनुसार २४३० ये दो राशियाँ प्राप्त हुईं।
१　　　१५३०
९०
०

इन्हें अपने-अपने भाज्य हार से तष्टित करने पर लब्धि = ३० गुण = १८। अर्थात् २४३० में १०० से भाग देने पर शेष = ३० = लब्धि। १५३० में ६३ से भाग देने पर शेष = १८ = गुण।

अथवा "समपवर्तितयोर्युतिभाज्ययोः" के अनुसार भाज्य एवं क्षेप में दश से अपवर्त्तन देने से नवीन भाज्य हार क्षेप क्रमशः भा = १०, हा = ६३ क्षेप = ९

पूर्वोक्त रीति से वल्ली　० यह हुई
६
३
स्वोर्ध्वे हतेऽन्त्येन युते　९　तदन्तेत्यादि के अनुसार राशि —
०

युग्म = २७/१७१　ऊर्ध्वस्थित २७ को दृढ़ भाज्य १० से तष्टित करने पर शे = ७ = लब्धि। अधः स्थित १७१ को हार ६३ से तष्टित करने पर शेष = ४५ = गुण।

यहाँ लब्धियाँ विषम हैं अतः इन लब्धि गुणों को अपने २ भाज्य हारों में क्रमशः घटाने पर लब्धि = ३, गुण=१८ हुए। यहाँ चूंकि अपवर्तित भाज्य से यह लब्धि आई है अतः वास्तव नहीं है। वास्तव लब्धि के लिए आगत लब्धि ३ को अपवर्त्तनांक १० से गुणने पर ३ × १० = ३० यही वास्तव लब्धि हुई। किन्तु पूर्वागत गुण १८ वास्तव ही है।

अथवा—समपवर्त्तितयोर्युतिभाजकयोः के अनुसार हार क्षेप में ९ से अपवर्त्तन देने पर नवीन भाज्य = १००, हार = ७ क्षेप = १०

इन भाज्य हार क्षेपों पर से वल्ली　१४　यह हुई।
३
१०
०

पूर्वोक्त रीति से राशिद्वय = ४३०/३० को नवीन भाज्य हार से तष्टित करने पर लब्धि = ३० = वास्तव।

गुण = २ = अवास्तव। इसे अपवर्तनांक ९ से गुणने पर २ × ९ = १८ = वास्तव गुण।

अथवा—पहले भाज्य और क्षेप में १० से अपवर्त्तन देकर पुनः हार: क्षेप में ९ से अपवर्त्तन दिया गया। इस प्रकार नवीन भाज्य = १० नवीन हार = ७ नवीन क्षेप = १ अर्थात् "समपवर्तितयोर्युति भाज्ययोः" और समपवर्त्तियोर्युति भाजकयोः" दोनों का प्रयोग किया गया।

पूर्वोक्त रीति से वल्ली = १ यह हुई।
२
१
स्वोर्ध्वेहतेऽन्त्येनयुते इत्यादि ० द्वारा $\frac{3}{2}$ राशियाँ आई। दोनों अवास्तव लब्धि गुण हैं। अतः वास्तव लब्धि = ३ × (१० = भाज्य क्षेप का अपवर्तनांक) = ३० = वास्तव लब्धि।
इसी तरह २ × (९ = हार क्षेप का अपवर्तनांक) = १८ = वास्तव गुण।

इस प्रकार उपर्युक्त उदाहरण में ३० लब्धि और १८ = गुण। अर्थात् १८ एक ऐसी राशि है जिसे १०० से गुणाकर ९० जोड़ दें पुनः ६३ से भाग देते है तो ३० लब्धि आती है।

अनेकविध लब्धि गुण लाने के लिए "इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते ते वा भवेतां बहुधा गुणाप्ती" के अनुसार एकद्वित्र्यादि इष्ट मानकर इष्टगुणित भाज्य हार में इन लब्धि गुणों को जोड़ने से
ल' = १३०, गु' = ८१, । इसी प्रकार दो इष्ट से
ल'' = २३०, गु'' = १४४ आदि समझना।

ये लब्धि गुण धनक्षेप सम्बन्धी हुए। उपर्युक्त उदाहरण—प्रश्न में ९० जोड़ने और घटाने की भी बात कही गई है। अर्थात् कौन सी राशि है जिसे १०० से गुणाकर ९० घटाने तथा ६३ से भाग देने पर निः शेष हो जाती है। इसके उत्तर के लिए पूर्वागत धन क्षेप सम्बद्ध लब्धिगुण $\frac{३०}{१८}$ को भाज्य हार में क्रमशः घटाने से १०० − ३० = ७० = लब्धि, ६३ − १८ = ४५ = गुण। ये लब्धि-गुण ऋणक्षेप सम्बद्ध हुए।

उदाहरणम्—

यद्गुणा क्षयगषष्टि रन्विता
वर्जिता च यदि वा त्रिभिस्ततः।

स्यात्त्रयोदशहृता निरग्रका तं
गुणं गणक ! मे पृथग् वद ॥ ३ ॥

न्यास :—भा ६० । हार १३ । क्षेपः ३ ।

प्रागवज्जाते धनभाज्ये धन क्षेपे गुणाप्ती $\frac{११}{५१}$ । एते

स्वतक्षणाभ्याभ्यां $\frac{१३}{६०}$ शुद्धे जाते ऋणभाज्ये धनक्षेपे $\frac{२}{९}$ ।

अत्र भाज्यभाजकयोर्विजातीययोर्भागहारेऽपि चैवं निरुक्त मित्युक्तत्वाल्लब्धे ऋणत्वं ज्ञेयम् $\frac{२}{९}$ । पुनरेते स्वतक्षणाभ्यामाभ्यां

$\frac{१३}{६०}$ शुद्धे जाते ऋणभाज्ये ऋण क्षेपे गुणाप्ती $\frac{११}{५१}$ ।

सुधा:—कौन सी राशि है जिसे ऋणात्मक साठ से गुण कर तीन जोड़े या घटा देते हैं पुनः तेरह से भाग देते हैं तो निःशेष हो जाता है, हे गणक उस राशि (गुण) को अलग अगल बतलाओं ।

उदाहरण

प्रश्नानुसार भाज्य = ६०, हार = १३, क्षेप = +३ पूर्वोक्तानुसार धन क्षेप में वल्ली ४ १ १ १

।रचोदूर्वे हृतेऽन्त्येनयुते' इत्यादि

के अनुसार आगत राशिद्वय १ ३ ०

$=\frac{६०}{१५}$ अपने अपने भाज्यहारों से तक्ष्टित

करने पर लब्धि=९, गुण=२ । ये लब्धि गुण धन भाज्य एवं ऋण क्षेप सम्बन्ध हुए क्योंकि विषम वल्ली है । उन्हें अपने अपने तक्षणों से शुद्ध करने पर ६०--९ =५१=लब्धि, तथा १३ - २=११=गुण । ये धनभाज्य तथा धनक्षेप सम्बद्ध हुए । पुनः इन्हें अपने अपने तक्षणों से घटाने पर ऋणभाज्य धनक्षेप सम्बद्ध लब्धि=६०--५१=९, तथा १३--११=२=गुण हुए ।

यहां चूंकि भाज्य हर का विजातीय है, अतः ''भागहारेऽपि चैवंनिरुक्तम्'' के अनुसार पूर्वोक्त ९ को ऋण समझना । पुनः इन्हें अपने अपने तक्षण में घटाने से ५१°=लब्धि, ११=गुणक ये लब्धि गुणक ऋण भाज्य ऋक्षेप सम्बद्ध हुए ॥

ऋणभाज्ये ऋणक्षेपे धनभाज्यविधिर्भवेत् ।
तद्वत् क्षेपे ऋणगते व्यस्तं स्यादृणभाजके ।।
धनभाज्योद्भवे तद्वत् भवेतामृणभाज्यजे ।

इति मन्दावबोधार्थं मयोक्तम्। अन्यथा 'योगजे तक्षणाच्छुद्धे इत्यादिनैव सिद्धं यत् ऋणधनयोगो वियोग एव, अत एव भाज्यभाजकक्षेपाणां धनत्वमेव प्रकल्प्य गुणाप्ती साध्ये ते योगजे भवतः। ते स्वतक्षणाभ्यां शुद्धे वियोगजे कार्ये। भाज्ये भाजके वा ऋणगते परस्परभजनाल्लब्धयः ऋणगताः स्थप्या इति किं तेन प्रमासेन तथा कृते सति भाज्यभाजकयोरेकस्मिन् ऋणगते गुणाप्ती "द्वौ राशी क्षिपेत्तत्र" इत्यादिना परोक्तसूत्रेण लब्धौ व्यभिचारः स्यात्।

सुधा:—ऋण भाज्य एवं ऋण क्षेप में धन भाज्य मान कर आनीत लब्धि गुण ही वास्तविक होते हैं। यदि भाज्य तथा क्षेप इन दोनों में एक ऋण दूसरा धन हो तो ऋण को धन मानकर आनीत लब्धि गुणों को अपने अपने तक्षण में घटाने से वास्तव लब्धि गुण होते है।

ऋण भाज्य एवं ऋण क्षेप में आनीत लब्धि—गुणों का दो बार अपने अपने तणण में घटाने से वास्तव लब्धि गुण होते हैं।

धनभाज्योद्भव लब्धि गुणों को अपने अपने तक्षण में एक बार ही घटाने से ऋण भाज्यज लब्धि गुण होते। क्षेप तथा हार दोनों यदि ऋणात्मक हो तो विपरीत समझना अर्थात् ऋण क्षेपज गुण लब्धि को तक्षण विशुद्ध करना और गुण को ऋण समझना।

विशेष:- सुबोधिनी टीकाकार श्री जीवनाथ भाजी ने अपनी टीका- "भाज्य भाजकयो र्मध्ये एकस्यैव ऋणत्वे लब्धिमात्रस्य ऋणत्वं ज्ञेयम्, भागहारेऽपि चैवं निरुक्तमित्युक्तत्वत्." कहा है, जिसके अनुवादक विमला टीकाकार ने "यदि भाज्य, हार इन दोनो में कोई एक ऋण, तदितर धन हो तो लब्धि ऋण होगी" कहा है।

वस्तुत: मेरे विचार से उपर्युक्त कथन कि भाज्य भाजकों में से अन्यतर के ऋण होने से लब्धि ऋणात्मक होगी यह तभी संगत है जब कि गुण गुणित भाज्य क्षेपयुक्त होने पर भाजक से विजातीय हो। गुणगुणित भाज्य से धन क्षेप के अधिक होने पर ऋण भाज्य में भी लब्धि धनात्मक होगी। ऋण हार में भी गुणगुणित भाज्य से अधिक ऋण क्षेप होने पर लब्धि धनात्मक होगी। अत: ऋण लब्धि होने के लिए भाज्य, हार, इन दोनों में से अन्यतर

का ऋणात्मक होना ही पर्याप्त नहीं है प्रत्युत गुणगुणित भाज्य, क्षेप से युतोन होने पर हार का विजातीय होना भी आवश्यक है।

यहाँ ग्रन्थकार का कहना है कि धनभाज्योद्भव गुण लब्धि को ऋण भाज्य में भी समझना यह कथन मैंने मन्द बुद्धियों के लिए कहा है। अन्यथा "योगजे—तक्षणाच्छुद्धे" इत्यादि रीति से ही लब्धि गुण की सिद्धि होती है। चूंकि ऋण और धन का योग उन दोनों का अन्तर ही होता है। इसलिए भाज्य, हार, क्षेप इन सबों को धन कल्पना कर आनीत गुण लब्धि धन क्षेप में, और इन्हें अपने-अपने तक्षण में घटाने से ऋण क्षेप में वे होंगे।

भाज्य या भाजक के ऋणात्मक होने पर परस्पर भाग लेने पर लब्धियों को ऋणात्मक के रूप में स्थापित करना गौरव पूर्ण प्रयास लब्धि गुणके आनयन के लिए व्यर्थ है। क्योंकि वैसा करने पर भाज्य और भाजक में एक के ऋणात्मक होने पर उपान्तिम से ऊर्ध्वस्थ को गुण ने तथा अन्तिम को जोड़ने इत्यादि करने से आगत लब्धि गुण आयास पूर्ण ही नहीं, बल्कि व्यभिचार पूर्ण भी होते हैं।

जैसा कि—प्रस्तुत उदाहरण में

भाज्य – ६०̇, हार = १३ क्षे ३

	४̇	
पूर्वोक्त रीति से वल्ली	१̇	'स्वोर्ध्वेहतेऽन्त्येनयुते'
विषम है	१̇	इत्यादि से राशिद्वय ६९̇ में १५
	१̇	
	१̇	
	३̇	
	०	

स्वस्वहार से तष्टित करने पर लब्धि = ९̇ गुण = २। वल्लीस्थ लब्धियाँ विषम हैं अतः "विषमास्तदानीं यदागतौ लब्धिगुणौ विशोध्यौ स्वतक्षणाच्छेषमितौ तु तौ स्तः" के अनुसार धनक्षेप में लब्धि = ५१̇, गुण = ११ किन्तु इस गुण ११ से आलाप घटित नहीं होता प्रत्युत $\frac{११ \times ६०̇ + ३}{१३} = \frac{६६०̇ + ३}{१३}$

$= \frac{६५७̇}{१३} = ५०̇ + \frac{७̇}{१३}$ अतः पूर्वानीत गुण उपयुक्त नहीं आया क्योंकि निश्शेष लब्धि नहीं आई। अतः "लब्धौ व्यभिचारः" यह कहना उपलक्षण मात्र है बल्कि गुणेऽपि व्यभिचारः कहना चाहिए।

पूर्वागत लब्धि = $\dot{९}$, गुण = २, पर से आलाप मिलाने पर $\frac{२\times\dot{६०}+३}{१३}$

$\frac{=\dot{११७}}{१३}=\dot{९}$ = लब्धि आलाप संगत होने से यही लब्धि गुण यदि कहें तो यह भी सम्भव नहीं है क्योंकि वल्लीस्थ लब्धियों के विषम होने के कारण धनक्षेप में लाने के लिए अपने तक्षण में घटाना आवश्यक है। परन्तु तक्षण से शोधन नहीं किया गया। अतः व्यभिचार यथावत् रहा।

वक्ष्यमाण उदाहरण में भाज्य = १८, हा = $\dot{११}$ क्षे = १० हैं। इन भाज्य हार क्षेपों से पूर्वोक्तवत् वल्ली = $\begin{matrix}\dot{१}\\\dot{१}\\\dot{१}\\\dot{१}\\१०\\०\end{matrix}$

पूर्ववत् राशियुग्म = $\begin{matrix}५०\\\dot{३०}\end{matrix}$ } भाज्य हारो से

तष्टित करने पर = $\begin{matrix}१४\\\dot{८}\end{matrix}$ } इन लब्धि गुणों पर से

आलाप = $\frac{\dot{८}\times१८+१०}{\dot{११}}=\frac{\dot{१४४}+१०}{\dot{११}}=\frac{\dot{१३४}}{\dot{११}}=१२+\frac{२}{११}$.

अर्थात् शेष यहाँ २ बच गए। अतः व्यभिचार हुआ। इस प्रकार ऋण भाज्य में विषम लब्धि में, और ऋण हार में सम लब्धि में व्यभिचार होते हैं यह सिद्ध हुआ।

उदाहरम्

अष्टादशहताः केन दशाढ्या वा दशोनिताः।
शुद्धं भागं प्रयच्छन्ति क्षयगैकादशोद्धृताः ॥१०॥

न्यासः। भा १८। हा ११। क्षे १०।

अत्र भाजकस्य धनत्वं प्रकल्प्य साधितौ लब्धगुणौ $\begin{matrix}१४\\८\end{matrix}$। एतावेव ऋणभाजके, किन्तु लब्धेः पूर्ववदृणत्वं ज्ञेयं तथा कृते जातौ लब्धिगुणौ $\begin{matrix}\dot{१४}\\८\end{matrix}$ ऋणक्षेपे तु योगजे तक्षणाच्छुद्धे इत्यादिना लब्धिगुणौ $\begin{matrix}४\\३\end{matrix}$। भाजकस्य धनत्वे ऋणत्वे वा लब्धिगुणावेतावेव परन्तु भाजके भाज्ये वा ऋणगते लब्धेर्ऋणत्वं सर्वत्र ज्ञेयम्।

सुधा—कौन सी राशि है कि जिसे अठारह से गुणा कर दस जोड़ने या घटाने, और ऋणात्मक ग्यारह से भाग लेने पर विशुद्ध (निश्शेष) हो जाती है?

प्रश्नानुसार भा = १८, क्षे = ± १०
हार = $\dot{११}$।

यहाँ हार को भी धनात्मक मान कर भाज्य हार क्षेप के धन रहने पर पूर्वोक्त रीति से वल्ली :— १
१
१
१
१०
० सम वल्ली हुई।

स्वोर्ध्वेहतेऽन्त्येन युते आदि के अनुसार राशिद्वय ५० / ३० भाज्य हार से तष्टित करने पर १४ = ल, ८ = गुण। येही लब्धि गुण हार के ऋणात्मक होने पर भी होंगे किन्तु हार के ऋणात्मक रहने पर लब्धि ऋण होगी क्योंकि गुण गुणित भाज्य में दश मात्र क्षेप जोड़ने या घटाने पर अवशिष्ट धनात्मक रहेगा, फिर ऋण से भाग देने पर "भागहारेऽपिचैवंनिरुक्तम्" के अनुसार लब्धि ऋणात्मक ही होगी।

आलाप भी $\frac{८ \times १८ + १०}{११} = \frac{१५४}{११} = १४$ ।

उदाहरणम्

येन संगुणिताः पञ्च त्रयोविंशतिसंयुताः।
वर्जिता वा त्रिभिर्भक्ता निरग्राःस्युः स कोगुणः ।।११।।

न्यासः—भा ५ । हा ३ । से २३ ।

अथ वल्ली १ पूर्ववज्जातं राशिद्वयम् ४६ / २३
१
२३
०

अत्र तक्षणेऽधोराशौ सप्त लभ्यन्ते ऊर्ध्वराशौ तु नव लभ्यन्ते ते नव न ग्राह्याः "गुणलब्ध्योः समंग्राह्यं धीमता तक्षणे फलम्" इत्यतः सप्तैव ग्राह्याः इति जातौ लब्धि गुणौ ११ / २ योगजौ। एतौ स्वस्वतक्षणाभ्यां शोधितौ जातौ ऋणक्षेपे ६ / १। "इष्टहतस्वस्वहरेण युक्ते इति द्विगुणितौ स्वस्वहारौ क्षेप्यौ यथा धनलब्धिः स्यादिति कृते जातौ लब्धिगुणौ ४ / ७ | एवं सर्वत्रज्ञेयम्।

अथवा "हरतष्टे धनक्षेप" इति

न्यासः भा ५ । हा । ३ । क्षे २ ।

पूर्ववज्जातौ लब्धिगुणौ योगजौ $\frac{४}{२}$ । एतौ स्वतक्षणाभ्यां शुद्धौ $\frac{१}{१}$ जातौ वियोगजौ । क्षेपतक्षणलाभाढ्या लब्धिरिति क्षेपतक्षणलाभेन ७ योगजलब्धियुता ११ जाता योगजैव लब्धिः । "शुद्धौ तु वर्जिता" इति तक्षणलाभेन लब्धिरियं १ वर्जिता ६̊ । धनलब्ध्यर्थं द्विगुणे हरे क्षिप्ते जातौ तावेव लब्धिगुणौ $\frac{४}{७}$ । "अथवा भागहारेण तष्टयोः" इति ।

न्यासः—भा २ । हा ३ । क्षे २ ।

अत्रापि जातं राशिद्वयम् $\frac{२}{२}$ । अत्रापि जातः पूर्व एव गुणः २ । लब्धिस्तु "भाज्याद्धतयुतोद्धृतात्" इति गुणः २ गुणितो भाज्यः १० । क्षे २३ युतो ३ हरभक्तो लब्धिः सैव ११ ।

सुधा—कौन सी राशि है जिसे पाँच से गुणा कर गुणनफल में दस जोड़ या घटा देते हैं, और तीन से भाग लेते तो विशुद्ध हो जाती है?

उदाहरण

भाज्य = ५, हार = ३, क्षेप = ± २३ है।

'परस्परं भाजितयोर्ययोर्यः' के अनुसार वल्ली
१
१ सम
२३ हुई।
'ऊर्ध्वोविभाज्येन दृढ़ेन तष्ट' इत्यादि के अनुसार ०

राशिद्वय ४६ तथा २३ आया। ४६ में दृढ़ भाज्य ५ से तष्टित करने पर ९ लब्धि और अधरस्थ २३ में हार ३ से भाग देने पर लब्धि ७ होती है। किन्तु "गुणलब्ध्योः समं ग्राह्यम्" के अनुसार दोनों में ७ ही लब्धि लेने से लब्धि = ४६ − ७×५ = ११। गुण=२३ − ३×७ = २३ − २१=२ = गुणः। अतः ११ = लब्धि और २ = गुण ये योगज हुए क्योंकि सम वल्ली है। इन्हें अपने-अपने भाज्य हार में घटाने पर ५ − ११ = − ६ = लब्धि। एवम् ३ − २ = १=गुण ये वियोगज (ऋणक्षेप में) लब्धि गुण हुए। इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते के अनुसार दो इष्ट मानने से २×५ + ६̊=४=लब्धि। एवम् २×२ + १=७= गुणः।

अथवा

हरतष्टे धनक्षेपे के अनुसार न्यासः
भा = ५, हार=३=क्षेप ± २. हार भक्त क्षेप से लब्धि=७

इन भाज्य हार क्षेपों से पूर्ववद्बल्ली

१   सम हुई। अतः राशि द्वय ४, २ हुआ

१

२

⁰क्षेपतक्षणलाभाढ्या लब्धिः=लब्धिः अतः ४+७=११=लब्धि, गुणः=२, सम वल्ली होने से यो गज लब्धि गुण हैं। अपने-अपने तक्षण में घटाने पर ५ − ११ = − ६ = लब्धि, ३ − २ =१ गुण अतः − ६ = ल। तथा १=गुण ये वियोगज लब्धि गुण हुए।

"अथवा भागहारेण तष्टयोः क्षेपभाज्ययोः" के अनुसार हार से भाज्य क्षेप को तष्टित करने पर:—

न्यासः—भा=२, हा=३, क्षे=२

वल्ली = ०

१   पूर्वोक्तवद् गुण=२,

२

०

लब्धि=४। यहाँ गुण वास्तविक है किन्तु लब्धि "भाज्याद्धतयुतोदधृतात्" करने से $\frac{२ \times ५ + २३}{३}$ = ११ = लब्धि।

अतः यथार्थ लब्धि गुण क्रमशः ११, २ हुए, ये योगज हैं इन्हें अपने-अपने तक्षण में घटाने से ६̇। १ वियोगज लब्धि गुण होंगे।

●

येन पञ्चगुणिताः खसंयुताः पञ्चषष्टिसहिताश्च तेऽथवा।
स्युस्त्रयोदशहृता निरग्रकास्तं गुणं गणक! कीर्त्तयाशु नः ॥१२॥

न्यासः। भा ५ हा १३। क्षे ०

क्षेपाभावे गुणघ्नी $\frac{०}{०}$। एवं पञ्चषष्टिक्षेपे $\frac{५}{०}$ वा $\frac{१३}{१०}$ इत्यादि।

सुधाः—कौन सी राशि है जिसे पाँच से गुणा कर शून्य या पैंसठ जोड़ देते हैं और तेरह से भाग देते हैं तो वह निःशेष हो जाती है उस राशि (गुण) को हमें शीघ्र बताओ।

उदाहरणः—

प्रश्नानुसार भाज्य−५ हार=१३, क्षे=० या ६५ यह उदाहरण 'क्षेपाभावोऽथवा यत्र क्षेपः शुद्ध्येद्धरोद्धृतः" से सम्बद्ध है।

शून्य क्षेप में क्षेपाभाव है और पैंसठ क्षेप में, हरभक्त क्षेप नि:शेष हो जाता है अत: यहाँ गुण=० और शून्य क्षेप में लब्धि भी=० । किन्तु पैंसठ क्षेप में लब्धि=५ ।

क्योंकि शून्य क्षेप में पूर्वोक्तानुसार वल्ली=

० अत: राशि द्वय = ० अत: गुण=०, ल=०
२ ०
१
१
०
०

पैंसठ क्षेप में वल्ली ० अत: राशिद्वय—
२ = १३० |
१ ३२५ |
१
६५
०

ऊर्ध्वस्थित १३० में भाज्य ५ से तष्टित करने पर शेष=५= लब्धि ।

अधरस्थित ३२५ में १३ से भाग देने पर शेष=०=गुण ।

१३० में भाज्य ५ से भाग देने पर लब्धि=२६ और ३२५ में हार से भाग देने पर लब्धि=२५ आती है । किन्तु "गुणलब्ध्यो: समं ग्राह्यम्" के अनुसार ऊर्ध्वस्थ १३० में भी ५ से भाग देने पर लब्धि २५ ही मानें तो शेष ५ हुआ वहीं लब्धि होगी । ३२५ में १३ से भाग देने पर शेष=०=गुण । अब "इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते" के अनुसार अनेक गुणलब्धि लाई जा सकती ।

स्थिरकुट्टके सूत्रं वृत्तम्

क्षेपं विशुद्धिं परिकल्प्य रूपं पृथक् तयोर्ये गुणकारलब्धी ।
अभीप्सितक्षेपविशुद्धिनिघ्न्यौ स्वहारतष्टे भवतस्तयोस्ते ।१३।

प्रथमोदाहरणे दृढभज्यहारयोः रूपक्षेपस्य च ।

न्यासः—भा १७ । हा १५ । क्षे १ ।

अत्रोक्तवद्गुणाप्ती ७/८ । एते अभीष्टक्षेपपञ्चगुणे स्वहारतष्टे जाते ५/६ । अथ रूपशुद्धौ गुणाप्ती ८/९ । एते पञ्चकगुणे स्वहारतष्टे जाते १०/११ । ते एव सर्वत्र । अस्य गणितस्य ग्रहगणिते महानुपयोगः । तदर्थं किञ्चिदुच्यते ।

सुधाः—धनक्षेप या ऋणक्षेप को एक मानकर पूर्वोक्त युक्ति से आनीत गुण लब्धि को अभीष्ट धन क्षेप या ऋण क्षेप से गुणा कर अपने-अपने हार से तष्टित करें तो धनक्षेप या ऋणक्षेप में गुण लब्धि होगी।

जैसे कुट्टक के प्रथमोदाहरण के दृढ़भाज्य, दृढ़हार एवं दृढ़क्षेप में क्षेप को रूप (एक) मानने से न्यास .— भा=१७, हर = १५, क्षे = १

पूर्वयुक्तया गुण=७ लब्धि=८। इन्हें अभीष्ट क्षेप ५ से गुणने तथा अपने-अपने हार से तष्टित करने पर

$$\frac{७ \times ५}{१५}$$ में शेष = ५ = गुण।

$$\frac{८ \times ५}{१७}$$ में शेष = ६ = लब्धि।

रूप शुद्धि में पूर्ववत् गुण = ८ और लब्धि = ९ इन्हें पाँच से गुणा कर अपने२ हार से तष्टित करने से गुण = १०, लब्धि = ११। इसी तरह सर्वत्र जानना।

वासना :—कुट्टक प्रश्नानुसारम्

$$\frac{भा. गु \pm क्षे}{हा} = ल,$$ पक्षौ क्षेपेण भक्तौ

तदा $$\frac{\frac{भा. गु \pm १}{क्षे}}{हा} = \frac{ल}{क्षे}$$ यद्यत्र $\frac{गु}{क्षे} = गु'$ तथा $\frac{ल}{क्षे} = ल'$

तदा $$\frac{भा \times गु' \pm १}{हा} = ल'।$$

कुट्टकरीत्या लब्धिः = ल', गुणः = गु' एतौ क्षेपगुणितौ तदा वास्तवौ भवेताम् इत्युपपन्नम्।

कल्प्याऽथ शुद्धिर्विकलावशेषं
षष्टिश्च भाज्यः कुदिनानि हारः।
तज्जं फलं स्युर्विकला गुणस्तु
लिप्ताग्रमस्माच्च कलालवाद्यम्॥
एवं तदूर्ध्वं च तथाधिमासाऽ
वमाग्रकाभ्यां दिवसा रवीन्द्वोः॥ १५॥

तद्यथा। षष्ठिर्भाज्यः। कुदिनानि हारः विकलावशेषं शुद्धिरिति प्रकल्प्य साध्ये गुणाप्ती। तत्र लब्धिर्विकलाः स्युर्गुणस्तु कलावशेषम्। एवं कलावशेषं शुद्धिः षष्टिर्भाज्यः कुदिनानि हारः। फलं कलाः। गुणोंऽशशेषम्।

एवं राशिशेषं शुद्धिर्द्वादश भाज्यः कुदिनानि हारः। फलं गत-राशयः। गुणो भगणशेषम्।

एवं कल्पभगणा भाज्यः कुदिनानि हारः। भगणशेषं शुद्धिः। फलं गतभगणाः गुणोऽहर्गणः स्यात् इति।

अस्योदाहरणानि प्रश्नाध्याये :—

एवं कल्पाधिमासा भाज्यो रविदिनानि हारोऽधिमासशेषं शुद्धिः। फलं गताधिमासाः गुणो गतरविदिवसाः।

एवं युगावमानि भाज्यश्चन्द्रदिवसा हरोऽवमशेषं शुद्धिः। फलं गतावमानि गुणो गतचन्द्रदिवसा इति।

सुधा :--ग्रह के विकलावशेष पर से ग्रह एवम् अहर्गण का आनयन यहाँ किया गया है।

यहाँ साठ भाज्य, सावन दिन हार, और विकलावशेष ऋण क्षेप है अतः इन से साधित गुण लब्धियों में विकला लब्धि, और कलावशेष गुण होगा।

एवम् साठ भाज्य, कुदिन हार, कलावशेष को ऋण क्षेप मानकर आनीत गुण लब्धियों में लब्धि कला और गुण भागशेष होगा।

फिर तीस भांज्य, कुदिन हार, और भागशेष को ऋणक्षेप से साधित लब्धिगुणों में भाग लब्धि और राशिशेष गुण होगा।

एवम् बारह भाज्य, कुदिन हार, राशिशेष को ऋणक्षेप मानकर आनीत लब्धिगुणों में राशि लब्धि भगणशेष गुण होगा।

पुनः कल्पग्रहभगण भाज्य, कुदिन हार, भगणशेष को ऋणक्षेप मानकर आगत गुण लब्धियों में गतभगण लब्धि, और अहर्गण गुण होगा।

इसी तरह कल्पाधिमास भाज्य, रविदिन हार और अधिमास शेष को ऋण-क्षेप मानकर आगत गुण लब्धियों में गताधिमास लब्धि, और गत रविदिन गुण होगा।

फिर कल्पक्षयदिन भाज्य, चान्द्रदिन हार, अवमशेष को ऋणक्षेप मान-कर साधित गुणलब्धियों में गतावमदिन लब्धि, और गत चान्द्रदिन गुण होगा।

उदाहरण :—

यह उदाहरण बीजगणित के प्रसिद्ध टीकाकार दैवज्ञशिरोमणि जीवनाथ झा कृत सुबोधिनी ही से उद्धृत है।

मान लिया कि कल्पकुदिन = ककुदि = १९ :
कल्पग्रहभगण = ९। अहर्गण = १३। कल्पकुदिन में कल्पग्रहभगण तो अहर्गण में क्या ?

इस अनुपात से $\frac{\text{कग्रभ} \times \text{अहर्गण}}{\text{क कुदि}} = \text{गभ} + \frac{\text{भशे}}{\text{ककुदि}}$

$= \frac{९ \times १३}{१९} = \frac{११७}{१९} = ६ + \frac{३}{१९}$ यहाँ ६ = गतभगण

$\frac{३ \times १२}{१९} = \frac{३६}{१९} = १ + \frac{१७}{१९}$। १ = राशि

$\frac{१७ \times ३०}{१९} = \frac{५१०}{१९} = २६ + \frac{१६}{१९}$। २६ = अंश

$\frac{१६ \times ६०}{१९} = ५० + \frac{१०}{१९}$। ५० = कला

$\frac{१० \times ६०}{१९} = \frac{६००}{१९} = ३१ + \frac{११}{१९}$। विकला = ३१

भ　रा

अतः भगणादिग्रह = ६ । १ । २६° । ५०′ । ३१″ ।
इस भगणादिग्रह से विलोम रीति से अहर्गण का ज्ञान अभीष्ट है।

"कल्प्याऽथ शुद्धिर्विकलावशेषम्" के अनुसार भाज्य = ६०, हार = १९, क्षेप ११ ̇।

कुट्टकार्य न्यास—$\frac{\text{भा } ६० \text{ क्षे } ११̇}{१९}$ यहाँ वल्ली =
३
६
११
०
०

पूर्वोक्त रीति से राशि द्वय = २०९
६६

भाज्य हार से तष्टित करने पर लब्धि=२९ गुण=९ समवल्ली होने के कारण ये धनक्षेप के हुए। इन्हें अपने २ तक्षण में घटाने पर ऋण क्षेप में लब्धि = ३१ गुण = १० यहाँ लब्धि = विकला और गुण = कलावशेष पुनः कलावशेष को

ऋणक्षेप मानकर कला ज्ञानार्थं कुट्टक = भा ६० हार = १९, क्षे=१०
पूर्ववद् वल्ली = २ अतः राशिद्वय = १९०, ६३।
६
१०
०

भाज्य हार से तष्टित करने पर लब्धि = १०। गुण = ३ किन्तु ये लब्धि गुण धन क्षेपज हैं, अतः अपने-अपने तक्षण में घटाने से ऋणक्षेपज लब्धि = ५०, गुण = १६, अतः ५० = कला तथा १६ = अंशशेष पुनः अंशशेष को ऋणक्षेप मानकर अंश ज्ञानार्थं कुट्टक।

न्यास—भाज्य ३० हार १९ क्षे १६

पूर्ववद् वल्ली = १
१
१
२
१
१७
०

पूर्वरीति से राशिद्वय = १७६, ११२ इन्हें भाज्य हार से तष्टित करने पर लब्धि = २६, गुण = १७

विषम वल्ली के कारण ऋणक्षेपज लब्धिगुण हुए।

लब्धि = २६ = अंश। गुणा = = १७ = राशिशेष। पुनः राशि ज्ञानार्थं कुट्टक।

भाज्य = १२ हार = १९ क्षेप = १७ पूर्ववद् वल्ली = ० विषम है।
१
१
९
२
१७
०

स्वोर्ध्वेहतेऽन्त्येनेत्यादि से राशिद्वय=८५, १३६, इन्हें भाज्य हार से तष्टित करने पर लब्धि = १ गुण = ३, अतः लब्धि = १ = राशि। गुण = ३ = भगणशेष।

पुनः भगणज्ञानार्थं भगणशेष को ऋणक्षेप मानकर कुट्टकार्थ न्यास—
भा = ९, हा = १९, क्षे = ३

पूर्ववद् सम वल्ली = ०
२
३
०

पूर्वयुक्ति से राशिद्वय क्रमशः ३, ६, इन्हें भाज्य हार में घटाने से ६ = लब्धि, १३ = गुण। ये ऋणक्षेपज हुए। अतः ६ = गत भगण गुण = १३ = अहर्गण। अतः अभीष्ट सिद्ध हो गया।

वासना— कल्पकुदिनैः कल्पग्रहभगणा स्तदा अहर्गणैः किमिति त्रैराशिकेन जायते भगणादिको मध्यग्रहः ।

$$\text{एवमत्र} \frac{\text{क ग्र भ} \times \text{अ ह}}{\text{क कु}} = \text{गतभगण} + \frac{\text{भ शे}}{\text{क कु}} ।$$

$$\therefore \frac{\text{क ग्र भ} \times \text{अ ह} - \text{भ शे}}{\text{क कु}} = \text{गतभगणाः} ।$$

$$\therefore \frac{\text{भ शे} \times १२}{\text{क कु}} = \text{गरा} + \frac{\text{रा शे}}{\text{क कु}}$$

$$\therefore \frac{\text{भ शे} \times १२ - \text{रा शे}}{\text{क कु}} = \text{गरा} ।$$

$$\frac{\text{रा शे} \times ३०}{\text{क कु}} = \text{गतांश} + \frac{\text{अंश शेष}}{\text{क कु}}$$

$$\therefore \frac{\text{रा शे} \times ३० - \text{अं शेष}}{\text{क कु}} = \text{गतांश}$$

$$\text{पुनः} \quad \frac{\text{अंशे} \times ६०}{\text{क कु}} = \text{गकला} + \frac{\text{क शे}}{\text{क कु}}$$

$$\therefore \frac{\text{अंशे} \times ६० - \text{कशे}}{\text{क कु}} = \text{गविकला} + \frac{\text{विशे}}{\text{क कु}}$$

$$\therefore \frac{\text{क शे} \times ६० - \text{विशे}}{\text{क कु}} = \text{ग विकला} ।$$

अत्रान्तिमस्वरूपावलोकनादुपपद्यते कल्प्याऽथ शुद्धिर्विकलाशेषमित्यादि । अथ संश्लिष्टकुट्टके करणसूत्रं वृत्तम् ।

एको हर श्चेद् गुणकौ विभिन्नौ
तदा गुणैक्यं परिकल्प्य भाज्यम् ।
अग्रैक्यमग्र्यं कृत उक्तवद्यः
संश्लिष्टसंज्ञः स्फुट कुट्टकोऽसौ ॥१६॥

सुधा—एकाधिक कुट्टकोदाहरण में यदि हर समान हो और गुणक भिन्न-भिन्न हो तो गुणैक्य को भाज्य और शेषैक्य को शेष (ऋण क्षेप) कल्पना करके विहित कुट्टक संश्लिष्टकुट्टक कहलाता है ।

$$\text{वासना—कुट्टकानुसारम्} \quad \frac{\text{भा. गु} \pm \text{क्षे}}{\text{हा}} = \text{ल}$$

$\therefore$ भा.गु $\pm$ क्षे = हा.ल ।

एवम् भा.गु$'$ $\pm$ क्षे$'$ = हा.ल$'$

पक्षयोर्योगे

भा. गु $\pm$ क्षे + भा. गु$'$ $\pm$ क्षे$'$ = हा (ल + ल$'$)

$\therefore$ भा (गु + गु$'$) $\pm$ (क्षे + क्षे$'$) = हा (ल + ल$'$)

अत्र यदि गु + गु$'$ = गुण:

क्षे + क्षे$'$ = क्षेः

तदा लब्धिः = ल + ल$'$

एतेनोपपन्नं सर्वम् ।

विशेषपदवाच्याः श्रीमन्तो महामहोपाध्यायाः सुधाकरद्विवेदिनस्तु "भा. गु = हा. ल + शे । ततः भा. गु − शे = हा. ल$'$ .... (१)

एवमेव भा. गु$'$ − शे$'$ = हा. ल$'$ .... (२)

गु$'$ अनेन पूर्वपक्षौ गु अनेन परपक्षौ संगुण्य जातौ

भा. गु. गु$'$ − शे. गु$'$ = हा. ल. गु$'$ }
भा. गु. गु$'$ − शे$'$. गु = हा. ल$'$. गु } अनयोरन्तरे

शे. गु$'$ ∽ शे$'$. गु = हा (ल. गु$'$ ∽ ल$'$. गु)

$\therefore$ $\frac{\text{गु}'.\text{ शे} \backsim \text{गु. शे}'}{\text{हा}}$ = ल. गु$'$ ∽ ल$'$. गु"

निर्दिश्यैतत् मिथोगुणगुणितशेषयोरन्तरं हारहृतं शुद्धिमियाच्चेत्तदा प्रश्नोऽखिलोऽन्यथा नेति निरणैषुः ।

उदाहरणम्

कः पञ्चनिघ्नो विहृतस्त्रिषष्टया
सप्तावशेषोऽथ स एव राशिः ।
दशाहतः स्याद् विहृतस्त्रिषष्टया
चतुर्दशाग्रो वद राशिमेनम् ॥१३॥

सुधा—कौन सी वह राशि है जिसे पाँच से गुणाकर तिरसठ से भाग देने पर सात शेष रहता है, और उसी को दश से गुणाकर तिरसठ से भाग देते हैं तो चौदह शेष रहता है; उसे बतलाओ ।

उपर्युक्त उदाहरण में

प्रथम प्रश्नानुसार भा = ५, हार = ६३, क्षे = ७

द्वितीय प्रश्नाऽनुसार भा = १०, हा = ६३, क्षे = १४ चूँकि दोनों प्रश्नों में हर एक है और गुणक भिन्न-भिन्न है अतः संश्लिष्ट कुट्टक के नियमानुसार

भा = ५ + १० = १५, क्षेप = − ७ + (− १४) = − २१ । हा = ६३ ।
दृढ़ भाज्य हार क्षेप लाने के लिए तीनों के महत्तम समापवर्त्तक ३ से भाज्य हारक्षेपों में भाग देने पर दृढ़ भाज्य = ५, दृढ़हार = २१, दृक्षेप = ७ पूर्ववद्

समवल्ली = ० ४ ७ ० अतः राशिद्वय ७ । २८

ऊर्ध्वस्थ अंक सात को ५ से तष्टित करने पर शे २ = लब्धि अधरस्थ अंक अठाइस को इक्कीस से तष्टित करने पर शे = ७ गुण । समवल्ली होने के कारण लब्धि गुण धनक्षेपज हुए, अतः अपने अपने भाज्य हारों में घटाने पर ऋण क्षेप में लब्धि = ५ − २ = ३ ।
एवम् २१ − ७ = १४ = गुण ।

इस गुणक से आलाप भी घटता है ।

विमर्श :—कुट्टकगणित गणितज्यौतिष का बहुत ही उपयोगी अंग है । बीजगणित के अनेकवर्ण समीकरण का कोई भी प्रश्न कुट्टक की सहायता के बिना हल नहीं किया जा सकता । अनेक वर्ण सम्बद्ध प्रश्नों के अध्ययन से कुट्टक का अभ्यास स्वतः हो जाता है । कुट्टक में केवल भाज्य हार क्षेप के सहारे लब्धि गुण का आनयन किया जाता है । वे ही लब्धि गुण भाज्य हार के अभिन्न मान होते हैं । वस्तुतः भाज्य हार का अभिन्न मान लाना ही कुट्टक का मुख्य उद्देश्य है । शुद्धता की कसौटी आलाप का मिलना है ।

कुछ सोत्तर प्रश्न

१. $य = \frac{५ क + ४}{८}$, यहाँ लब्धि = ३ गुण = ४

२. $य = \frac{६ क - ६}{१२}$,, ल = १ गुण = ३

३. $य = \frac{७ क \pm २०}{५}$,, ल = ४ गु = ०

४. $य = \frac{८ क \pm ९}{३}$ यहाँ ल = ३, गु = ०

५. $य = \frac{११ क + १२}{८}$,, ल = ७ गु = ४

६. $य = \frac{५ क \pm १८}{९}$,, ल = ± २ गु = ०

७. $य=\frac{५क-९}{६}$,, ल = १ गु = ३

८. $य=\frac{१५क+२४}{१०}$,, प्रश्न ही अशुद्ध है।

९. $य=\frac{२०क-२१}{-११}$,, ल = ११, गु = ५

सर्वत्र 'य' का मान लब्धि, और क का मान गुण समझना।

पाश्चात्य गणितज्ञों ने कुट्टक सम्बद्ध प्रश्नों का समाधान अपने यहाँ Indeterminate Eauation. अनिश्चित समीकरण) के द्वारा किया है।

उदाहरण—यदि ७य + १२ र = २२० तो $य = \frac{-१२र+२२०}{७}$ ।

यहाँ य, र, का मान हम कुट्टक के द्वारा अपने ढंग से जान लेंगे। किन्तु आधुनिक गणितज्ञों ने इसे निम्न प्रकार से बतलाया है।

यदि ७ य + १२ र = २२० तो दोनों पक्षों को ७ से विभक्त करने पर

$य+र+\frac{५र}{७}=३१+\frac{३}{७} \therefore य+र+\frac{५र-३}{७}=३१ \cdots (१)$

चूँकि य + र = अभिन्नांक है अतः $\frac{५र-३}{७}$ भी अभिन्न ही होगा, भिन्न की कल्पना करने पर अभिन्न भिन्न का योग ३१ कैसे हो सकेगा?

∴ अतः $\frac{५र-३}{७}$ = अभिन्न है। अभिन्न राशियों का गुणन फल भी अभिन्न ही होता, अतः $\frac{५र-३}{७}\times ३=\frac{१५र-९}{७}$

$= अभिन्न = २र-१+\frac{र-२}{७}$ ।

कल्पना कीजिये कि $\frac{२र-२}{७}$ ल, तो र = ७ ल + २

इस र मान से एक समीकरण में उत्थापन देने से य + ७ ल+२+५ ल +१ = ३१। ∴ य = २८ − १२ ल। यहाँ यदि ल = ० तो य=२८, र = २ यदि ल = १ तो य = १६, र = ९, यदि ल = २ तो य = ४, र = १६

उदाहरण (२)—

यदि १४ य − ११ र = २९ (१) है तो य, र का मान अभिन्न धनात्मक

बतलाइए :—

पक्षद्वय को ११ से विभक्त करने पर

$$य+\frac{३य}{११}-र = २+\frac{७}{११}$$

$$\therefore \frac{३ य - ७}{११} = २ - य + र$$ चूँकि द्वितीय पक्ष अभिन्न है

अतः $\frac{३य - ७}{११}$ = अभिन्न। अभिन्न, अभिन्न का गुणनफल अभिन्न होता है।

अतः $\frac{१२य - २८}{११}$ = अभिन्न।

वा $य - २ + \frac{य - ६}{११}$ = अभिन्न $\therefore \frac{य - ६}{११}$ = अभिन्न = ल

$$\therefore य - ६ = ११ ल,$$

$$या \quad य = ६ + ११ ल।$$

य मान से एक स्वरूप में उत्थापन से

$$८४ + १५४ ल - ११ र = २९$$

वा $१५४ ल + ५५ = ११ र \quad \therefore र = १४ ल + ५$

यहाँ ल का मान ०, १, २, ३ माने जायें तो क्रमशः

$$\left.\begin{matrix} य = ६, १७, २८, ३९ \\ र = ५, १९, ३३, ४७ \end{matrix}\right\}$$

उदाहरण (३)—यदि ५ य + ४ र = २०० है तो पक्षद्वय में चार से भाग देने पर $य + र + \frac{य}{४} = ५०$ $\therefore \frac{य}{४}$ = अभिन्न = ल

$$\therefore य = ४ ल।$$

तथा र = ५० − ५ ल। यहाँ 'ल' का मान १ से ९ तक मानने पर 'य' 'र' का धनात्मक अभिन्न मान आसानी से जाना जा सकता।

'य' 'र' मान लाने के लिए अभ्यासार्थ कुछ प्रश्न।

(१) ३य + ८र = १०३ (४) ५य − ७र = ३ (७) १७य − १३र = ०

(२) ५य + २र = ५३ (५) ६य − १३र = १ (८) १९य − २३र = ७

(३) ७य + १२र = १५२ (६) ८य − २१र = ३३ (९) ७७य − ३०र = २९५

सविमर्शसुधाव्याख्योपेते भास्करनिर्मिते।
बीजे सद्वासना पूर्तिमगात्कुट्टकजा बुधाः॥

अथ वर्गप्रकृतिः

तत्र रूपक्षेपपदार्थं तावत् करणसूत्राणि सार्धषड्वृत्तानिः—

इष्टं ह्रस्वं तस्यवर्गः प्रकृत्या
क्षुण्णो युक्तो वर्जितो वा स येन ।
मूलं दद्यात्क्षेपकं तं धनर्णं
मूलं तच्च ज्येष्ठमूलं वदन्ति ॥ १ ॥

ह्रस्वज्येष्ठक्षेपकान्न्यस्य तेषां
तानन्यान् वाऽधो निवेश्य क्रमेण ।
साध्यान्येभ्यो भावनाभिर्बहूनि
मूलान्येषां भावना प्रोच्यतेऽतः ॥ २ ॥

वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वोस्तदैक्यं
ह्रस्वं लघ्वोराहतिश्च प्रकृत्या ।
क्षुण्णा ज्येष्ठाभ्यासयुग् ज्येष्ठमूलं,
तत्राभ्यासः क्षेपयोः क्षेपकः स्यात् ॥ ३ ॥

ह्रस्वं वज्राभ्यासयो रन्तरं वा
लघ्वोर्घातो यः प्रकृत्या विनिघ्नः ।
घातो यश्च ज्येष्ठयोस्तद्वियोगो
ज्येष्ठं क्षेपोऽत्रापि च क्षेपघातः ॥ ४ ॥

इष्टवर्गहृतः क्षेपः क्षेपः स्यादिष्टभाजिते ।
मूले ते स्तोऽथवा क्षेपः क्षुण्णः क्षुण्णे तदा पदे ॥ ५ ॥

इष्टवर्गप्रकृत्यो र्यद् विवरं तेन वा भजेद्—
द्विघ्नमिष्टं कनिष्ठं तत्पदं स्यादेकसंयुतौ ।
ततो ज्येष्ठमिहाऽऽनन्त्यं भावनाभिस्तथेष्टतः ॥ ६ ॥

सुधा—(वर्ग प्रकृति सम्बद्ध प्रश्नों में) किसी इष्ट को कनिष्ठ मान कर उसके वर्ग को प्रकृति से गुणा करें गुणन फल में जितने जोड़ने या घटाने पर वर्गमूल हो जाय उसे धनर्ण क्षेप मानें। क्षेप से युतोन गुणनफल के मूल को ज्येष्ठ मूल कहते हैं।

इस प्रकार आगत कनिष्ठ, ज्येष्ठ, क्षेपकों को लिखकर उनके नीचे उन्हीं या अन्य ह्रस्व, ज्येष्ठ- क्षेपों को कमशः लिखें। इन ह्रस्व ज्येष्ठ क्षेपकों से भावना के द्वारा अनेक ह्रस्व ज्येष्ठ क्षेप सिद्ध होते हैं। अतः इसे उनकी (ह्रस्व ज्येष्ठ क्षेपकों की) भावना कहते हैं।

(भावना भी द्विविध होती हैं, प्रथम समासभावना, दूसरी अन्तर भावना।)

ज्येष्ठ लघु का वज्राभ्यास (तीर्यग् गुणन) के ऐक्य को नवीन कनिष्ठ, कनिष्ठद्वय के गुणनफल को प्रकृति से गुणकर गुणनफल में ज्येष्ठद्वय के घात को जोड़ने से आगत योगफल को नवीन ज्येष्ठ मानें और क्षेपद्वय का गुणनफल नूतन क्षेप होता है। (यह समास भावना है)।

या—ज्येष्ठ लघु के वज्राभ्यास (तीर्यग्गुणन) के अन्तर को नया कनिष्ठ, प्रकृतिगुणित लघुद्वय के घात और ज्येष्ठद्वय के घात का जो अन्तर हो उसे नूतन ज्येष्ठ, एवम् क्षेपद्वय के घात को नवीन क्षेप (अन्तर भावना में) मानते हैं।

इस तरह आगत कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेपकों को छोटे या बड़े बनाने के लिए विशेष नियम—

पूर्वोक्त रीति से आगत कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेपों में इष्टवर्गापहृतक्षेप क्षेप, और इष्टमात्र से विभक्त कनिष्ठ, ज्येष्ठ क्रमशः कनिष्ठ, ज्येष्ठ होते। अर्थात् जिस क्षेप में पहले कनिष्ठ ज्येष्ठ सिद्ध हुए है, उस क्षेप को इष्ट वर्ग से भाग देने पर लब्धि तुल्य क्षेप में इष्ट मात्र से विभक्त पूर्वागत कनिष्ठ ज्येष्ठ क्रमशः कनिष्ठ ज्येष्ठ होंगे। इस प्रकार पूर्वागत कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप का नवागत कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप छोटा स्वरूप हुआ। अथवा—इष्टवर्ग गुणित क्षेप यदि क्षेप हो तो इष्ट गुणित पूर्वागत कनिष्ठ ज्येष्ठ नये कनिष्ठ ज्येष्ठ होंगे।

इष्ट वर्ग और प्रकृति के अन्तर से द्विगुण इष्ट में भाग लें तो लब्धि को रूप क्षेप में कनिष्ठ समझें। पुनः इस कनिष्ठ एवं रूप क्षेप के द्वारा "इष्टं ह्रस्वं तस्यवर्गः प्रकृत्या क्षुण्ण इत्यादि से ज्येष्ठ लावें तो रूप क्षेप में ह्रस्व ज्येष्ठ हो जायेंगे। इस तरह भावना एवं नये-नये इष्टों से अनेक विध ह्रस्व ज्येष्ठ का अनयन करें।

वासना

आलापानुसारम्—

$क^2 \cdot प्र \pm क्षे = ज्ये^2$

एवम् $क'^2 प्र \pm क्षे' = ज्ये'^2$

पक्षयोः समशोधनेन

$\pm क्षे = ज्ये^2 - क^2 . प्र$

$\pm क्षे' = ज्ये'^2 - क'^2 प्र.$

अथ क्षेपयोर्घाते

$क्षे \times क्षे' = (ज्ये^2 - क^2 . प्र)(ज्ये'^2 - क'^2 . प्र)$

$= ज्ये^2 . ज्ये'^2 - ज्ये^2 . क'^2 . प्र - ज्ये'^2 . क^2 . प्र + प्र^2 . क^2 . क'^2$

कस्मिंश्चिद्राशौ समीकरणे वा यावन्मितं योज्यते तावन्मितमेव शोध्येत चेत्तदा विकाराभाव इति परपक्षे "२ प्र क. क'. ज्ये. ज्ये' एतन्मितं योज्यते शोध्यते च तदा।

$क्षे \times क्षे' = ज्ये^2 . ज्ये'^2 \pm २ प्र. क. क'. ज्ये. ज्ये' + प्र.^2 क.^2 क'^2$

$- ज्ये.^2 क'.^2 प्र \mp २ प्र. क. क'. ज्ये. ज्ये'. - ज्ये'.^2 क.^2 प्र.$

$= (ज्ये. ज्ये' \pm प्र. क. क')^2 - प्र (ज्ये. क' \pm ज्ये'. क)^2$

अतोऽत्र क्षेपद्वयघातरूपक्षेपे कनिष्ठम्=ज्ये. क' ± ज्ये' क। ज्येष्ठमितिश्च ज्ये. ज्ये' ± प्र. क. क' इति भवेदतः

$क्षे \times क्षे' + प्र (ज्ये. क \pm ज्ये'. क)^2 = (ज्ये ज्ये' \pm प्र. क. क')^2$

एतेनोपपन्नंमिष्टंह्रस्वमित्यारभ्य "क्षेपोऽत्रापि च क्षेपघात" इत्यन्तम्।

आलापानुसारमेव—प्र. $क^2 \pm क्षे = ज्ये^2$ ....(१)

पक्षौ '$इ^2$' हृतौ तदा

$$\frac{प्र. क^2 \pm क्षे}{इ^2} = \frac{ज्ये^2}{इ^2}$$

$$वा\ \frac{प्र. क^2}{इ^2} \pm \frac{क्षे}{इ^2} = \frac{ज्ये^2}{इ^2}$$

$$अथवा\ प्र \left(\frac{क}{इ}\right)^2 \pm \frac{क्षे}{इ^2} = \left(\frac{ज्ये}{इ}\right)^2$$

अतोऽत्र $\frac{क्षे'}{इ}$ क्षेपे कनिष्ठम् $= \frac{क}{इ}$, ज्येष्ठम् $= \frac{ज्ये}{इ}$ एतेन इष्टवर्गहृतः क्षेपः क्षेप स्यादिष्टभाजिते।

मूले ते स्त इत्यन्तमुपपन्नम्।

एक समीकरणे पक्षौ $इ^2$ तो गुणितौ तदा

$$प्र. क^२. इ^२ \pm क्षे. इ^२ = ज्ये^२. इ^२$$

वा $प्र. (क. इ)^२ \pm क्षे. इ^२ = (ज्ये. इ)^२$

अतोऽत्र कनिष्ठं यदि क. इ तदा ज्येष्ठम् = ज्ये. इ तया क्षेप = क्षे. इ^२

एतेन क्षुण्णः क्षुण्णे तदा पदे इत्युपपन्नम् ।

इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद् विवरमित्याद्युपपत्तौ

श्रीमन्तोवापूदेवशास्त्रिणः

कनिष्ठं 'य' मितं प्रकल्प्य रूपक्षेपे ज्येष्ठमि $\sqrt{य^२. प्र + १}$ ति चानीय कनिष्ठं य मानमि $\frac{२५}{प्र - इ^2}$ ति सममीकरणबलादानैषुः ।

तथा हि :—ज्ये = $\sqrt{य^2 प्र + १}$ = य. इ + १ ।

अत्र ज्येष्ठम् = य. इ + १ इति कल्पितमिति । तथा कृते य. इ + १ = $\sqrt{य^२. प्र + १}$ ।

पक्षयोर्वर्गकरणेन

$$य^2. इ^2 + २ य. इ + १ = य^2. प्र + १$$

$$\therefore य^2. इ^2 + २ य. इ = य^2. प्र$$

$$वा\ २ य. इ = य^2. प्र - य^2. इ^२ = य^२(प्र - इ^२)$$

$$\therefore २ इ = य (प्र - इ^2)$$

$$\therefore य = \frac{२ इ}{प्र - इ^२} = अभिष्टम् ।$$

एतेनेष्टवर्गप्रकृत्योर्यद्विवरमित्याद्युपपन्नम् ।

अथ यदि कनिष्ठम् = १ तदा इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्ग इत्यादिना '$इ^२ - प्र$' क्षेपे ज्येष्ठम् = इ । ततश्च समासभावनया

$$१,\ इ,\ इ^२ - प्र$$

$$१.\ इ,\ इ^२ - प्र$$

$$२ इ = क,\ प्र + इ^२ = ज्ये,\ क्षे = (इ^2 - प्र)^२$$

इष्टवर्गहृतः क्षेप इत्यादिना रूपक्षेपे कनिष्ठम् = $\frac{२ इ}{इ^2 - प्र}$ एतेनापि इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद्विवरमित्याद्युपपन्नं विशेषकृतेयं वासना । अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम्—

को वर्गोऽष्टहतः सैकः कृतिः स्याद् गणकोच्यताम्

एकादशगुणः को वा वर्गः सैकः कृतिर्भवेत् ॥ १ ॥

प्रथमोदाहरणे न्यासः प्र ८। क्षे १

अत्रैकमिष्टं ह्रस्वं प्रकल्प्य जाते मूले सक्षेपे—

क१ ज्ये ३ क्षे १।

एषां भावनार्थं न्यासः प्र ८, क्षे १

क १ ज्ये ३ क्षे १।

क १ ज्ये ३ क्षे १।

वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वोरित्यादिना प्रथमकनिष्ठद्वितीयज्येष्ठ-मूलाभ्यासः ३। द्वितीयकनिष्ठप्रथमज्येष्ठमूलाभ्यासः ३। अनयो-रैक्य ६ कनिष्ठपदं स्यात्। कनिष्ठयोराहतिः १ प्रकृतिगुणा ८ ज्येष्ठयोरभ्यासेन ९ अनेन युता १७ ज्येष्ठपदं स्यात्। क्षेपयोराहतिः क्षेपकः स्यात् १। प्राङ्मूलक्षेपाणामेभिः सह भावनार्थं न्यासः—

प्र ८ क १ ज्ये ३ क्षे १

क ६ ज्ये १७ क्षे १

भावनया लब्धे मूले क ३५ ज्ये ९९ क्षे १। एवं पदानामानन्त्यम्

द्वितीयोदाहरणे रूपमिष्टं कनिष्ठं प्रकल्प्य तद्वर्गात्प्रकृतिगुणात् ११ रूपाद्द्वयमपास्य मूलं ज्येष्ठम् ३।

अत्र भावनार्थं न्यासः प्र ११ क १ ज्ये ३ क्षे २̇

क १ ज्ये ३ क्षे २̇

प्राग्वल्लब्धे चतुःक्षेपमूले क ६ ज्ये २० क्षे ४। इष्टवर्गहृतः क्षेप इत्यादिना जाते रूपक्षेपमूले क ३ ज्ये १० क्षे १। अतस्तुल्यभावनया वा कनिष्ठज्येष्ठमूले जाते क ६० ज्ये १९९ क्षे १। एवमनन्तमूलानि।

अथवा रूपं कनिष्ठं प्रकल्प्य जाते पञ्चक्षेपपदे

क १ ज्ये ४ क्षे ५ अतस्तुल्यभावनया मूले

क ८ ज्ये २७ क्षे २५। 'इष्टवर्गहृतः'

इत्यादिना पञ्चकमिष्टं प्रकल्प्य जाते रूपक्षेपपदे

क $\frac{८}{५}$ ज्ये $\frac{१७}{५}$ क्षे १।

अनयोः पूर्वमूलाभ्यां सह भावनार्थं न्यासः

प्र ११; क $\frac{८}{५}$ ज्ये $\frac{२७}{५}$ क्षे १

क ३ ज्ये १० क्षे १

भावनया लब्धे मूले क $\frac{१६१}{५}$ ज्ये $\frac{२६४}{५}$ क्षे १ । अथवा ह्रस्वं

खज्राभ्यासयोरन्तरमित्यादिना कृतया भावनया जाते मूले क $\frac{१}{५}$

ज्ये $\frac{६}{५}$ क्षे १ । एवमनेकधा ।

"इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद्विवरं तेन वा भजेत्" इत्यादिना पक्षान्तरेण पदे रूपक्षेपे प्रतिपाद्येते । तत्र प्रथमोदाहरणे रूपत्रयमिष्टं प्रकल्पितम् । अस्य वर्गः ९ । प्रकृतिः ८ । अनयोरन्तरम् १ । अनेन द्विघ्न मिष्टं भक्तं ६ जातं रूपक्षेपे कनिष्ठपदमतः पूर्ववज्ज्येष्ठम् १७ । एवं द्वितीयोदाहरणेऽपि रूपत्रयमिष्टं प्रकल्प्य जाते कनिष्टज्येष्ठे ३, १० । एवमिष्टवशात् समासान्तरभावनाभ्यां च पदानामानन्त्यम् ।

इति वर्ग प्रकृतिः ।

सुधाः– (१) हे गणक कौय सा वर्ग है जिसे आठ से गुणा कर एक जोड़ देते हैं तो वर्गात्मक हो जाता है ? (२) या कौन सा वर्ग है जिसे एगारह से गुण कर एक जोड़ते हैं तो वर्ग हो जाता है ? वर्ग प्रकृति में ये ही दो ग्रन्थकारोक्त प्रश्न है ।

उदाहरण—प्रथम मे प्रकृति = ८, क्षेप = १ है ।

'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गं' इत्यादि के अनुसार इष्ट एक मानकर इसका वर्ग = १ । प्रकृति के गुणा करने पर १ × ८ = ८ । इसमें एक जोड़ने से मूल हो जायगा अत: एक को क्षेप, और $\sqrt{८ + १}$ = ३ को ज्येष्ठ पद माना । वस्तुत: उत्तर हो गया कि एक राशि है किसके वर्ग को आठ से गुणा कर एक जोड़ने से वर्गात्मक हो जाता है ।

अब अनेक कनिष्ट ज्येष्ठ क्षेप लाने के लिए तुल्य भावनार्थ न्यास—

क १ ज्ये ३ क्षे १
क १ ज्ये ३ क्षे १

यह "ह्रस्वज्येष्टक्षेपकान्न्यस्य तेषा" मित्यादि के अनुसार ही कनिष्ट ज्येष्ठ क्षेपक के नीचे इन्हीं को रखकर "वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वो स्तदैक्य" मित्याद्यनुसार नवीन कनिष्ट = ६, नवीन ज्येष्ठ = १ × १ × ८ + ३ × ३ = १७ । क्षेपद्वयघात = १ × १ = १ = नूतन क्षेप ।

इस प्रकार कनिष्ट = ६, ज्ये = १७, क्षेप = १ हुए । यहाँ भी प्रश्नोत्तर हो गया ।

पुनः इन नवागत कनिष्ट ज्येष्ठ क्षेपो के साथ पूर्वसिद्ध कनिष्ट ज्येष्ठों की भावना के लिए न्यास—

प्र० ८— क ६ ज्ये १७ क्षे १
क १ ज्ये ३ क्षे १

समासभावना से कनिष्ठ = १ × १७ + ६ × ३ = ३५ = क; ज्येष्ठ = ६ × १ × ८ + १७ × ३ = ४८ + ५१ = ९९ = ज्ये, क्षेप = १×१=१=क्षे।

अतः नवीनतम कनिष्ठ = ३५, ज्येष्ठ = ९९, क्षेप = १ इस तरह भावनाओं के द्वारा अनेक कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप आ सकते हैं।

दूसरा उदाहरण

जहाँ प्र = ११, क्षेप = १ है यहाँ भी "इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः" आदि के अनुसार क = १। अतः नियमानुसार ज्येष्ठ $\sqrt{१^2 \times ११ - २}$ = ३ = ज्ये। क्षे = २̇।

तुल्य भावनार्थ न्यास-- क १ ज्ये ३ क्षे २̇
क १ ज्ये ३ क्षे २̇

पुनः "वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वोस्तदैक्यमित्याद्यनुसार--

कनिष्ठ = ३ × १ + ३ × १ = ६ = क।

ज्येष्ठ = १ × १ × ११ + ३ × ३ = ११ + ९ = २० = ज्ये

क्षेप = २̇ × २̇ = ४ = क्षेप।

अतः नवीन कनिष्ट ज्येष्ठ क्षेप = क = ६, ज्ये = २०, क्षेप = ४।

"इष्टवर्गहृतः क्षेप" आदि के अनुसार कल्पितेष्ट = २ ; २^2 = ४। इस चार से क्षेप में भाग देने पर क्षेप = १ और इष्ट २ से कनिष्ठ ज्येष्ठ से भाग देने से क्रमशः कनिष्ठ ज्येष्ठ = $\frac{६}{२}$ = ३ तथा $\frac{२०}{२}$ = १०।

अतः उसी ११ प्रकृति में नये कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप = क=३, ज्ये=१०, क्षे १।

पुनः अन्य कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप के लिए तुल्य भावानार्थ न्यास—

प्र. ११ क ३ ज्ये १० क्षे १
क ३ ज्ये १० क्षे १

पूर्ववत् वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वोस्तदैक्यमित्याद्यनुसार कनिष्ठ = ३ × १० + १० × ३ = ६०। ज्येष्ठ = ३ × ३ × ११ + १० × १० = ९९ + १०० = १९९ = ज्ये। क्षेप = १ × १ = क्षे।

अतः नवीनतम कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप = क = ६०, ज्ये = १९९, क्षेप = १।

इस तरह भावना से अनन्त कनिष्ठ ज्येष्ठपद उसी प्रकृति एवं क्षेप में आयेंगे।

अथवा इष्ट = १। $१^२$ = १। १ × ११ इसमें ५ जोड़ने से वर्गात्मक हो जाता है।

अतः ज्येष्ठ = $\sqrt{१६}$ = ४ क्षेप = ५

तुल्य भावनार्थ न्यास--

प्र ११ क १ ज्ये ४ क्षे ५
क १ ज्ये ४ क्षे ५

यहाँ भी पूर्ववत् कनिष्ठ = १ × ४ + १ × ४ = ८ = क

ज्येष्ठ = १ × १ × ११ + ४ × ४ = ११ + १६ = २७।

क्षेप = ५ × ५ = २५ ।

पुनः 'इष्टवर्गहृतः क्षेपः' के अनुसार इष्ट = ५। इसके वर्ग से क्षेप में भाग लेने पर क्षेप = $\frac{२५}{२५}$ = १। और इष्ट ५ से कनिष्ठ ज्येठों में भाग देने पर कनिष्ठ = $\frac{८}{५}$ ज्येष्ठ = $\frac{२७}{५}$। अतः कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप क = $\frac{८}{५}$, ज्ये = $\frac{२७}{५}$ क्षे = १। पुनः भावना :—

प्र= ११, क ३ ज्ये १० क्षे १
क $\frac{८}{५}$ ज्ये $\frac{२७}{५}$ क्षे १

पूर्ववत् क = $\frac{८}{५}$ × १० + ३ × $\frac{२७}{५}$ = $\frac{८०}{५}$ + $\frac{८१}{५}$ = $\frac{१६१}{५}$ = कनिष्ठ।

ज्येष्ठ = $\frac{८}{५}$ × ३ × ११ + १० × $\frac{२७}{५}$ = $\frac{२६४}{५}$ + $\frac{२७०}{५}$ = $\frac{५३४}{५}$ = ज्ये।

क्षेप = १ × १ = १

अतः कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप = क = $\frac{१६१}{५}$ ज्ये = $\frac{५३४}{५}$, क्षे = १

अथवा—"ह्रस्वं वज्राभ्यासयोरन्तरं वा" के अनुसार कनिष्ठ = $\frac{२७}{५}$ × ३ − $\frac{८०}{५}$ = $\frac{८१}{५}$ − $\frac{८०}{५}$ = $\frac{१}{५}$ = क।

ज्येष्ठ = $\frac{८}{५}$ × ३ × ११ ∽ १० × $\frac{२७}{५}$ = $\frac{२६४}{५}$ ∽ $\frac{२७०}{५}$ = $\frac{६}{५}$ = ज्ये।

क्षे = १ × १ = क्षे।

अथवा 'इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद्विवरम्'' के अनुसार प्रथमोदाहरण में इष्ट = ३, प्रकृति = ८। ∴ ३^2 − ८ = १। $\frac{३ \times २}{१}$ = ६ = कनिष्ठ क्षेप = १ अतः नियमानुसार $६^२$ = ३६। ३६ × ८ = २८८। २८८ + १ = २८९। $\sqrt{२८९}$ = १७ = ज्येष्ठ।

अतः कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप = क = ६ ज्येष्ठ = १७, क्षेप = १,

द्वितीयोदाहरण में इष्ट = ३। पुनः "इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद् विवरमित्याद्यनुसार
३^2 = ९। प्र = ११, ११ − ९ = २ = अन्तर। $\frac{२ \times ३}{२}$ = ३ = कनिष्ठ।

क्षे = १ अतः ज्येष्ठ = १०।

अतः कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप = क = ३, ज्ये = १०, क्षे = १।

इस प्रकार भावनाद्वय या इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद् विवरम् के अनुसार अनन्त पद सिद्ध होंगे।

अभ्यासार्थं कुछ सोत्तर प्रश्न

१. $२० य^2 + १ = क^2$ तदा य = २, क = ९
२. $५० य^2 + १ = क^2$ „ य = १४, क = ९९
३. $२१ य^2 + ५ = क^2$ „ य = $\frac{६}{५}$, क = $\frac{३७}{५}$
४. $२० य^2 + ५ = क$ „ य = २, क = ५
५. $९८ य^2 + १ = क^2$ „ य = १०, क = ९९
६. $१२ य^2 + १ = क^2$ „ य = २, क = ७
७. $२४ य^2 + १ = क^2$ „ य = १, क = ५
८. $२० य^2 + २५ = क^2$ „ य = १०, क = ४५
९. $\sqrt{१२ य^2 + १} = क$ „ य = २, क = ७
१०. $\sqrt{८ य^2 + १} = क$ „ य = १, क = ३

सविमर्शसुधाव्याख्या वासनासमलङ्कृता।
वर्गप्रकृतिजा विज्ञवरैः प्रीत्याऽवलोक्यताम्॥

चक्रवालम्

अथ चक्रवाले करणसूत्रं वृत्तचतुष्टयम् ।

ह्रस्वज्येष्ठपदक्षेपान् भाज्यप्रक्षेपभाजकान् ।
कृत्वा कल्प्यो गुणस्तत्र तथा प्रकृतितश्च्युते ।। १ ।।
गुणवर्गे प्रकृत्योनेऽथवाल्पं शेषकं यथा ।
तत्तु क्षेपहृतं क्षेपो व्यस्तः प्रकृतितश्च्युते ।। २ ।।
गुणलब्धिः पदं ह्रस्वं ततो ज्येष्ठमतोऽसकृत् ।
त्यक्त्वा पूर्वपदक्षेपांश्चक्रवालमिदं जगुः ।। ३ ।।
चतुर्द्व्येकयुतावेवमभिन्ने भवतः पदे ।
चतुर्द्विक्षेपमूलाभ्यां रूपक्षेपार्थभावना ।। ४ ।।

सुधा:—वर्ग प्रकृति का ही विशेष रूप चक्रवाल है। वर्ग प्रकृति सम्बद्ध प्रश्नों का उत्तर भिन्न अभिन्न दोनों रूप में होते किन्तु चक्रवाल प्रक्रिया से अभिन्न ही कनिष्ठ ज्येष्ठ होंगे। वस्तुतः अभिन्न कनिष्ठ ज्येष्ठ लाना ही चक्रवाल का प्रयोजन है।

"इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्ग" इत्यादि नियम से आनीत कनिष्ठ, ज्येष्ट, क्षेप को क्रमशः भाज्य, क्षेप, हार मान कर कुट्टक के द्वारा ऐसा गुण लावें जिससे गुणवर्ग को प्रकृति में घटाने से या गुणवर्ग में ही प्रकृति को घटाने से थोड़ा शेष रहे। उस शेष को क्षेप से भाग देकर क्षेप मानें, यदि गुणवर्ग ही प्रकृति से संशोधित हो तो क्षेप को व्यस्त (विपरीत) के रूप में रक्खें, अर्थात् धनात्मक को ऋणात्मक और ऋणात्मक को धनात्मक।

तथागत लब्धि को कनिष्ठ मानकर प्रकृति, कनिष्ठ, क्षेप, के सहारे ज्येष्ठ का साधन करें। इन नवागत कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेपों को पुनः भाज्य क्षेप हार मान कर कुट्टक रीति से गण लब्धि लावें। इस तरह असकृत् (बार-बार) करने से चार, दो, एक क्षेप में अभिन्न कनिष्ठ ज्येष्ठ आएगें। इसे ही विद्वानों ने चक्रवाल कहा है। रूप क्षेपार्थ चार, दो, क्षेप वाले कनिष्ठ ज्येष्ठों पर से भावना करे अर्थात् चार क्षेप होने पर 'इष्टवर्ग हृतः क्षेपः' से एवं दो क्षेप में समान भावना के बाद "इष्टवर्गहृतः क्षेपः" से रूपक्षेप के कनिष्ठ ज्येष्ठ होंगे।

वासना.— चक्रवद् वलते परिभ्रमतीति चक्रवालम् । अर्थात्र कुट्टकवर्गप्रकृत्योश्चक्रवद्— वर्गप्रकृतिस्ततः कुट्टकं पुनर्वर्गप्रकृतिस्ततः कुट्टकमित्येवमसकृद् भ्रमणं जायते तदेव चक्रवालम । वर्गप्रकृत्या साधितयोभिन्नाऽभिन्नात्मकयोः कनिष्टज्येष्ठयोश्चक्रवालद्वाराऽभिन्नत्वविधानं भवतीति अभिन्नात्मक कनिष्ठज्येष्टयोरानयनमेव चक्रवालप्रयोजनम् ।

यथात्र कल्प्यते प्र, प्रकृतौ 'क्षे' क्षेपे कनिष्ठम् = क ज्येष्ठञ्च = ज्ये तथा च तस्यामेव प्रकृतौ रूपसमे कनिष्ठे इ$^{\text{२}}$ – प्र मिते क्षेपे "इष्टं ह्रस्वं तस्यवर्ग" इत्यादिना ज्येष्ठम् = ज्यो = $\sqrt{१^२ \times प्र + इ^२ - प्र} = \sqrt{प्र + इ^२ - प्र} \times \sqrt{इ^2} = इ$ ।

अतः 'क' 'ज्ये' 'क्षे' मितानां कनिष्ठज्येष्ठक्षेपाणां नूतनकनिष्टज्येष्ठक्षेपैरे '१, इ, इ^२ – प्र' भिः भावनया कनिष्ठज्येष्ठक्षेपाः क'=ज्ये+क. इ, ज्ये'= प्र. क+ज्ये. इ, क्षे' = क्षे (इ^2 – प्र) इष्टवर्गहृतः क्षेप इत्यादिना 'क्षे' मितमिष्टं प्रकल्प्य साधिता नूतनकनिष्ठज्येष्ठक्षेपाः—

$$क_१ = \frac{क.\ इ \pm ज्ये}{क्षे}\ ।\ ज्ये_१ = \frac{प्र.\ क + ज्ये.\ इ}{क्षे}\ ।\ क्षे_१ = \frac{इ^२ - प्र}{क्षे}\ ।$$

अत्र क$_१$ मानं यथाऽभिन्नं भवेत्तदर्थमेव कुट्टकेन गुणः इ मानं, लब्धिश्च क$_१$ मानं सेत्स्यति । इष्टाहृतस्वस्वहरेणेत्यादिना इ समस्य गुणस्य तथा मानमानेयं यथा नूतनक्षेपीयभाज्यमानमिदं स्वल्पतरं भवेत् ।

$$नूतन\ क्षेपः = क्षे_१ = \frac{इ^२ - प्र}{क्षे}\ ,\ अत्र$$

'इ^२' तः अधिकायां प्रकृतौ क्षे$_१$ मानं क्षयात्मकम् । क्षयात्मकान्तरस्य घनक्षेपेण भक्तस्यापि क्षयात्मकत्वात् । ऋणक्षेपे तु यदि प्र > इ^२ वं चेत्तदाऽन्तरस्य ऋणत्वात् तच्छेपभक्ते नूतनक्षेपो धनम् । इत एव व्यस्तः प्रकृतितश्च्युत 'इत्यन्तमुपपन्नम ।

$$अभिन्नं\ \ नूतनकनिष्ठमानम् = क_१ = \frac{इ.क + ज्ये}{क्षे}$$

$\therefore$ विलोमतः $\dfrac{क_१ क्षे - ज्ये}{क} = इ$ । अनेन नूतनज्येष्ठमाने ज्ये$_१$ संज्ञके $\dfrac{प्र.क + ज्ये.\ इ}{क्षे}$ स्मिन् उत्थापिते

$$ज्ये_१ = \frac{प्र.\ क + ज्ये \times \dfrac{(क_१ क्षे - ज्ये)}{क}}{क्षे}$$

$$अतोऽत्रांशमानम् = \frac{प्र.क^2 + क_१.क्षे.ज्ये - ज्ये^2}{क}$$

$$= \frac{क_1 क्षे. ज्ये - (ज्ये^2 - प्र.क^2)}{क} = \frac{क_1 क्षे ज्ये. - क्षे}{क}$$

$= क्षे \frac{(क_1 ज्ये - १)}{क}$ अत्र क्षेपकनिष्ठयोर्मिथो दृढत्वात् कनिष्ठभक्त

$(क_1 .ज्ये - १)$ मिदं शुद्ध्येदेव अतः $\frac{क_1 ज्ये - १}{क} = ल =$

अभिन्नसंख्या $= ज्ये_1$

एतेनोपपन्नं "पूर्वज्येष्ठहतं नूत्नकनिष्ठं रूपहीनितम्।
पूर्वह्रस्वहृतं लब्धं नवीनज्येष्ठसन्ततिः।" इति विशेषोक्तम्।

का सप्तषष्टिगुणिता कृतिरेकयुक्ता
का चैकषष्टिगुणिता च सखे सरूपा।
स्यान्मूलदा यदि कृतिप्रकृतिर्नितान्तं
त्वच्चेतसि प्रवद तात तता लतावत्॥ १॥

प्रथमोदाहरणे रूपं कनिष्ठं त्रयमृणक्षेपं च प्रकल्य न्यासः प्र ६७ क्षे १। क १ ज्ये ८ क्षे ३̇।

ह्रस्वं भाज्यं ज्येष्ठं प्रक्षेपं क्षेपकं भाजकं च प्रकल्प्य कुट्टकार्थं

न्यासः—भा १ हा ३ क्षे ८।

अत्र हरतष्टे इति कृते जाता वल्ली ०/२। लब्धिगुणौ ०/२। ऊर्ध्वो विभाज्येन अधरो हरेणेति तष्टिकरणेस्वस्वतष्टौ लब्धिवैषम्यात् स्वतक्षणाभ्यां ३ शुद्धौ १। क्षेपतक्षणलाभाढ्या लब्धिरिति लब्धि-गुणौ ३/१। हरस्य ऋणत्वाल्लब्धेः ऋणत्वे कृते जातौ लब्धिगुणौ ३̇/१ गुणस्य वर्गे १। प्रकृतेः शोधिते शेषम् ६६ अल्पकं न जातमतो रूपद्वय मृणमिष्टं प्रकल्प्य इष्टाहतस्वस्वहरेणेत्यादिना जातौ लब्धिगुणौ ५̇। अत्र गुणवर्गे ४९ प्रकृतेर्विशोधिते शेषम् १८। क्षेपेण ३̇ हृतं ७

लब्धं ६̇ अयं क्षेपः। गुणवर्गे प्रकृते विशोधिते व्यस्तः स्यादिति धनम् ६। लब्धिः कनिष्ठं पदम् ५̇। अस्य ऋणत्वे धनत्वे च उत्तरे कर्मणि न विशेषोऽस्तीति जातं धनम् ५। अस्य वर्गे प्रकृतिगुणे षड्युते जातं मूलं ज्येष्ठम् ४१।

पुनरेषां कुट्टकार्थं न्यासः : भा ५ हा ६ क्षे ४१

वल्ली—$\begin{matrix}०\\१\\४१\\०\end{matrix}$। अतो लब्धिगुणौ $\begin{matrix}१\\५\end{matrix}$। गुणवर्गे २५। प्रकृतेश्च्युते शेषे ४२ क्षेपेण ६ हृते ७। व्यस्तः प्रकृतितश्च्युत इति जातः क्षेपः ७̇। लब्धिः कनिष्ठम् ११। अतो ज्येष्ठम् ९०। पुनरेषां कुट्टकार्थं न्यासः भा ११। हा ७̇ क्षे ९०।

अत्र हरतष्टे धनक्षेपे इति कृते जातो गुणः ५। लब्धयो विषमा इति तक्षणशुद्धो जातो गुणः २। अस्य क्षेपः ७̇। ऋण रूपेण १̇ गुणितं क्षेपं ७ गुणे प्रक्षिप्य जातो गुणः ९। अस्य वर्गे प्रकृत्योने शेषं १४ क्षेपेण ७̇ हृत्वा जातः क्षेपः २̇। लब्धिः कनिष्ठम् २७। अतो-ज्येष्टम् २२१।

आभ्यां तुल्यभावनार्थं न्यासः क २७ ज्ये २२१ क्षे २̇
क २७ ज्ये २२१ क्षे २̇

उक्तवन्मूले क ११९३४ ज्ये ९७६८४ क्षे ४ चतुः क्षेपपदे २ अनेन भक्ते जाते रूपक्षेपमूले क ५९६७ ज्ये ४८८४२ क्षे १।

द्वितीयोदाहरणे न्यासः—

प्र ६१ क १ ज्ये ८ क्षे ३।

कुट्टार्थं न्यासः भा १ हा ३ क्षे ८।

हरतष्टे धनक्षेपे इति लब्धिगुणौ $\begin{matrix}३\\१\end{matrix}$। इष्टाहतेति द्वाभ्या-मुत्थाप्य जातौ लब्धि गुणौ $\begin{matrix}५\\७\end{matrix}$। गुणवर्गे ४९। प्रकृतेः शोधिते १२ व्यस्त इति ऋणम् १२̇ इदं क्षेपहृतं जातः क्षेपः ४̇। अतः प्राग्वज्जाते चतुः क्षेपमूले क ५ ज्ये ३९।

इष्टवर्गहृतः क्षेप स्यादित्युपपन्नरूपशुद्धिमूलयोर्भावनार्थं न्यासः—

क $\frac{५}{२}$ ज्ये $\frac{३९}{२}$ क्षे १̇

क $\frac{५}{२}$ ज्ये $\frac{३९}{२}$ क्षे १̇

अतो भावनया जाते रूपक्षेपमूले क $\frac{१९५}{२}$ ज्ये $\frac{१५२३}{२}$

अनयोः पुनः रूपंशुद्धिपदाभ्यां भावनार्थं न्यासः

क $\frac{५}{२}$ ज्ये $\frac{३९}{२}$ क्षे १̇

क $\frac{१९५}{२}$ ज्ये $\frac{१५२३}{२}$ क्षे १

अतो जाते रूपशुद्धौ मूले क ३८०५ ज्ये २९७१८

अनयोस्तुल्यभावनया जाते रूपक्षेपमूले क २२६१५३९८० ज्ये १७६६३१९०४९।

सुधाः— कौन सा वर्ग है जिसे सड़सठ से गुणा कर एक जोड़ने से मूलात्मक होता है ? या कौन सा वर्ग है जिसे एकसठ से गुणा कर एक जोड़ने से मूलप्रद होता है ?

यदि वर्गप्रकृति तुम्हारे चित्त में लता की तरह फैली हो तो इसे बतलाओ।

प्रथमोदाहरण में कनिष्ठ = १, क्षे = ३̇ तो नियमानुसार ज्ये = ८।

अब 'ह्रस्वज्येष्ठपदक्षेपान्' आदि के अनुसार कनिष्ठ १ को भाज्य, ज्ये ८ को क्षेप, क्षेप ३̇ को हार मान कर कुट्टक के लिए न्यासः—

भा = १, क्षे = ८ हा = ३̇।

हरतष्टे धनक्षेपे के अनुसार हार तष्टित क्षेप = २ = शेष अतः भा=१ क्षे = २ हा ३̇ पर से वल्ली ० विषय हुई।
२
०

अतः लब्धि = ० गुण = २, विषय वल्ली के कारण तक्षणशुद्ध करने पर ल = १ गु = १। क्षेपतक्षणलाभाढ्या लब्धिः = लब्धि, अतः ल = ३; गु = १ गुण गुणित भाज्य १ में क्षेप ८ जोड़ने पर योगफल = ९ यह हार का विजातीय है अतः लब्धि ऋणात्मक होगी इसलिए ल = ३̇ गुण = १।

गुण² को प्रकृति ६७ में घटाने से शेष=६६ यह अल्प नहीं है। अतः 'इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार ऋण दो इष्ट मानकर आनीत ल = ५̇ गु = ७। पुनः गुणवर्ग प्रकृत्योने करने पर।

६७ − (७)² = ६७ − ४९ = १८। इसमें प्रथमक्षेप से भाग देने पर ल = ६̇ हुई। किन्तु प्रकृति से गुणवर्ग को घटाया गया है अतः ऋणात्मक ६ को धनात्मक माना गया। और लब्धि ५̇ को कनिष्ठ माना। अतः क=५̇ क्षे = ६. अतः ज्येष्ठ = ४१ चूंकि कनिष्ठ को ऋण या धन मानने से कोई विशेषता नहीं होती अतः क = ५ ज्ये = ४१, क्षे = ६ हुए। पुनः इन्हें भाज्य प्रक्षेप भाजक बनाने पर   भा = ५, क्षे = ४१, हार = ६

यहाँ भी 'हरतुष्ठे धनक्षेपे' के अनुसार तष्ठित क्षेप = ५ अतः भा = ५ क्षे = ५ हा = ६।

कुट्टक रीति से वल्ली = ०
१
५
० सम हुई ।

∴ ल = ५, गु = ५ ।

किन्तु क्षेपतक्षणलाभाढ्य लब्धि ही वास्तव लब्धि है अत. लब्धि=५ + ६ = ११, गुण = ५ ।

पुनः गुणवर्गे प्रकृत्योने आदि के अनुसार गुण^2 = २५, ६७ – २५=४२ । इसमें पूर्वक्षेप ६ से भाग देने पर ल = ७, धनात्मक इसे ऋणात्मक माना क्योंकि गुणवर्ग ही प्रकृति से यहाँ विशुद्ध है ।

अतः लब्धि = ११ = कनिष्ठ, क्षेप = ७̇ इन से साधित ज्येष्ठ = ९०

अतः ६७ प्रकृति में कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप निम्नाङ्कित हुए क = ११, ज्ये = ९०, क्षे = ७̇

पुनः ह्रस्वज्येष्ठपदक्षेपान् भाज्यप्रक्षेपभाजकान् करने से भा = ११, क्षे = ९० हा = ७̇

अतः वल्ली = १
१
१
६
० विषम हुई ।

नियमतः ल = ७, गुण = ५ किन्तु विषम वल्ली के कारण तक्षण शुद्ध करने पर ४ = ल, २ = गुण । क्षेपतक्षणलाभाढ्य लब्धि = ४ + १२ = १६ यह लब्धि ऋणात्मक होगी क्योंकि गुण गुणित भाज्य में क्षेप के जोड़ने पर ऋणात्मक हर का विजातीय रहता है ।

'गुणवर्गे प्रकृत्योने' करने पर अल्प शेष नहीं होता अतः ऋणात्मक एक को इष्ट मान कर 'इष्टाहृतस्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार गुण = ९ लब्धि=२७̇ ।

गुणवर्गे प्रकृत्योने' आदि के अनुसार ९^2 – ६७ = ८१ – ६७ = १४, इसमें पूर्वक्षेप ऋण ७ से भाग देने पर १४ ÷ ७̇ = २̇ = क्षेपः कनिष्ठ = २७̇ अतः ज्येष्ठ^2 = (२७)̇^{2} × ६७ – २ = ७२९ × ६७ – २ = ४८८४३ – २ = ४८८४१ ।

अतः ज्येष्ठपद = $\sqrt{४८८४१}$ = २२१ ।

अतः कनिष्ठ = २७, ज्ये = २२१, क्षे = २̇

तुल्य भावना से कनिष्ठ = २७ × २२१ + २७×२२१ = ५९६७+५९६७ = ११९३४ = क,

क्षेप = २ × २ = ४

अत: ज्येष्ठ = २७ × २७ × ६७ + २२१×२२१ = ७२९×६७+४८८४१
= ४८८४३ + ४८८४१ = ९७६८४

पुन:

'इष्टवर्गहृत: क्षेप:' आदि के अनुसार इष्ट दो मानकर दो के वर्ग ४ चार से क्षेप ४ में भाग देने पर क्षेप = १ और इष्ट दो से कनिष्ठ तथा ज्येष्ठ में भाग देने पर

$$कनिष्ठ = \frac{११९३४}{२} = ५९६७ ।$$

$$ज्येष्ठ = \frac{९७६८४}{२} = ४८८४२$$

क्षे = १

अत: ५९६७ ही राशि है । जिसके वर्ग को प्रकृति ६७ से गुणा कर एक जोड़ने से ४८८४२ के वर्ग के बराबर होता है ।

उदाहरण (२)

इस उदाहरण में प्र = ६१ । अत: एक इष्ट मानने पर "इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्ग:" आदि के अनुसार क = १, ज्ये = ८, क्षे = ३

"ह्रस्वज्येष्ठपदक्षेपान् भाज्यप्रक्षेपभाजकान्" बनाने पर भा = १ क्षे = ८ हा = ३

हारतष्टिन क्षेप = २, लब्धि = २

अत: वल्ली = ० विषम हुई ।
२
०

अत: गुण = २ ल = ० । विषमवल्ली होने के कारण तक्षणशुद्ध करने पर गुण = १, ल=१ तक्षणलायाढ्य लब्धि = २ + १ = ३ = वास्तव लब्धि । गुण=१ गुण वर्ग आदि करने पर अल्प शेष नहीं होगा अत: 'इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार २ इष्ट मानने पर लब्धि = ५ गुण = ७ । गुण^२ = ४९ । इसे प्रकृति में घटाने पर ६१ − ४९ = १२ । इसमें पूर्वक्षेप ३ से भाग देने पर ल = ४ । 'व्यस्त: प्रकृतितश्च्युते के अनुसार इसे ऋणात्मक माना गया ।

लब्धि = ५ = कनिष्ठ अत: ज्येष्ठ =

$\sqrt{२५ × ६१ − ४} = \sqrt{१५२१}$ = ३९ = ज्ये

अत: कनिष्ठ = ५, ज्ये = ३९, क्षे = ४

इष्टवर्गहृतः क्षेपः के अनुसार दो इष्ट मानने से क्षेप = १̇

$$\text{क} = \frac{५}{२};\ \text{ज्ये} = \frac{३९}{२}$$

तुल्य भावनार्थ न्यास—

$$\text{क}\ \frac{५}{२},\ \text{ज्ये}\ \frac{३९}{२}\ \text{क्षे}\ १̇$$

$$\text{क}\ \frac{५}{२},\ \text{ज्ये}\ \frac{३९}{२}\ \text{क्षे}\ १̇$$

अतः "वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलध्वोस्तदैक्य" मित्यादि के अनुसार—

$$\text{क} = \frac{१९५}{२},\ \text{ज्ये} = \frac{१५२३}{२}\ \text{क्षे} = १$$

पुनः पूर्वपदों के साथ भावनार्थ न्यास—

$$\text{क}\ \frac{१९५}{२},\ \text{ज्ये}\ \frac{१५२३}{२},\ \text{क्षे}\ १$$

$$\text{क}\ \frac{५}{२}\ \text{ज्ये}\ \frac{३९}{२}\ \text{क्षे}\ १̇$$

$$\text{कनिष्ठ} = \frac{५}{२} \times \frac{१५२३}{२} + \frac{१९५}{२} \times \frac{३९}{२} =$$

$$\frac{७६०५}{४} + \frac{७६१५}{४} = \frac{१५२२०}{४} = ३८०५$$

$$\text{ज्येष्ठ} = \frac{१९५}{२} \times \frac{५}{२}\ ६१ + \frac{१५२३}{२} \times \frac{३९}{२}$$

$$= \frac{५९४७५}{४} + \frac{५९३९७}{४} = \frac{११९९}{४}$$

= २९७१८ = ज्ये।

क्षेप = १̇ × १ = १̇

अतः कनिष्ट, ज्येष्ठ, क्षेप =

क = ३८०५, ज्ये = २९७१८, क्षेप = १̇।

तुल्यभावनार्थ न्यासः—

क ३८०५ ज्ये २९७१८ क्षे १̇

क ३८०८ ज्ये २९७१८ क्षे १̇

"वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलध्वोस्तदैक्य' मित्यादि के अनुसार कनिष्ठ = ३८०५ × २९७१८ + ३८०५ × २९७१८ = ११३०७६९९० + ११३०७६९९० =

२२६१५३९८० । ज्येष्ठपद = $(३८०५)^2 \times ६१ + (२९७१८)^2$
१४४७८०२५ × ६१ + ८८३१५९५२४ = ८८३१५९५२५ + ८८३१५९५२४ =
१७६६३१९०४९ = ज्ये. क्षेप = १ × १ = १ ।

अत: क्रमश: कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप =

$$\left.\begin{array}{l} \text{क} = २२६१५३९८० \\ \text{ज्ये} = १७६६३१९०४९ \end{array}\right\}$$

क्षे = १ ।

इस तरह आगत कनिष्ठ ही वह राशि है जिसके वर्ग को ६१ से गुणा कर एक जोड़ने से वर्गात्मक हो जाती है। इसी वर्गात्मक का मूल यहाँ ज्येष्ठ है।

अथ रूपशुद्धौ खिलत्वज्ञानप्रकारान्तरितपदानयनयोः

करणसूत्रं वृत्तद्वयम् ।

रूपशुद्धौ खिलोद्दिष्टं वर्गयोगो गुणो न चेत् ।
अखिले कृतमूलाभ्यां द्विधा रूपं विभाजितम् ।।५।।
द्विधा ह्रस्वपदं ज्येष्ठं ततो रूपविशोधने ।
पूर्ववद् वा प्रसाध्येते पदे रूपविशोधने ।।६।।

सुधा—रूप ऋणक्षेप में यदि गुण (प्रकृति) दो अङ्को का वर्गयोग नहीं हो तो प्रश्न को अशुद्ध समझना चाहिए। शुद्ध प्रश्न रहने की स्थिति में (अर्थात् प्रकृति यदि दो अङ्कों का वर्ग योग हो) दोनों वर्गों के मूल से दो जगह रूप में भाग लें तो रूप ऋणक्षेप में दो कनिष्ठ, तत: पर दोनों कनिष्ठों के द्वारा 'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्ग:' के अनुसार ज्येष्ठ भी द्विविध होंगे।

अथवा चार आदि वर्गात्मक ऋण क्षेप में 'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्ग;' के अनुसार कनिष्ठ ज्येष्ठ का साधन करके 'इष्टवर्गहृत: क्षेप:' के द्वारा रूप ऋणक्षेप में कनिष्ठादि पदों का साधन करें।

वासना—

वर्गप्रकृत्या प्र० $\text{क}^2 - १ = \text{ज्ये}^2$ ।

तत: समाशोधनेन प्र० $\text{क}^2 = \text{ज्ये}^2 + १$

$$\therefore \text{प्र} = \frac{\text{ज्ये}+१}{\text{क}^2} = \frac{\text{ज्ये}^2}{\text{क}^2} + \frac{१}{\text{क}^2}$$

$$= \left(\frac{\text{ज्ये}}{\text{क}}\right)^2 + \left(\frac{१}{\text{क}^2}\right)^2$$ एतेनैवोपपन्नं रूपशुद्धौ खिलोद्दिष्टं वर्गयोगो गुणो न चेदिति ।

अखिलत्वे हि प्रश्नस्य नूनं प्रकृतिः वर्गद्वययोगरूपा। अतः कल्प्यते

$प्र = इ^2 + इ'^2$

ततो रूपसमे कनिष्ठे '$इ^2$' वा '$इ'^2$' समे च ऋणक्षेपे कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेपाः

$क = 1,\ ज्ये = इ,\ क्षे = -इ'^2$

वा $क = 1\ ज्ये = इ'\ क्षे = -इ^2$

ततश्च इष्टवर्गहृतः क्षेप इत्यादिना

$$क = \frac{1}{इ'},\ ज्ये = \frac{इ}{इ'}\ \ क्षे = \dot{1}$$

$$वा\ क = \frac{1}{इ}, ज्ये = \frac{इ'}{इ},\ क्षे = \dot{1}$$

इत्युपपन्नं सर्वम्।

विशेषकृतेयं वासना बोध्या।

उदाहरणम्

त्रयोदशगुणो वर्गो निरेकः कः कृतिर्भवेत्।
कोवाऽष्टगुणितो वर्गो निरेको मूलदो वद॥ २॥

अत्र प्रकृतिर्द्विकत्रिकयोर्वर्गयोर्योगः १३। अतो द्विकेन रूपं हृतं रूपशुद्धौ कनिष्ठं पदं $\frac{1}{2}$ स्यात्। अस्य वर्गात् प्रकृतिगुणादेकोनान्मूलं ज्येष्ठम् = $\frac{3}{2}$

अथवा त्रिकेण रूपं हृतं कनिष्ठं $\frac{1}{3}$ स्यात्। अतो ज्येष्ठम् $\frac{2}{3}$।

अथवा कनिष्ठम् १। अस्य वर्गात् प्रकृतिगुणाच्चतुरूनान्मूलं ज्येष्ठम् ३।

क्रमेण न्यासः क १ ज्ये ३ क्षे $\dot{4}$

इष्टवर्गहृतः क्षेप इत्यादिना जाते रूपशुद्धौ पदे क $\frac{1}{2}$ ज्ये $\frac{3}{2}$ अथवा प्रकृतेर्नव त्यक्त्वैवमेव जाते क $\frac{1}{3}$ ज्ये $\frac{2}{3}$। चक्रवालेनाभिन्ने वा एषां ह्रस्वज्येष्ठपदक्षेपाणां भिन्नानां ह्रस्वज्येष्ठादक्षेपानित्यादिना भाज्यप्रक्षेपभाजकान् प्रकल्प्य पूर्वपदयोः न्यासः—भा $\frac{1}{2}$, हा $\dot{1}$ क्षो $\frac{3}{2}$। अत्र भाज्यभाजकक्षेपानर्धेनापवर्त्य जाताः—

भा १ हा $\dot{2}$ क्षो ३।

हरतष्टे इति कुट्टकेन गुणलब्धी $\frac{1}{2}$। अत्रेष्टमृणरूपं प्रकल्प्य जातोऽन्यो गुणः ३। गुणवर्गे इत्यादिना क्षेपः ४। लब्धिः ३ कनिष्ठमतो ज्येष्ठम् ११।

क्रमेण न्यासः क ३ ज्ये ११ क्षे ४

अतोऽपि पुनर्भाज्यप्रक्षेपभाजकानित्यादिना चक्रवालेन लब्धो गुणः ३ । गुणवर्ग इत्यादिना रूपशुद्धावभिन्ने पदे क ५ ज्ये १८ । इत्थं सर्वत्र पदार्ता रूपक्षेपपदाभ्यां भावनयाऽनन्त्यम् ।

एवं द्वितीयोदाहरणे प्रकृतिः ८ प्राग्जाते ह्रस्वरूपेष्टपदे क $\frac{१}{२}$ ज्ये १ ।

सुधा—कौन सा वर्ग है जिसे तेरह से गुणा कर एक घटाते हैं तो वर्गात्मक होता है ? या

कौन सा वर्ग है जिसे आठ से गुणा कर एक घटाते तो वर्ग होता है ?

उदाहरण

प्रथम उदाहरण में प्राकृति=१३ । चूंकि १३ = ९ + ४, अतः प्रकृति यहां दो अंकों का वर्गयोग, इस लिए प्रश्न शुद्ध है ।

अतः दोनों वर्गमूलों २, ३, से दो रूपों में भाग देने पर दो कनिष्ठ हुए $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$,

प्रथम कनिष्ट $\frac{१}{२}$ से इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्ग इत्यादि के द्वारा आनीत ज्येष्ठ $= \sqrt{(\frac{१}{२})^२ \times १३ - १} = \sqrt{\frac{१}{४} + १३ - १} = \sqrt{\frac{१३}{४} - १} = \sqrt{\frac{९}{४}} = \frac{३}{२}$ = ज्ये एवम् द्वितीय कनिष्ठ $\frac{१}{३}$ पर से आनीत ज्येष्ठ $= \sqrt{(\frac{१}{३})^२ \times १३ - १} = \sqrt{\frac{१३}{९} - १}$ $= \sqrt{\frac{४}{९}} = \frac{२}{३}$ = ज्ये ।

अथवा कनिष्ट = १ अतः ज्येष्ठ=३, क्षे = ४° इष्टवर्गहृत; क्षेप इत्यादि द्वारा इष्ट २ से आनीत कनिष्ठ = $\frac{१}{२}$, ज्ये=$\frac{३}{२}$, क्षे = १°

अथवाः - क = १, ज्ये = २, क्षे ९°

पुनः इष्टवर्गहृतः क्षेप इत्यादि के द्वारा ३ इष्ट मानने से क = $\frac{१}{३}$ ज्ये = $\frac{२}{३}$ क्षे = १°

पूर्वानीत कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप क्रमशः

$\frac{१}{२}$, $\frac{३}{२}$, १°, ये हैं । इन्हें भाज्य प्रक्षेप भाज्यक मानने से

भा = $\frac{१}{२}$ क्षे = $\frac{३}{२}$ हा = १° । इनमें $\frac{१}{२}$ से अपवर्त्तन देने पर भा=१ क्षे = ३, हा = २° । हार तष्टित क्षेप=१

अतः वल्ली विषम=$\dot{१}$ } राशियुग्म = ०, १,

विषय वल्ली के के कारण तक्षण में घटाने से ल = १ गुण =१ । क्षेपतक्षण लाभाढ्य लब्धि वास्तव लब्धि=१ + १=२ । हर के ऋण होने के कारण वास्तव लब्धि =२° । गुण=१ । "गुणवर्गे प्रकृत्योने" द्वारा अल्प शेष नहीं होता

अत: 'इष्टाहृतस्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार ऋण एक को इष्ट मानने से ल= ३̇ गुण= ३ ।

पुन: 'गुणवर्गे प्रकृत्योने' के अनुसार १३−९=अल्प है। अत: क्षेप=४ ÷ १̇ =४̇ 'धस्त: प्रकृतितस्च्युते' के अनुसार क्षेप=४

लब्धि=३=कनिष्ठ। अत: ज्येष्ठ=$\sqrt{३^२×१३+४}$ =$\sqrt{९×१३+४}$=$\sqrt{११७+४}$ =$\sqrt{१२१}$ = ११=ज्ये।

अत: कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप क्रमश:

क=३, ज्ये=११, क्षे ४

पुन: 'ह्रस्व ज्येष्टपदक्षेपान्' इत्यादि के अनुसार इन कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेपों को भाज्य, क्षेप तथा भाजक मानकर कुट्टकार्थ न्यास भा ३ क्षे ११ हा ४ यहाँ भी हरतष्टे धनक्षेपे करने से तष्ठितक्षेप = ३ = क्षेपतक्षण लब्धि = २

	०		
वल्ली =	१	सम हुई। राशिद्वय =	३ ।
	३		३
	०		

अत: वास्तव लब्धि = ३ + २ = ५ । गुण = ३

गुणवर्गे प्रकृत्योने के अनुसार गुण^२ = ९

१३ − ९ = ४ । पूर्वक्षेप ४ से भाग देने पर ४ ÷ ४ = १, किन्तु प्रकृति से गुणावर्ग यहाँ विशुद्ध हैं अत: क्षेप ऋण रूप हुआ।

लब्धि = ५ = कनिष्ठ, अत: ज्येष्ठ = $\sqrt{(५)^२ × १३ − १}$ = $\sqrt{(२५ × १३ − १}$ = १८ = ज्ये

अत: कनिष्ठ = ५ ज्ये = १८ क्षे = १̇

इसी प्रकार भावना के द्वारा अनन्त कनिष्ठ ज्येष्ठ होंगे।

दूसरा उदाहरण

प्र = ८ = ४ + ४ । अत: दो अङ्कों का वर्गयोग यहाँ भी प्रकृति है, अत: प्रश्न शुद्ध है।

अत: चार के वर्गमूल २ से एक में भार देने पर $\frac{१}{२}$ = कनिष्ट 'इष्टं ह्रस्वं तस्यवर्गं' इत्यादि के अनुसार ज्येष्ठ = $\sqrt{(\frac{१}{२})^२ × ८ − १}$ =

$$\sqrt{\frac{१}{४} × ८ − १} = \sqrt{१} = १ = \text{ज्ये, क्षेप} = \dot{१}$$

अत: कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप क्रमश:

$\frac{१}{२}$, १, १̇ ये हुए।

उदाहरणम्

को वर्गः षड्गुणस्त्र्याढ्यो द्वादशाढ्योऽथवा कृतिः ।
युतो वा पञ्चसप्तत्या त्रिशत्या वा कृतिर्भवेत् ।।३।।

अथ रूपं ह्रस्वं कृत्वा न्यासः प्र ६ क १ ज्ये ३ क्षे ३ अत्र क्षेपः 'क्षुण्णः क्षुण्णेऽथवा पदे' इति द्विगुणिते जाते द्वादश क्षेपे, २, ६,
पञ्चगुणे पञ्चसप्ततिमिते क्षेपे ५, १५
दशगुणे जाते त्रिशतीक्षेपे १० ; ३० ।

सुधा:—कौन सा वर्ग है जिसे छे से गुणा कर तीन या बारह, पचहत्तर या तीन सौ जोड देते हैं तो वर्गात्मक हो जाता है ?

उदाहरण:—

यहाँ प्रकृति = ६, 'इष्टं ह्रस्वं तस्यवर्गः' के अनुसार क=१ ज्ये=३ क्षे=३ ।
"इष्टवर्ग क्षुण्णः 'क्षेपः =' क्षेप, इष्ट भाजिते ते कनिष्ठज्येष्ठे भवतः" के अनुसार इष्ट=२। $२^२ = ४$ । ४×३ = १२ = क्षेप, क = २ ज्ये = ६ ।
अतः बारह क्षेप में क = २, ज्ये = ६
यदि इष्ट = ५ तो $इष्ट^२ = २५$ ।
अतः २५ × ३ = ७५ = क्षेप, १ × ५ = ५ = क
३ × ५ = १५ = ज्ये ।
यदि वा इष्ट = १० तो क्षेप = १०० × ३ = ३०० = क्षे
१० × १ = १० = कनिष्ठ
एवम् १० × ३ = ३० ज्येष्ठ ।
अतः प्रश्नोत्तर हो गया ।

अथेच्छयाऽऽनीतपदयोः रूपक्षेपपदानयनदर्शने सूत्रं सार्धवृत्तम्:—

स्वबुद्धयैव पदे ज्ञेये बहुक्षेपविशोधने ।
तयोर्भावनयाऽनन्त्यं रूपक्षेपपदोत्थया ।। ७ ।।
वर्गछिन्ने गुणे ह्रस्वं तत्पदेन विभाजयेत् ।

सुधा:—अधिक क्षेप वाले प्रश्नों में अपनी बुद्धि के अनुसार कनिष्ठ ज्येष्ठ पद लाकर रूप क्षेपोत्थ कनिष्ठ ज्येष्ठ के साथ भावना के द्वारा अनेक कनिष्ट ज्येष्ठ क्षेपों का अनयन करें ।

जहाँ प्रकृति में वर्गात्मक राशि से भाग लग जाय वहाँ कनिष्ठ को वर्गात्मक राशि के मूल से भाग दें ।

वासना:—महति क्षेपे धनात्मके ऋणात्मके वा 'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्ग'

इत्यादिना स्वबुद्ध्यैव कनिष्ठज्येष्ठे साध्ये । तत्साधनस्य युक्तिसंगतत्वात् । ततश्च रूपक्षेपपदोत्थया भावनया कनिष्ठज्येष्ठयोरानन्त्यं च सुलभम् ।

वर्गच्छिन्नायां प्रकृतौ तु विशेषः आलापोक्त्या प्र, $क^2 \pm क्षे = ज्ये^2$

$$\therefore \frac{प्र. क^2. अ^2}{अ^2} \pm क्षे = ज्ये^2$$

$$वा\ प्र. अ^2. \frac{क^2}{अ^2} \pm क्षे = ज्ये^2$$

$$अथवा\ प्र. अ^2. \left(\frac{क}{अ}\right)^2 \pm क्षे = ज्ये^2$$

अत्र यदि प्र $\times$ $अ^2$ = प्रकृतिः स्यात्तदा कनिष्ठम् $= \frac{क}{अ}$ एतेनोपपन्नं वर्गच्छिन्ने गुणे ह्रस्वमित्यादि ।

उदाहरणम्

द्वात्रिंशद् गुणितो वर्गः कः सैको मूलदो वद ।

न्यासः प्र ३२ । अतः प्राग्वत्कनिष्ठज्येष्ठे $\frac{१}{२}$, ३ । अथवा "वर्गच्छिन्ने गुणे ह्रस्वं तत्पदेन विभाजयेत्" इति प्रकृतिः ३२ । चतुश्छिन्ना लब्धम् ८ । अस्यां प्रकृतौ कनिष्ठज्येष्ठे १, ३ । येन वर्गेण ४ प्रकृतिश्छिन्ना, तस्य पदेन २ कनिष्ठे भक्ते जाते त एव पदे क $\frac{१}{२}$ ज्ये ३॥

सुधा—कौन सा वर्ग है, जिसे बत्तिस से गुणा कर एक जोड़ देते हैं तो मूलप्रद होता है, उसे कहो ।

उदाहरण

कल्पित कनिष्ठ = $\frac{१}{२}$, 'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गं' इत्यादि के अनुसार ज्येष्ठ =

ज्ये $= \sqrt{(\frac{१}{२})^२ \times ३२ + १} = \sqrt{\frac{१}{४} \times ३२ + १} = \sqrt{८+१} = ३$ । क्षेप=१ ।

अथवा

वर्गच्छिन्ने गुणे ह्रस्वं तत्पदेन विभाजयेत्" के अनुसार प्रकृति ३२ में ४ से भाग देने पर नवागत ८ प्रकृति में क = १ ज्ये = ३ क्षे = १ नियमानुसार क = $\frac{१}{२}$ ज्ये = ३ क्षे = १ ।

अथवा

प्रकृति ३२ में १६ से भाग देने पर लब्धि २ को प्रकृति मानकर 'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गं' इत्याद्यनुसार क=२, ज्ये=३, क्षे १ पुनः कनिष्ठ २ में १६ के मूल चार से भाग देने पर कनिष्ट = $\frac{२}{४} = \frac{१}{२}$ ।

ज्येष्ट = ३, क्षे = १ ।

अथ वर्गरूपायां प्रकृतौ भावनाव्यतिरेकेणानेकपदानयने करणसूत्रं वृत्तम्—

इष्टभक्तो द्विधा क्षेप इष्टोनाढ्योदलीकृतः ॥८॥
गुणमूलहृतश्चाद्यो ह्रस्वज्येष्ठे क्रमात्पदे ।

सुधा—(वर्गात्मक प्रकृति में) इष्टभक्त क्षेप को दो जगह रख कर एक जगह इसमें इष्ट घटा दें, दूसरी जगह उसमें इष्ट जोड़ दें, पुनः दोनों का आधा करें और पहले में प्रकृति के मूल से भाग लें तो क्रमशः कनिष्ट ज्येष्ठ हो जायगें।

वासना—आलापोक्तया।

$प्र. क^2 + क्षे = ज्ये^2 \quad \therefore क्षेप = ज्ये^2 - प्र\ क^2$

$= (ज्ये + \sqrt{प्र. क^2}) (ज्ये - \sqrt{प्र.क^2}.)$ इति वर्गान्तरं योगान्तरघात सममिति नियमतः।

अत्र यदि $ज्ये - \sqrt{प्र. क^2} = इष्टम् = इ,$

तदा $क्षेपः = (ज्ये + \sqrt{प्र. क^2}) \times इ.$

$\therefore ज्ये + \sqrt{प्र. क^2} = \frac{क्षे}{इ.}$

अत्र $ज्ये + \sqrt{प्र\ क^2}$ इति राशिद्वययोर्योगः $= \frac{क्षे}{इ}$

अनयोरन्तरं च इष्टत्वेन पूर्वमेव स्वीकृतमतः सङ्क्रमणेन राशी ज्ञेयौ।

तत्र लघुराशिः $\frac{1}{2}\left(\frac{क्षे}{इ} - इ\right) =$

$\sqrt{प्र. क^2} = \sqrt{प्र.} \times क$

$\therefore \frac{लराशि}{\sqrt{प्र}} = क = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{क्षे}{इ} - इ\right)}{\sqrt{प्र.}}$

$बृहद्राशिः = ज्ये = \frac{1}{2}\left(\frac{क्षे}{इ} + इ\right)$ ।

अत उपपन्नं सर्वम्

उदाहरणम्

का कृतिर्नवभिः क्षुण्णा द्विपञ्चाशद्युता कृतिः ॥ ४ ॥
को वा चतुर्गुणोवर्गस्त्रयस्त्रिंशद्युतः कृतिः ।

अत्र प्रथमोदाहरणे क्षेपः ५२ । द्विकेनेष्टेन हृतो द्विष्ठः इष्टोनाढ्यो दलीकृतो जातः १२, १४ अन्योराद्यः प्रकृतिमूलेन भक्तो जाते ह्रस्व-ज्येष्ठे ४, १४ ।

अथवा क्षेपं ५२ चतुर्विभज्य एवं जाते ह्रस्व ज्येष्ठे $\frac{३}{२}, \frac{१७}{२}$ ।

द्वितीयोदाहरणे क्षेपम् ३३, एकेनेष्टेन विभज्यैवं जाते ह्रस्वज्येष्ठे ८, १७ । त्रिभिर्जाते २, ७ ।

सुधाः—कौन सा वर्ग है जिसे नौ से गुणाकर गुणनफल में बावन जोड़ते हैं तो वर्गात्मक हो जाता है ?

या कौन सा वर्ग है जिसे चतुर्गुणित करके गुणनफल में तैंतीस जोड़ देने से वर्ग हो जाता है ?

उदाहरण

प्रथमोदाहरण में क्षेप = ५२ । प्रकृति = ९ = वर्गात्मक अतः 'इष्टभक्तो-द्विधाक्षेप' इत्यादि के अनुसार दो इष्ट मानकर

$$\frac{५२ \div २ - २}{२ \times \sqrt{९}} = क = \frac{२६ - २}{२ \times ३} = ४ = कनिष्ठ,$$

$$एवम् \quad \frac{५२ \div २ + २}{२} = ज्ये = \frac{२६ + २}{२} = १४,$$

अतः कनिष्ठ = ४ ज्ये = १४ क्षेप = ५२

द्वितीयोदाहरण में प्र = ४, क्षे = ३३

यहाँ भी 'इष्टभक्तोद्विधाक्षेप' के अनुसार एक इष्ट मान कर

$$\frac{३३ \div १ - १}{२ \times \sqrt{प्र}} = \frac{३२}{२\sqrt{प्र}} = \frac{१६}{२} = ८ = कनिष्ठ ।$$

$$एवम् \quad ज्येष्ठ = \frac{३३ \div १ + १}{२} = \frac{३४}{२} = १७ = ज्ये ।$$

अतः कनिष्ठ = ८ ज्येष्ठ = १७, क्षे = ३३

अथवा ३३ क्षेप में ३ इष्ट से भाग देने पर लब्धि = ११ ।

$$\therefore \frac{११ - ३}{२\sqrt{प्र}} = \frac{८}{२\sqrt{४}} = \frac{८}{२ \times २} = २ = कनिष्ठ ।$$

$$एवम् \quad \frac{११ + ३}{२} = \frac{१४}{२} = ७ = ज्येष्ठ ।$$

अत. कनिष्ठ = २, ज्येष्ठ = ७, क्षे= ३३

अतः आगत कनिष्ठों के ही वर्गों को गुण से गुणित कर तत्तत्क्षेपों के जोड़ने से ज्येष्ठवर्ग हो जाते हैं ।

अथवा प्रकृतिसमक्षेपे उदाहरणम्

त्रयोदश गुणो वर्गस्त्रयोदशविवर्जितः ॥ ५ ॥
त्रयोदशयुतो वा स्याद्वर्ग एव निगद्यताम् ।

प्रथमोदाहरणे प्रकृतिः १३ । जाते कनिष्ठ ज्येष्ठे १, ० । अत्र 'इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद्विवरम्' इत्यादिना रूपक्षेपमूले $\frac{३}{२}, \frac{११}{२}$ ।

आभ्यां भावनया त्रयोदशर्णक्षेपमूले $\frac{११}{२}, \frac{३९}{२}$ ।

वा एषामृणक्षेपपदानां रूपशुद्धिपदाभ्यामाभ्यां $\frac{१}{२}, \frac{३}{२}$ विश्लेष्यमाणभावनया त्रयोदशक्षेपमूले $\frac{३}{२}, \frac{१३}{२}$ वा १८, ६५ ।

सुधा :—कौन सा वर्ग है जिसे तेरह से गुणाकर गुणनफल में तेरह जोड़ या घटा देते हैं तो वर्गात्मक हो जाता है ।

उदाहरण

इस उदाहरण में प्र = १३

'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः' के अनुसार इष्ट = १= क

अतः ज्ये = $\sqrt{१^२ \times १३ - १३} = \sqrt{१३ - १३} = ०$

अतः क = १, ज्ये = ०, क्षे = १३°

समास भावना के लिए न्यास :—

क १ ज्ये ० क्षे १३°
क १ ज्ये ० क्षे १३°

'वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्व्योस्तदैक्यम्' के अनुसार

क = ० ज्ये = १३ क्षे = १६९

यदि इष्ट = १३ तदा 'इष्टवर्गहृतः क्षेपः क्षेपः' इत्यादि के अनुसार क = ० ज्येष्ठ = १ क्षे = १

पूर्वपदों के साथ भावना करने पर

क १ ज्ये ० क्षे १३°
क ० ज्ये १ क्षे १

यहाँ समास भावना या अनन्तर भावना दोनों से क= १ ज्ये = ०, क्षे =१३° होते हैं जो पूर्वपद के समान ही है ।

'इष्टवर्गं प्रकृत्योर्यद्विवरम्' के अनुसार कल्पित इष्ट = ३ ।

$१३ - (३)^2 = ४$ ।

$$\frac{३ \times २}{४} = \frac{३}{२} = \text{कनिष्ठ} ।$$

पुनः "इष्टं ह्रस्वं तस्यवर्ग" के अनुसार

$$\sqrt{\left(\frac{३}{२}\right)^2 \times १३ + १} = \sqrt{\frac{९}{४} \times १३ + १} = \sqrt{\frac{११७}{४} + १} =$$

$$\sqrt{\frac{१२१}{४}} = \frac{११}{२} = \text{ज्येष्ठ} ।\ \text{क्षे} = १ ।$$

पूर्वपदों के साथ भावना

क १ ज्ये ० क्षे $१३^{\cdot}$

क $\frac{३}{२}$ ज्ये $\frac{११}{२}$ क्षे १

वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वोस्तदैक्यमित्यादि के अनुसार

$$\text{क} = \frac{११}{२},\ \text{ज्ये} = १ \times \frac{३}{२} \times १३ + \frac{११}{२} \times ० = \frac{३९}{२} + ० = \frac{३९}{२} ।$$

क्षेप $= १३^{\cdot} \times १ = १३^{\cdot}$ ।

इसका पुनः (क $\frac{१}{२}$ ज्ये $\frac{३}{२}$ क्षे $१^{\cdot}$) के साथ भावना—

क $\frac{११}{२}$ ज्ये $\frac{३९}{२}$ क्षे $१३^{\cdot}$

ह्रस्वं वज्राभ्यासयोरन्तरं वा के अनुसार—

कनिष्ठ = वज्राभ्यास का अन्तर

$$= \frac{१}{२} \times \frac{३९}{२} - \frac{११}{२} \times \frac{३}{२} = \frac{३९}{४} - \frac{३३}{४} = \frac{६}{४} = \frac{३}{२} = \text{क}$$

$$\text{ज्येष्ठ} = \frac{१}{२} \times \frac{११}{२} \times १३ \backsim \frac{३९}{२} \times \frac{३}{२}$$

$$\frac{११}{४} \times १३ \backsim \frac{११७}{४} = \frac{१४३}{४} \backsim \frac{११७}{४} = \frac{२६}{४} = \frac{१३}{२} = \text{ज्येष्ठ} ।$$

क्षेप $= १३^{\cdot} \times १^{\cdot} = १३$

अतः कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप क्रमशः

$\frac{३}{२}$, $\frac{१३}{२}$, १३

अथवा योग भावना के द्वारा

$$\text{वज्राभ्यास योग} = \frac{३३}{४} + \frac{३९}{४} = \frac{७२}{४} = १८ = \text{क}$$

कनिष्ठद्वयघात $= \frac{१}{२} \times \frac{११}{२} = \frac{११}{४}$ । प्रकृति गुणित यह =

$$\frac{११}{४} \times १३ = \frac{१४३}{४}$$ ।

ज्येष्ठद्वयघात $= \frac{३}{२} \times \frac{३९}{२} = \frac{११७}{४}$

घातद्वय योग $= \frac{१४३}{४} + \frac{११७}{४} = \frac{२६०}{४} = ६५ =$ ज्ये

अतः क = १८ ज्ये = ६५ क्षे १३ ।

उदाहरणम् :—

ऋणगैः पञ्चभिः क्षुण्णः को वर्गः सैकविंशतिः ॥ ६ ॥
वर्गः स्याद्वद चेद्वेत्सि क्षयगप्रकृतौ विधिम् ।

न्यासः प्र ५̇ । अत्र जाते मूले १, ४ । वा २, १ । रूपक्षेपभावनयाऽनन्त्यम् ।

सुधा :—कौन सा वर्ग है जिसे ऋणात्मक पाँच से गुणाकर इक्कीस जोड़ देते हैं तो वर्गात्मक हो जाता है, कहो ।

उदाहरण

यहाँ प्रकृति = ५̇ । कल्पित कनिष्ठ = १ इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः के अनुसार ज्ये = ४, क्षे = २१ ।

यदि इष्ट = २ = कनिष्ठ

तो $= \sqrt{२^2 \times ५̇ + २१} = १ =$ ज्ये

क्षे = २१

अतः कनिष्ठज्येष्ठ क्षेप क्रमशः २, १, २१ हुए ।

पुनः पुनः भावनाओं के द्वारा अनेक कनिष्ठ ज्येष्ठ पद लाए जा सकते हैं ।

उक्तं बीजोपयोगीदं संक्षिप्तं गणितं किल
अतो बीजं प्रवक्ष्यामि गणकानन्दकारकम् ॥

इति भास्करीयबीजगणिते वर्गप्रकृतिचक्रवालः समाप्तः ।

सुधा—आरम्भ से लेकर चक्रवाल पर्यन्त बीजोपयोगी गणित मैंने (ग्रंथकार ने) कहा है अब गणकों के आनन्द देने वाला बीज का वर्णन करूंगा ।

देवचन्द्रकृतबीजवासना सद्विमर्शसुधयाभिषिञ्चिता ।
सद्विवेचनपरैस्तु कोविदैः चक्रवालगणिते विलोक्यताम् ।

अथैकवर्णसमीकरणम्

यावत्तावत्कल्प्यमव्यक्तराशे-
र्मानं तस्मिन् कुर्वतोद्दिष्टमेव ।
तुल्यौ पक्षौ साधनीयौ प्रयत्ना-
त्त्यक्त्वा क्षिप्त्वा वापि संगुण्य भक्त्वा ॥१॥

एकाव्यक्तं शोधयेदन्यपक्षा-
द्रूपाण्यन्यस्येतरस्माच्च पक्षात्
शेषाव्यक्तेनोद्धरेद्रूपशेषं-
व्यक्तं मानं जायतेऽव्यक्तराशेः ॥ २ ॥

अव्यक्तानां द्व्यादिकानामपीह,
यावत्तावद् द्व्यादिनिघ्नं हृतं वा ।
युक्तोनं वा कल्पयेदात्मबुद्ध्या,
मानं क्वापि व्यक्तमेवं विदित्वा ॥ ३ ॥

प्रथममेकवर्णसमीकरणं बीजम् । द्वितीयमनेकवर्णसमीकरणं बीजम् । यत्र वर्णस्य, द्वयो र्वा बहूनां वर्गादिगतानां समीकरणं तन्मध्यमाहरणम् । यत्र भावितस्य तद्भावित मिति बीजचतुष्टयं वदन्त्याचार्याः ।

तत्र प्रथमं तावदुच्यते—पृच्छकेन पृष्टे सत्युदाहरणे योऽव्यक्तराशिस्तस्य मानं यावत्तावदेकं द्व्यादि वा प्रकल्प्य तस्मिन्नव्यक्तराशौ उद्देशकालापवत् सर्वं गुणनभजनत्रैराशिकपञ्चराशिकश्रेढी फलक्षेत्रव्यवहारादि गणकेन कार्यम् । तथा कुर्वता द्वौ पक्षौ प्रयत्नेन समौ कार्यौ । यद्यालापे समौ पक्षौ न स्तः तदैकतरे न्यूनपक्षे किंचित्प्रक्षिप्य ततोऽधिकपक्षात्तावदेव विशोध्य वा न्यूनं पक्षं केनचित् संगुण्य वाऽधिकं पक्षं तावतैव भक्त्वा समौ कार्यौ । ततस्तयो रेकस्य पक्षस्याव्यक्तमन्यपक्षस्याव्यक्तात् शोध्यमव्यक्तवर्गादिकमपि । अन्य पक्षरूपाणि इतरपक्ष रूपेभ्यः शोध्यानि । यदि करिण्यः सन्ति तदा ता अपि उक्त प्रकारेण शोध्याः । ततोऽव्यक्तराशिशेषेण रूपशेषे भक्ते

यल्लभ्यते तदेकस्याव्यक्तस्य मानं व्यक्तं जायते। तेन कल्पितोऽव्यक्त राशिरुत्थाप्यः।

यत्रोदाहरणे द्व्यादयोऽव्यक्तराशयो भवन्ति तदा तस्यैकं यावत्तावत् प्रकल्प्य अप्येषां द्व्यादिभिरिष्टैर्गुणितं भक्तं वा इष्टै रूपैरूनं युतं वा यावत्तावदेव कल्प्यम्।

अथवा एकस्य यावत्तावदन्येषां व्यक्तान्येव मानानि कल्प्यानि। सर्वं विदित्वेति यथा क्रिया निर्वहति तथा बुद्धिमता ज्ञात्वा शेषाणामव्यक्तानि व्यक्तानि वा कल्प्यानीत्यर्थः।

सुधाः—दिए हुए प्रश्नों में अव्यक्तराशि का मान यावत् कालक आदि मानना चाहिए। प्रश्नानुसार गुणन, भजनादि क्रियाओं के द्वारा समान दो पक्ष बनाना चाहिए। आलापानुसार क्रिया करते हुए तुल्य पक्षद्वय के किसी एक पक्ष में कुछ जोड़ या घटाकर अथवा किसी से गुणा या भाग देकर भी दोनों पक्षों को समान बनाना समीकरण में आवश्यक होता है।

वस्तुतः पक्षों के समान बनाने के कारण ही इसका नाम समीकरण है।

इस प्रकार समीकृत दोनों पक्षों में से प्रथम पक्ष के अव्यक्त को दूसरे पक्ष के अव्यक्त में, और दूसरे के रूपों (व्यक्तों) को प्रथम पक्ष के रूपों में घटायें इस तरह एक पक्ष में अव्यक्त और दूसरे पक्ष में व्यक्त (रूप) रह जायगें। पुनः अव्यक्त के गुणकांक से दोनों में भागा देने पर अव्यक्त राशि का मान निकल जायगा।

जहाँ दो, तीन अव्यक्त राशियाँ हों वहाँ एक का मान केवल यावत् और दूसरों का मान दो आदि इष्टों से गुणित या भक्त, रूपों से युक्त या ऊन अव्यक्त और दूसरों का व्यक्त ही मान मानें।

उपर्युक्त सभी बातों को जानकर जिससे आलापानुसार क्रिया का निर्वाह हो वैसी ही कल्पना बुद्धिमान् गणक करें।

वासनाः—अव्यक्तानां मानानि यावत्तावदादीनि कल्प्यानि। आलापानुसारं समौ पक्षौ च साधनीयौ। तुल्ययोः पक्षयोः समशोधनयोजनाभ्यां समगुणनभजनाभ्यां वा पक्षौ समानावेव तिष्टत इति मूलमन्त्रं समीकरणे। तथा सति पक्षादेकस्मात् अव्यक्तराशीन् परस्माश्च व्यक्तान् प्रथमपक्षे समानयनतः पाक्षावुभावपि समानावेव स्यातयतः, पक्षयोः समशोधनत्वात्। अवसाने अव्यक्तगुणकाङ्कनः पक्षयोर्भजने अव्यक्तस्य मानं व्यक्तीभूतं स्यादेवेति सर्वं स्फुटमेवास्ति।

उदाहरणम्

एकस्य रूपत्रिशती षडश्वा अश्वा दशान्यस्य तु तुल्यमूल्याः ।
ऋणं तथा रूपशतं च तस्य तौ तुल्यवित्तौ च किमश्वमूल्यम् ।

अत्राश्वमानमज्ञातं तस्य मानं यावत्तावदेकं कल्पितम् या १ । तत्र त्रैराशिकं यद्यकेस्य यावत्तावन्मूल्यं तदा षण्णां किमिति फलमिच्छा गुणं प्रमाणभक्तं लब्धं षण्णामश्वानां मूल्यम् या ६ । अत्र रूपशत-त्रये प्रक्षिप्ते जातमाद्यस्य धनम् या ६ रू ३०० ।

एवं दशानां मूल्यम् या १० । अत्र रूपशतेचर्णगते प्रक्षिप्ते जातं द्वितीस्य धनम् या १० रू १००˙ ।

एतौ समधनाविति पक्षौ स्वत एव समौ जातौ ।

समशोधनार्थं न्यासः— (या ६ रू ३००)
(या १० रू १००˙)

अथ एकाव्यक्तं शोधयेदन्यपक्षादिति आद्यपक्षाव्यक्तेऽन्यपक्षा-व्यक्ताच्छोजिते शेषम् या ४ । द्वितीयपक्षरूपेषु आद्यपक्षरूपेभ्यः शोधितेषु शेषम् रू ४०० ।

अव्यक्तराशिशेषेणया ४ रूपशेषे रू ४०० उद्धृते लब्धमेकस्य यावत्तावतो मानं व्यक्तम् १०० ।

यद्येकाश्वस्येदं मौल्यं तदा षण्णां किमिति त्रैराशिकेन लब्धं षण्णां मौल्यं ६०० रूपशतत्रय युतं ९०० जातमाद्यस्य धनम् । एवं द्वितीय-स्यापि ९०० ।

सुधा—एक व्यति के पास तीन सौ रुपये तथा ६ घोड़े हैं । और दूसरे के पास दश घोड़े, किन्तु एक सौ रुपये इसे ऋण है । यदि दोनों तुल्यधन वाले हों तो घोड़े का मूल्य क्या है ?

उदाहरण

यहाँ घोड़े का मूल्य अज्ञात है अतः एक घोड़े का मूल्य एक यावत्तावत् (अर्थात् या) कल्पना करने पर प्रश्नानुसार प्रथम व्यक्ति के पास छे घोड़े रहने के कारण ६ या + ३०० धन हुआ एवच् दूसरे के पास दश घोड़े रहने के कारण १० या − १०० धन हुआ । प्रश्नानुसार दोनों पक्ष तुल्य हैं, अतः ६या + ३०० = १०या − १०० दोनों पक्षों में समशोधन तथा सम योजन से १०या − ६या = १०० + ३००

∴ ४ या = ४०० ∴ या = १०० = अश्व का मूल्य ।

एक घोड़े का मूल्य १०० रहे तो प्रथम व्यक्ति के पास ६०० + ३०० = ९०० ।

दूसरे के पास १००० − १०० = ९०० ।

द्वितीयोदाहरणम्

यदाद्यवित्तस्य दलं द्वियुक्तं,
यत्तुल्यवित्तो यदि वा द्वितीयः ।
आद्यो धनेन त्रिगुणोऽन्यतो वा,
पृथक् पृथग् मे वद वाजिमूल्यम् ॥२॥

अथ द्वितीयोदाहरणे प्रथमद्वितीययोस्त एव धनेः—

{ या ६ रू० ३०० ।
{ या १० रू० १००° ।

अयाद्यपक्षधनार्धेन द्वियुक्तेन तुल्यमन्यस्य धनमुदाहृतमत आद्यधनार्धे द्वियुते ।

अथवाऽन्यधने द्विहीने द्विगुणे कृते पक्षौ समौ भवतस्तथा। कृते शोधनार्थं न्यासः

{ या ३ रू १५२ ।
{ या १० रू१००° ।

अथवा   या ६. रू ३०० ।
             या २० रू २६४ ।

उभयोरपि शोधनाद्ये कृते लब्धं यावत्तावन्मानम् ३६ । अनेन पूर्ववदुत्थापने कृते जाते धने ५१६, २६० अथ तृतीयोदाहरणे त एव धने । अत्राद्यधनत्र्यंशः परधनमिति परं त्रिगुणीकृत्य न्यासः ।

{ या ६ रू ३०० ।
{ या ३० रू ३००° ।

समक्रियया लब्धं यावत्तावन्मानम् २५ । अनेनोत्थापिते जाते धने ४५०, १५० ।

दूसरा उदाहरण

सुधा—यदि प्रथम व्यक्ति के धन के आधे में दो जोड़ने पर दूसरे के धन के बराबर हो, या पहले का धन दूसरे के धन से त्रिगुण हो तो अलग-अलग घोड़े का मूल्य क्या होगा ?

प्रश्नानुसार पहले के धनार्ध में दो जोड़ने से दूसरे के धन के बराबर होता है, अतः—

$$\frac{६ य + ३००}{२} + २ = १० य - १००$$

$$\therefore ३ य + १५० + २ = १० य - १००$$

वा $$१५२ + १०० = १० य - ३ य = ७ य$$

$$\therefore य = \frac{२५२}{७} = ३६. = \text{घोड़े का मूल्य।}$$

तीसरा उदाहरण

प्रश्नानुसार चूँकि पहले का धन दूसरे के धन से त्रिगुणित है अतः—

$$\frac{६ य + ३००}{३} = १० य - १००$$

$$\therefore ६ य + ३०० = ३० य - ३००$$

$$\therefore ३०० + ३०० = ३० य - ६ य = २४ य$$

$$\therefore ६०० = २४ य \quad \therefore य = २५।$$

एक घोड़े का मूल्य = २५ अतः ६ घोड़े का = १५०

अतः प्रथम का धन ४५० । तथा दूसरे का धन =

२५० − १०० = १५० ।

उदाहरणम्

माणिक्यामलनीलमौक्तिकमितिः पञ्चाष्ट सप्त क्रमा—

देकस्यान्यतरस्य सप्त नव षट् तद्रत्नसंख्या सखे ।

रूपाणां नवतिर्द्विषष्टिरनयोस्तौ तुल्यवित्तौ तथा

बीजज्ञ ! प्रतिरत्नजानि सुमने मौल्यानि शीघ्रं वद ॥३॥

अत्राव्यक्तानां बहुत्वे कल्पितानि माणिक्यादीनां मौल्यानि या ३, या २, या १, । यदि एकस्य रत्नस्य इदं मौल्यं तदोद्दिष्टानां किमिति लब्धानां यावत्तावतां योगे स्वस्वरूपयुते जातौ पक्षौ

या १५ या १६ या ७ रु ९०

या २१ या १८ या ६ रु ६२

एते अनयोर्धने इति समशोधने कृते लब्धं यावत्तावन्मानम् ४ ।

अनेनोत्थापितानि माणिक्यादीनां मौल्यानि १२, ८, ४ । एवम् सर्वधनम् २४२ ।

अथवा माणिक्यमानं यावत्तावत्, नीलमुक्ताफलयो मौंल्ये व्यक्ते एव कल्पिते ५, ३ । अतः समीकरणेन लब्धं यावत्तावन्मानम् १३ । अनेनोत्थापिते जातं समधनम् २१६ । एवं कल्पनावशादनेकधा ।

सुधा:—एक व्यक्ति के पास पाँच माणिक्य; आठ नीलमणि, सात मोती और नब्बे रुपये हैं। और दूसरे के पास सात माणिक्य, नौ नीलमणि, छे मोती और बासठ रुपये हैं। यदि ये तुल्य धन वाले हों तो माणिक्यादि प्रत्येक रत्न का मूल्य हे बीजज्ञ ! मुझे शीघ्र बतलावें।

उदाहरण:—

यहाँ माणिक्य आदि का मूल्य कमशः ३ य, २ य, १ य, माना। तदनुसार प्रथम का धन =

१५ य + १६ य + ७ य + ९० । तथा दूसरे का धन =

२१ य + १८ य + ६ य + ६२ ।

प्रश्नानुसार दोनों तुल्यधन हैं

अतः १५ य + १६ य + ७ य + ९० = २१ य + १८ य + ६ य + ६२

∴ ३८ य + ९० = ४५ य = ६२

∴ ९० − ६२ = ४५ य − ३८ य = ७ य

∴ २८ = ७ य ∴ य = ४

अतः प्रथम व्यक्ति का धन = ३८ × ४ + ९० = २४२

दूसरे का धन = ४५ × ४ + ६२ = २४२

या अन्यथा उत्तर

एक माणिक्य का मूल्य = य,
एक नीलमणि का मूल्य = ५
एक मोती का मूल्य = ३ } मानने से

प्रथम व्यक्ति का धन = ५ य + ४० + २१ + ९० = ५ य + १५१

दूसरे ,, का धन = ७ य + ४५ + १८ + ६२ = ७ य + १२५

प्रश्नानुसार दोनों तुल्य धन हैं

अतः ५ य + १५१ = ७ य + १२५

∴ १५१ − १२५ = ७ य − ५ य = २ य

∴ २६ = २ य वा य = १३

अतः प्रथम का धन = १३ × ५ + १५१ = ६५ + १५१ = २१६

दूसरे का धन = १३ × ७ + १२५ = ९१ + १२५ = २१६

इस प्रकार माणिक्य आदि का मूल्य अनेक विध हो सकते ।

उदाहरणम्:—

एको ब्रवीति मम देहि शतं धनेन
त्वत्तो भवामि हि सखे द्विगुणस्ततोऽन्यः ।
ब्रूते दशार्पयसि चेन्मम षड्गुणोऽहं
त्वत्तस्तयोर्वद धने मम किंप्रमाणे ॥ ४ ॥

अत्र कल्पिते आद्यधने या २ रु १००̇
या १ रु १००

अनयोः परस्य शते गृहीते आद्यो द्विगुणः स्यादित्येकालापो घटते । अथाद्याद्दशापनीय दशभिः परधनं युतं षड्गुणीकृत्य न्यासः—

{ या १२ रु ३६० । अतः समीकरणेन लब्धं यावत्ता
{ या १ रु ११० । तन्मानम् ७० । अनेनोत्थापिते जाते धने ४०, १७० ।

सुधा :—

एक व्यक्ति दूसरे से कहता है कि यदि तुम अपने धन में से एक सौ मुझे दे दो तो मैं तुमसे दूना हो जाऊँगा । दूसरे ने प्रथम से कहा—यदि तुम अपने धन से दश मात्र दे देते हो तो मैं तुमसे षड्गुणित हो जाऊँगा । तो बतलाइए कि दोनों के पास कितने-कितने धन थे ।

उदाहरण

यहाँ प्रथमालाप घटित दोनों के धन की कल्पना की

जैसे प्रथम का धन = २ य − १००

दूसरे का धन = १ य + १००

ऐसी कल्पना से प्रथम आलाप घट जाता है अर्थात् दूसरा व्यक्ति यदि प्रथम को १०० रु० दे दे तो दूसरे के पास 'य' मात्र और प्रथम के पास '२ य' रह जायेंगे । अतः प्रथम आलाप घटित हो जायगा ।

यदि प्रथम अपने धन से दश मात्र दूसरे को देता है तो प्रथम से दूसरा षड्गुणित हो जाता है, अतः ६ (२ य − ११०) = १ य + ११०

वा १२ य − ६६० = १ य + ११०

अथवा ११ य = ७७०

∴ य = ७७०/११ = ७०

अतः प्रथम के पास धन = २×७० − १०० = ४०

दूसरे के पास धन = ७०+१०० = १७०

४० और १७० से आलाप भी घट जाता है

अथवा द्वितीयालापघटित दोनों के धन की कल्पना की। इस तरह प्रथम का धन = य + १० तथा दूसरे का धन = ६ य − १०।

ऐसी कल्पना से द्वितीय आलाप सरलतया घटता है

प्रथमालापानुसार—

१ य + १० + १०० = २ (६य − १०)

∴ य + ११० = १२ य − २२०

∵ ३३० = ११य

∴ य = ३०

अतः प्रथम का धन = ३० + १० = ४०

द्वितीय का धन = १८० − १० = १७०

यह पूर्व तुल्य ही है।

विमर्श : यहाँ प्रथमालाप घटित या द्वितीयालाप घटित कल्पना किये बिना भी दोनों के धन का ज्ञान आसानी से हो सकता है।

जैसे कि दोनों के धन क्रमशः य, क हैं। अतः आलापानुसार—

य + १०० = २ (क − १००)

∴ य = २ क − ३०० (१)

द्वितीयालापानुसार क + १० = ६ (य − १०)

∴ क + १० = ६ य − ६०

$$\therefore य = \frac{क + ७०}{६} \qquad (२)$$

प्रथम द्वितीय स्वरूपों के समीकरण से

$$२ क - ३०० = \frac{क+७०}{६} \quad \therefore १२ क - १८०० = क + ७०$$

∴ ११ क = १८७०

∴ क = १७०

अतः एक स्वरूप में उत्थापन से

य = ४०

अव्यक्तद्वय की कल्पना के कारण ही ग्रंथकार ने इस मार्ग को छोड़ कर अन्य मार्ग का अवलम्बन किया है।

उदाहरणम् :—

माणिक्याष्टकमिन्द्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं
यत्ते कर्णविभूषणे समधनं क्रीतं त्वदर्थं मया।
तद्रत्नत्रयमौल्यसंयुतिमितिस्त्र्यूनं शतार्धं प्रिये
मौल्यं ब्रूहि पृथग् यदीह गणिते कल्यासि कल्याणिनि?॥५॥

अत्र समधनं यावत्तावत् १। यदाष्टानां माणिक्यादीनांमिदं मौल्यं तदैकस्य किमिति एवं त्रैराशिकेन सर्वत्र मौल्यानि या $\frac{१}{८}$ या $\frac{१}{१०}$, या $\frac{१}{१००}$। एषां योगः सप्तचत्वारिंशता सम इति समशोधनार्थं न्यासः—

$$\text{या } \frac{४७}{२००} \text{ रु}० ।$$

$$\text{या } ० \text{ रु } ४७ ।$$

एतौ पक्षौ समच्छेदीकृत्य छेदगमे समीकरणेन लब्धं यावत्तावन्मानम् २००। अनेनोत्थापितानि जातानि रत्नमौल्यानि २५, २०, २। समधनम् २००। एवं कर्णभूषणे रत्नमौल्यम् ६००।

अत्र समच्छेदीकृत्य शोधनार्थमाद्यपक्षेण परपक्षे ह्रियमणे छेदांशविपर्यासे कृते परस्य छेदो गुणोंऽशोहरश्चेति तुल्यत्वात् तयोर्नाशो भवतीति छेदगमः क्रियते।

सुधा :—हे कल्याणिनि ! तुम्हारे कर्ण भूषण के लिए तुल्य कीमत वाले आठ माणिक्य, दश इन्द्रनीलमणि तथा सौ मोती जो मेने खरीदे उन सभी रत्नों के मूल्यों का योग सैतालिस होता है, तो बताओ प्रत्येक रत्न का मूल्य क्या है ?

उदाहरण :—

यहाँ माणिक्य आदि का मूल्य अलग२ कल्पना करने से क्रिया का निर्वाह नहीं होता अतः समधन प्रमाण य माना। अर्थात् ८ माणिक्य, १० नीलमणि १०० मोती का जो मूल्य है उसी का मान 'य' अव्यक्त माना गया।

अतः त्रैराशिक के द्वारा १ माणिक्य का मूल्य $= \frac{य \times १}{८}$

एक इन्द्रनील मणि का मूल्य $= \frac{य}{१०}$

एवम् एक मोती का मूल्य $= \frac{य}{१००}$

तीनों का योग $= \frac{य}{८} + \frac{य}{१०} + \frac{य}{१००} = ४७$ (प्रश्नानुसार)

$\therefore \frac{य}{८} + \frac{य}{१०} + \frac{य}{१००} =$

$\frac{१४य}{४००} = \frac{४७य}{२००} = ४७$

$\therefore$ ४७य = ४७ × २००

$\therefore$ य = २०० = समधन

अर्थात् ८ माणिक्य, १० नीलमणि या १०० मोती का मूल्य = २००

अतः १ माणिक्य का मूल्य $= \frac{२००}{८} = २५$

१ नीलमणि का मूल्य $= \frac{२००}{१०} = २०$

१ मोती का मूल्य $= \frac{२००}{१००} = २$

२५ + २० + २ = ४७ ।

विमर्श :—एक वर्ण सम्बद्ध सरल प्रश्नों के उत्तर के लिए दिग्दर्शनार्थ कुछ उदाहरण तथा सोत्तर प्रश्न : –

उदाहरण (१) ४य + ३ = २य + १३ हो तो य का मान क्या है

पक्षान्तरनयन से ४य – २य = १३ – ३

अन्तर करने से २य = १०

दो से भाग देने से य $= \frac{१०}{२} = ५$ ।

इस मान को समीकरणों में य के स्थान में रखने से

५ × ४ + ३ = २ × ५ + १३

वा २० + ३ = १० + १३

वा २३ = २३ अतः अव्यक्त मान की सत्यता सिद्ध हो गई ।

उदाहरण (२) ११य - (१३ - य) = ११ हो तो य का मान बतलाइए :—

कोष्ठ हटा देने से ११य − १३ + य = ११

∴ १२य = ११ + १३ = २४

बारह से भाग देने से य = $\frac{२४}{१२}$ = २

उदाहरण (३) (य + ७) (य − ३) + ७य
= (२य − ७) (य − ५) − य^2 + १६ तो य का मान क्या है ?

कोष्ठों को तोड़ने पर य^2 + ७य − ३य − २१ + ७ य =
२य^2 − ७य − १०य+३५ − य^2 + १६

∴ य^2 + ११य − २१ = य^2 − १७ य + ५१

∴ २८ य = ७२ ∴ य = $\frac{७२}{२८} = \frac{१८}{७}$

उदाहरण (४) अ य − क = ग − घ य, इसमें 'य' का मान क्या है ?

पक्षान्तरनयन से

अय + घ.य = ग + क

∴ य (अ + घ) = ग + क

∴ य = $\frac{ग + क}{अ + घ}$

उदाहरण (५) अय^2 + अकय = अ^2.य - अगय^2, इसमें य का मान बतलाइए :—

अय^2 + अकय = अ^2 . य − अगय^2

∴ अय^2 + अगय^2 = अ^2.य − अकय

∴ य^2 (अ + अग) = य (अ^2 − अक)

पक्षद्वय में 'य' से भाग देने से

∴ य (अ + अग) = अ^2 − अक

∴ य = $\frac{अ^2 - अक}{अ + अग} = \frac{अ (अ - क)}{अ (१ + ग)} = \frac{अ - क}{१ + ग}$

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) ४य − १३ = २य − ३ है तो य = ५

(२) ४० + य = ५य + ८ है तो य = ८

(३) $४य^2$ − ५य + ४ = य (४य − ३) − ४ तो य = ४

(४) २८ − ४य + २ = १२य − २ है तो य = २

(५) ४ (२य − ४) + १५ = ६य + ५ है तो य = ३

(६) (य − १) × ४ + १५ = २५ − ३य तो य = २

(७) ३५ × (१३ − ६) − २८ (९ − ५य) =
 १८९ − १४ (७य − ३) तो य = १

(८) $२य^2$ − ४य + ३० = $३य^2$ − ९य + ३० तो य = ५

(९) (य−१) (य + २) = (य − २) (य + ४) तो य ६

(१०) ८(य + ५) (य + १३) − ११ (य + २) (य + १३) = २४य
 − ३ (य + २) (य + ५) इसमें य = ११

(११) ४९ + १३ (५य + २७) = ८ (५ + य) − ३य इसमें य = − ६

(१२) १६ − ५ (७य − २) = १३ (य − २) + ४ (१३ − य) इसमें
 य = ०

(१३) ८य + ५ (य + ७) + ९ (२य + २३) − ३(य + ६) = ० है तो
 य = − ८

(१४) (य − ७) (४य − २९) = (२य − ५) (२य − १७) + १
 इसमें य = ९

(१५) (३य + २) (२य − ६) = (४ − ३य) (१ − २य) − १०
 इसमें य = − २

(१६) (य + २) (२य + ५) = २ $(य + १)^2$ + १३
 इसमें य = १

(१७) $\frac{य}{२} + ५ = \frac{य}{३} + ७$ इसमें य = १२

(१८) $\frac{य}{६} - \frac{य}{५} = \frac{य}{१५} - \frac{य}{३} + ७$ इसमें य = ३०

(१९) $\frac{य}{२} - \frac{य}{३} + \frac{य}{४} = २ - \frac{य}{६} + \frac{५य}{१२}$ इसमें य = १२

(२०) (य + अ) (य − क) = (य − ग) (य − घ) इसमें

$$य = \frac{अक + गघ}{अ - क + ग + घ}$$

—०—

उदाहरणम्

पञ्चांशोऽलिकुलात्कदम्बमगमत् त्र्यंशः शिलीन्ध्रं तयोः—
विश्लेषस्त्रिगुणो मृगाक्षि कुटजं दोलायमानोऽपरः ।
कान्ते ! केतकमालतीपरिमलप्राप्त्यैककालप्रिया—
दूताहूत इतस्ततो भ्रमति खे भृङ्गोऽलिसंख्यां वद ।। ६ ।।

अत्रालिकुलप्रमाणं यावत्तावत् १ । अतः कदम्बादिगतालिप्रमाणं यावत्तावत् $\frac{१४}{१५}$ । एतद् दृष्टेन भ्रमरेण युतमलिप्रमाणमिति न्यासः—

$$\text{या}\ \frac{१४}{१५}\ \text{रु०}\ १ ।$$
$$\text{या}\ १\ \text{रु०} ।$$

एतौ समच्छेदीकृत्य छेदगमे पूर्ववल्लब्धं यावत्तावन्मानम् १५ एतदलिकुलप्रमाणम् ।।

सुधा—भ्रमर समूह का पञ्चमांश कदम्ब पर चला गया, समूह का तृतीयांश शिलीन्ध्रपुष्प के पास गया । त्रिगुणित दोनों का अन्तर कुटज के पास चला गया, एक भौंरा एक ही समय में केतकी एवं मालती के सुगन्ध रूप प्रिया के दूतों से आहूत होकर इधर-उधर भटक रहा है तो भ्रमर संख्या क्या है, बतलाओ ।

उदाहरण

अलिकुल प्रमाण = य माना गया ।

अतः प्रश्नानुसार $\frac{१\ \text{य}}{५}$ = कदम्ब के पास ।

$\frac{१\ \text{य}}{३}$ = शिलीन्ध्र के पास ।

दोनों का त्रिगुण अन्तर $\left(\frac{१\text{य}}{३} - \frac{\text{य}}{५}\right)$ ३ कुटज के पास चला गया ।

अतः सभी का योग = $\frac{\text{य}}{५} + \frac{\text{य}}{३} + \frac{२\text{य}}{५} = \frac{१४\text{य}}{१५}$ ।

इसमें दृश्य एक भ्रमर जोड़ने पर

$$\frac{१४\text{य}}{१५} + १ = \text{य}$$

$\therefore$ १४य + १५ = १५ य

य = १५ = अलिकुलप्रमाण

पञ्चकशतदत्तधनात् फलस्य वर्गं विशोध्य परिशिष्टम्
दत्तं दशकशतेन तुल्यः कालः फलं च तयोः ॥ ७ ॥

अत्र काले यावत्तावत्कल्पिते क्रिया न निर्वहति, इत्यतः कल्पिताः पञ्च मासाः। मूलधनं यावत्तावत् १। अस्मात् पञ्चराशिकेन न्यासः— १ ५
१०० या
५

लब्धं फलम् या $\frac{१}{४}$। अस्यवर्गः याव $\frac{१}{१६}$। मूलधनात्समच्छेदेन शोधिते जातं द्वितीयमूलधनम् याव $\frac{१}{१६}$ या १६अत्रापि मासपञ्चकेन पञ्चराशिके कृते

न्यासः १ ५
१०० याव $\frac{१}{१०}$ या $\frac{१६}{१६}$। लब्धं फलम्

$\frac{\text{याव १ या १६}}{\text{३२}}$ एतत्पूर्वफलस्थास्य $\frac{\text{या १}}{\text{४}}$। समिति पक्षौ यावत्तावताऽपवर्त्य समशोधनार्थं पक्षयोर्न्यासः

$\frac{\text{याव १ रू० १६}}{\text{३२}}$।
या ० रू० $\frac{१}{४}$।

प्रागवल्लब्धं यावत्तावन्मानम् ८ एतन्मूलधनम्।

अथवा प्रथमप्रमाणफलेन द्वितीयप्रमाणफले विभक्ते यल्लभ्यते तद्गुणगुणितेन द्वितीयमूलधनेन तुल्यमेव प्रथममूलधनं स्यात् कथमन्यथा समे काले समं फलं स्यात्। अतो द्वितीयस्यायं गुणः २। एकगुणं द्वितीयमूलधनमेकोनगुणगुणितं फलवर्गे वर्त्ततेऽतः एकोनगुणेन इष्टकल्पितकलान्तरस्य वर्गो भवते द्वितीयमूलधनं स्यात्। तत्फलवर्गयुतं प्रथममूलधनं स्यात्।

अत्र कल्पितफलवर्गः ४। अतः प्रथमाद्वितीय—मूलधने ८, ४। फलम् २। यदि शतस्य पञ्च कलान्तरं तदाष्टानां किमिति लब्धमेकमासेऽष्टानां फलम् $\frac{२}{५}$। यद्यनेनैकोमासस्तदा द्विकेन किमितिलब्धा मासाः ५॥

सुधा—एक महीने में पाँच रुपये सैंकड़े की दर से दिए गये धन के व्याज के वर्ग को मूल धन में घटाने से जो शेष हुआ उसे दस रुपये की दर से व्याज पर दे दिया गया। यदि दोनों मूल धनों का काल एवं व्याज बराबर हो तो मूल धन क्या है?

उदाहरण

इस उदाहरण मे मूल धन एवं काल दोनों का मान यदि अव्यक्त माना जाय तो क्रिया का निर्वाह नहीं होता। अतः काल का मान ५ माना गया। दोनों (मूलधन तथा काल) का मान यदि अव्यक्त माना जाय तो क्रिया का निर्वाह क्यों नहीं?

माना कि काल = या, प्रथम मूल धन = का

पञ्चराशिक के अनुसार न्यस

१	या
१००	का
५	

$$\text{अतः फल} = \frac{\text{या} \times \text{का} \times ५}{१००} = \frac{\text{या. का}}{२०}$$

$$\therefore \text{फल}^2 = \frac{\text{या}^२.\text{का}^२}{४००}$$ । इसे मूल धन में घटाने से

$$\text{का} - \frac{\text{या}^2.\ \text{का}^2}{४००} = \frac{४०० \text{ का} - \text{या}^2.\ \text{का}^2}{४००} = \text{शेष}$$ ।

पुनः पञ्चराशिक

१	या
१००	$\frac{४०० \text{ का} - \text{या}^2.\ \text{का}^2}{४००}$
१०	

परस्पर पक्षनयन से

१	या
१००	४०० का − या^{२}. का^{2}
४००	१०

$$\text{अतः फल}' = \frac{\text{या} \times (४०० \text{ का} - \text{या}^२.\ \text{का}^२) \times १०}{४०० \times १००}$$

$$= \frac{\text{या}\ (४०० \text{ का} - \text{या}^2.\ \text{का}^२)}{४०००}$$

चूँकि प्रश्नानुसार दोनों फल बराबर है अतः प्रथम फल के साथ बराबर करने से—

$$\frac{\text{या} \times \text{का}}{२०} = \frac{\text{या} \times (४०० \text{ का} - \text{या}^2.\ \text{का}^2)}{४०००}$$

$$\therefore \text{या} \times \text{का} = \frac{\text{या}\ (४०० \text{ का} - \text{या}^२.\text{का}^2)}{२००}$$

$\therefore$ २०० या. का = ४०० या. का − या^{3}. का^{2}

दोनों पक्षों में या से भाग देने पर २०० का = ४०० का − या^{2}. का^{2}

$\therefore$ २०० = ४०० − या^{2}. का

$\therefore$ या^{2}. का = २००

यहाँ या, का के मानों में किसी एक का व्यक्त मान माने बिना दूसरे का व्यक्त मान नहीं आ सकता, अतः यदि का = २ तो या = १० ।

अथवा का = ८ तो या = ५. ।

अतः सिद्ध हुआ कि एक का व्यक्तमान कल्पना किये बिना दूसरे का व्यक्त मान नहीं हो सकता ।

अतः काल का व्यक्त मान ५ मान लिया गया ।

अतः पञ्चराशिक से

१	५
१००	या
५	

फल = $\frac{५ \times ५ \times \text{या}}{१००} = \frac{\text{या}}{४}$ ।

फल के वर्ग को मूलधन में घटाने पर

या − $\left(\frac{\text{या}}{४}\right)^{२}$ = या − $\frac{\text{य}^{2}}{१६} = \frac{१६ \text{ या} - \text{या}^{2}}{१६}$ = द्वितीय मूल धन ।

पुनः पञ्चराशिक

१	५
१००	$\frac{१६ \text{ या} - \text{या}^{२}}{१६}$
१०	

अतः फल = $\frac{५ \times (१६ \text{ या} - \text{या}^{२}) \times १०}{१०० \times १६} = \frac{१६ \text{ या} - \text{या}^{२}}{३२}$

प्रश्नानुसार दोनों फल बराबर हैं

अतः प्रथम फल $\frac{१ \text{ या}}{४} = \frac{१६ \text{ या} - \text{या}^{२}}{३२}$

$\therefore$ या = $\frac{१६ \text{ या} - \text{या}^{२}}{८}$

$\therefore$ ८ या = १६ या − या^{२}

$\therefore$ या^{२} = ८ या $\therefore$ या = ८ प्रथम मूलधन

अतः द्वितीय मूलधन = $\frac{१६ \times ८ - ६४}{१६}$

= $\frac{८ - ४}{१}$ = ४ = द्वितीय मूलधन ।

प्रथम फल $= \frac{\text{या}}{४} = २$

द्वितीय फल $= \frac{१६\ \text{या} - \text{या}^2}{३२} = \frac{१२८ - ६४}{३२} = \frac{८ - ४}{२} = \frac{४}{२} = २$ ।

अतः "तुल्यः कालः फलं च तयोः" कहना सर्वथा उपयुक्त सिद्ध हुआ ।

अथवा मास प्रमाण यदि १० माना जाय तो पञ्चराशिक से पूर्ववत् प्रथम

फल$= \frac{\text{या}}{२}$ $\therefore$ फल$^2 = \frac{\text{या}^२}{४}$ । इसे मूलधन में घटाने से

या $- \frac{\text{या}^2}{४} = \frac{४\ \text{या} - \text{या}^२}{४}$ = द्वितीय मूलधन । पुनः पञ्चराशिक के

द्वारा द्वितीय फल = फ' $= \frac{४\ \text{या} - \text{या}^2}{४}$ ।

चूंकि प्रश्नानुसार दोनों फल बराबर हैं अतः

$$\frac{\text{या}}{२} = \frac{४\ \text{या} - \text{या}^2}{४}$$

$\therefore$ २ या = ४ या $-$ या^{२}

$\therefore$ या^{२} = २ या

$\therefore$ या = २ = प्रथम मूलधन

इससे द्वितीय मूलधन $\frac{४\ \text{या} - \text{या}^2}{४}$ में उत्थापन देने से $\frac{८ - ४}{४} = \frac{४}{४} =$ १ = द्वितीय मूलधन ।

अथवा 'प्रथमप्रमाणफलेन द्वितीयप्रमाणफले भक्ते' इत्यादि गद्य का आशय.

प्रथम प्रमाण फल से द्वितीय प्रमाण फल में भाग लेने पर जो लब्धि होगी तद्गुणित द्वितीय मूलधन ही प्रथम मूलधन होगा, अन्यथा तुल्य काल में तुल्य फल सम्भव नहीं है। अर्थात् प्रथम फलानयन में जो पञ्चराशिक है वही पञ्च-राशिक द्वितीय फल लाने के समय भी । किन्तु प्रथम पञ्चराशिक के प्रमाण फल से द्वितीय पञ्चराशिक का फल दूना है, अतः प्रथम मूलधन द्वितीय मूल धन से अवश्य दूना होगा अन्यथा तुल्य फल तुल्यकाल में कैसे सम्भव हो सकता ?

द्वितीय मूलधन का दो गुणक है अर्थात् दो से द्वितीय मूलधन को गुणा करने पर ही प्रथम मूलधन होता है । और एकोन गुण गुणित द्वितीय धन फलवर्ग है । अतः कल्पित फल वर्ग में एकोन गुण से भाग देने पर द्वितीय मूलधन, और उसमें फल वर्ग जोड़ने पर प्रथम मूलधन होगा ।

यहाँ कल्पित फल वर्ग = ४ फलवर्ग में एकोनगुण से भाग लेने पर

$\frac{४}{(२-१)}$ = ४ = द्वितीय मूलधन। इस द्वितीय मूलधन ४ + फलवर्ग - ४ + ४ = ८ = प्रथम मूलधन। अतः क्रमशः दोनों मूलधन ८।४।

फल = २ यदि १०० का पाँच सूद तो आठ प्रथम मूलधन की एक मास में सूद = $\frac{२}{५}$।

पुनः अनुपात यदि $\frac{२}{५}$ सूद में एक महीना काल तो २ (फल) सूद में

क्या $\frac{१ \times २}{\frac{२}{५}} = \frac{१ \times ५ \times २}{२} =$ ५ मास।

वासनाः — प्रश्नानुसारेण प्रथमधनमत्र पञ्चकशतव्यवस्थया प्रदत्तं द्वितीयञ्च दशकशतव्यवस्थया। द्वयोर्धनमज्ञातमस्ति केवलमेतदेव ज्ञायते यदुभयोरपि व्यवस्थयोः कालः फलञ्च तुल्ये स्तः। प्रथमद्वितीयप्रमाणफलयोः सम्बन्धो द्वितीयप्रथमधनसम्बन्धेनावश्यं समोऽन्यथा तुल्ये काले नैव तुल्यं फलम्।

अत्रैतच्च ज्ञातमस्ति यत्प्रथमद्वितीयप्रमाणफलयोः सम्बन्धेन यदि द्वितीयं धनं गुण्यते तदा प्रथमधनंमुपजायेत। तथा च प्रथमफलवर्गे यदि द्वितीयधनं योज्यते तदाऽपि प्रथमं धनमुपलभ्यते। अतः कल्प्यते प्रथमधनम् = प्रध। द्वितीयञ्च धनम् = द्वि० ध०। प्रमाणफलयोः सम्बन्धः = गु तदा प्रध = द्विध × गु। तथा प्रध − द्वि० ध =

द्विध × गु − द्विध = द्विध (गु − १)

प्रध − द्विध = फल^2 ∴ फल^2 = द्विध (गु − १)

∴ द्विध = $\frac{\text{फल}^2}{\text{गु} - १}$।

इष्ट फलवर्गमत्र प्रकल्प्य तत्र चैकोनगुणभक्ते द्वितीयधनमानीय पुनस्तत्र च फलवर्गे योजिते प्रथमं धनं ज्ञेयमेवमुपपन्नं सर्वं गद्योक्तम्

उदाहरणम्

एककशतदत्तधनात्फलस्य वर्गं विशोध्य परिशिष्टम्
पञ्चकशतेन दत्तं तुल्यः कालः फलं च तयोः॥

अत्र गुणकः ५। एकोन गुणेन ४ इष्टफलस्य वर्गे १६ भक्ते जातं द्वितीयधनम् ४।

इदं फलवर्गयुतं जातं प्रथमधनम् २०। अतोऽनुपातद्वयेन काल २०।

एवं स्वबुद्ध्यैवेदं सिद्ध्यति किं यावत्तावत्कल्पनया। अथ वा बुद्धिरेव बीजम्। तथा च गोले मयोक्तम्।

"नैव वर्णात्मकं बीजं न बीजानि पृथक् पृथक्।
एकमेव मतिर्बीजमनल्पा कल्पना यतः" ॥

सुधा:—एक रुपये सैकड़े व्याज पर दिये हुए धन का जो व्याज हो उसके वर्ग को मूल धन में घटाने पर शेष को पाँच रुपये सैकड़े पर दे दिया गया। यदि दोनों का काल और फल (व्याज) समान हो तो दोनों मूल धन क्या है? यहां प्रथम प्रमाण फल एक से द्वितीय प्रमाण फल में भाग देने पर पांच गुणक आता है।

कल्पित फल = ४। अतः फल^2 = १६। इसमें एकोनगुण ४ से भाग देने पर $\frac{१६}{४}$ = ४ = द्वितीयमूधन। इसमें फल वर्ग जोड़ने पर ४ + १६ = २० = प्रथम–मूलधन।

'यदि सौ में एक व्याज तो २० में क्या' इस अनुपात से बीस प्रथम मूलधनका व्याज = $\frac{२०}{१००}$ = $\frac{१}{५}$। पुनः त्रैराशिक से

काल ज्ञानः—यदि $\frac{१}{५}$ व्याज में एक मास तो चार (कल्पित) में क्या?

$$\frac{१ \times ४}{\frac{१}{५}} = \frac{१ \times ४ \times ५}{१} = २०$$

इस तरह बिना यावत्तावत् की कल्पना किए ही बुद्धि से यह सिद्ध हो गया। या बुद्धि ही तो बीज है जैसा कि मैंने (ग्रन्थकार) गोलाध्याय में कहा भी है :—

बीजगणित वर्णात्मक (या, का, नी आदि) नहीं है या अलग २ अनेक बीज नहीं है, जैसा कि पूर्व में बीज चतुष्टय कहा है। किन्तु बुद्धिमात्र ही एक बीज है जिससे अनेक विध कल्पनाएँ की जाती हैं।

उदाहरणम्:—

माणिक्याष्टकमिन्द्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं
सद्वज्राणि च पञ्च रत्नवणिजां येषां चतुर्णां धनम्।

संगस्नेहवशेन ते निजधनाद्दत्त्वैकमेकं मिथो-
जातास्तुल्यधनाः पृथग् वद सखे! तद्रत्नमौल्यानि मे ॥९॥

अत्र यावत्तावदादयो वर्णा अव्यक्तानां मानानि कल्प्यन्त इति उपलक्षणं तन्नामाङ्किनानि कृत्वा समीकरणं कार्यं मतिमद्भिः। तद्यथा अन्योन्यमेकैकं रत्नं दत्वा समधना जातास्तेषां—

मानानि { मा ५ नी १ मु १ व १ ।
मा १ नी ७ मु १ व १ ।
मा १ नी १ मु ९७ व १ ।
मा १ नी १ मु १ व २ ।

"समानां समक्षेपे समशुद्धौ समतैव स्यात्" इति एकैकं माणिक्यादिरत्नं पृथक् पृथगेभ्योविशोध्य शेषाणि समान्येव जातानि मा ४ नी ६ मु ९६ व १ यदेकस्य वज्रस्य मूल्यं तदेव माणिक्यचतुष्टयस्य नीलषट्कस्य, तदेव मुक्ताफलानां षड्नवतेरत इष्टं समधनं प्राकल्प्य पृथगेभिः शेषैर्विभजच मौल्यानि लभ्यन्ते तथा कल्पितेष्टेन ९६ जातानि मौल्यानि माणिक्यादीनाम् २४, १६, १, ९६ ।

सुधा :—जिन चार रत्नवणिकों के पास क्रमशः आठ माणिक्य, दश इन्द्रनील, एक सौ मोती तथा ५ वज्रमणि थे, उन्होंने संग स्नेह के वश अपने २ रत्नों में से एक एक रत्न आपस में दे दिये, तो वे सभी समान धन वाले हो गए। ऐसी स्थिति में उन रत्नों का अलग-अलग मुल्य बतलाइए।

उदाहरण :—

माणिक्यादि रत्नों का यावत्तावदादि अव्यक्त मान उपलक्षण मात्र है, अतः प्रत्येक रत्न को नामाद्यक्षर से ही सङ्केतित करके यहाँ समीकरण किया गया है।

चारों बनियों के पास क्रमशः ८ माणिक्य, १० नीलमणि, १०० मोती तथा ५ वज्रमणि हैं।

संग स्नेह से उन्होंने एक २ अपना रत्न सभी साथियों को दे दिये। अतः

प्रथम के पास = ५ मा. १ नी १ मु, १ व
द्वितीय के पास = १ मा ७ नी १ मु. १ व
तृतीय के पास = १ मा १ नी ९७ मु १ व
चतुर्थ के पासे = १ मा १ नी १ मु २ व रत्न रह गये।

समान में समयोजन या समशोधन से समान ही रहता अतः प्रत्येक में से एक २ सभी रत्न घटा देने पर चारों के पास क्रमशः ४ मा, ६ नी, ९६ मु. १ व,

अवशिष्ट रत्न बचे। प्रश्नानुसार सभी समधन हैं। अतः किसी इष्ट में चारों की रत्नसंख्या से भाग देने पर प्रत्येक रत्न का मूल्य निकल आयगा। रत्नों का मूल्य पूर्णाङ्क के रूप में आवे इसी दृष्टि से चारों का लघुतम समापवर्त्य रूप ९६ को इष्ठ मान कर प्रत्येक रत्न संख्या से भाग देने पर माणिक्य आदि प्रत्येक रत्नका मूल्य आ जायगा। $\frac{९६}{४}$ = २४ = १ माणिक्यमूल्य

$\frac{९६}{६}$ = १६ = एक नील का मूल्य

$\frac{९६}{९६}$ = १ = कए मुक्ता का मूल्य

$\frac{९६}{१}$ = ९६ = एक वज्र का मूल्य।

इस प्रकार एक मणिक्यादि का क्रमशः मूल्य = २४, १६, १, ९६

संग स्नेह वश आपसी वितरण के बाद सभी के पास क्रमशः रत्न ५ मा, ७ नी, ९६ मु. २ व. रहें अतः प्रथम का धन = २४ × ५ + १६ + १ + ९६ =
१२०+१६ + १ + ९६ = २३३

इसी प्रकार दूसरे का धन = १६ × ७ + २४ + १ + ९६
= ११२ + २४ + १ + ९६ = २३३,

तीसरे का धन = १ × ९७ + २४ + १६ + ९६ =
९७ + २४ + १६ + ९६ = २३३,

चौथे का धन = २४+१६ + १ + ९६ × २
= २४ + १६ + १ + १९२ = २३३

अतः सम धन होने का भी आलाप घट जाता है: इसी प्रकार किनी इष्ट पर से रत्नों का मूल्य लाने पर सभी आलाप घटेंगे किन्तु मूल्य भिन्नात्मक भी हो सकता।

उदाहरणः—

पञ्चकशतेन दत्तं मूलं सकलान्तरं गते वर्षे।
द्विगुणं षोड़शहीनं लब्धं मूलं समाचक्ष्व ॥१०॥

अत्र मूलधनं यावत् १। अतः पञ्चराशिकेन

१	१२
१००	या
५	

कलान्तरम् या $\frac{३}{५}$ एतन्मूलयुतं जःतम्

या $\frac{३}{५}$। द्विगुणमूलधनस्य षोड़शहीनस्य
या २ रू १६ˑ सममिति करणेन या २ रु १६ˑ।
या $\frac{३}{५}$ रु ०।

लब्धं मूलम् ४०। कलान्तरं च २४

सुधा:—पाँच रुपये सैकड़े की दर से व्याज पर दिया गया मूलधन एक वर्ष में सोलह कम द्विगुण हो जाता है तो मूलधन बतलाओ।

उदाहरण:—

अव्यक्त मूलधन = य

प्रश्नानुसार पञ्चराशिक के द्वारा व्याज =

$$\left.\begin{matrix} १ & १२ \\ १०० & य \\ ५ & \end{matrix}\right\} \text{ कलान्तर (व्याज) } = \frac{१२ \times ५ \times य}{१००}$$

$\frac{३य}{५}$ = व्याज। मूलधन जोड़ देने पर

$य + \frac{३य}{५} = \frac{८य}{५}$ = एक वर्ष में व्याज सहित मूलधन।

यह प्रश्नानुसार २ य − १६ के बराबर है

अत: समीकरण करने से

$$\frac{८य}{५} = २य - १६ \therefore ८य = १०य - ८०$$

$\therefore ८० = १०य - ८य = २य$

वा $य = \frac{८०}{२} = ४०$

अत: कलान्तर $= \frac{३य}{५} = \frac{१२०}{५} = २४,$

वर्ष बीतने पर सकलान्तर मूल ध = ६४

यह द्विगुण मूलधन से सोलह मात्र कम है।

विमर्श:—अभी तक भास्करीय प्रश्नों में कहने का ढंग मात्र विलक्षण या जटिल सा दीख पड़ता है किन्तु समीकरण के स्वरूप सामने आ जाने पर उत्तर लाना बहुत आसान है।

अब मैं कुछ ऐसे उदाहरण एवं सोत्तर प्रश्न उपस्थित करता हूँ जिनमें अनेक सच्छेद अव्यक्तों के कारण कुछ अधिक श्रमसाध्यता हो।

उदा० (१) $य + \frac{य}{५} + \frac{२य - ५}{५} + ३ = \frac{४य}{५} + ६$ इसमें य का मान क्या है?

समच्छेद करने पर

$$\frac{५ \times य + ३ य - ५ + ३ \times ५}{५} = \frac{४ य + ३०}{५}$$

पक्षों को पाँच से गुणने पर

$५ य + ३ य - ५ + १५ = ४ य + ३०$

$\therefore ८ य + १० = ४ य + ३०$

$\therefore ४ य = २०$

$$य = \frac{२०}{४} = ५ ।$$

उदा० (२) $\frac{य}{३} + \frac{य-३}{२} + २य + २५ = \frac{य+१}{२} + १० य$

इसमें य का मान बतलाइये।

दोनों पक्षों को समच्छेद करने पर—

$$\frac{२ य + ३ य - ९}{६} + २ य + २५ = \frac{य + १ + २० य}{२}$$

पक्षों को छे से गुणने पर

$२ य + ३ य - ९ + १२ य + १५० = ३ य + ३ + ६० य$

$\therefore १७ य + १४१ = ६३ य + ३$

पक्षान्तरानयन से

$१३८ = ४६ य$

$$\therefore य = \frac{१३८}{४६} = ३.$$

उदा० (३) $\frac{य+१}{५} - \frac{\left(य - \frac{य}{४}\right)}{३} + \frac{५ य + १}{७} = \frac{४ य - १}{५}$

यहाँ 'य' का व्यक्तमान क्या है?

समच्छेद करने पर

$$\frac{य+१}{५} - \left(\frac{४ य - य}{१२}\right) + \frac{५ य + १}{७} = \frac{४ य - १}{५}$$

वा $\frac{य+१}{५} - \frac{३ य}{१२} + \frac{५ य+१}{७} = \frac{४ य - १}{५}$

वा. $\frac{य + १}{५} - \frac{१ य}{४} + \frac{५ य + १}{७} = \frac{४य - १}{५}$

$$\frac{४य + ४ - ५ \times य}{२०} + \frac{५ य + १}{७} = \frac{४ य - १}{५}$$

$$\frac{४ - य}{२०} + \frac{५य+१}{७} = \frac{४य-१}{५}$$

$$\frac{२८ - ७ य + १०० य + २०}{१४०} = \frac{४य-१}{५}$$

$$\therefore (४८ + ९३ य) ५ = (४ य - १) १४०$$

$$वा\ ४८ + ९३ य = (४ य - १) २८$$

$$४८ + ९३ य = ११२ य - २८$$

पक्षान्तरानयन से

$$७६ = १९ य$$

$$\therefore य = \frac{७६}{१९} = ४$$

उदाहरण (४)—$\left(४य + \frac{य - \frac{१}{२}}{५}\right)\left(२य \times \frac{३}{य}\right) - १० = \left(\frac{१}{२}य - \frac{१}{८}\right)$ १६ है, तो 'य' का मान बतलाइए :—

दोनों पक्षों को समच्छेद करने पर

$$\left(४य + \frac{२य - १}{१०}\right)(३ \times २) - १० = \left(\frac{४य - १}{८}\right) \times १६$$

$$\therefore \frac{(४० य + २ य - १)}{१०} \times ६ - १० = ८ य - २$$

$$वा\ \frac{(४२ य - १)\ ३}{५} - १० = ८ य - २$$

$$वा\ (४२ य - १)\ ३ - ५० = ४० य - १०$$

$$\therefore १२६ य - ३ = ४० य + ४०$$

$$वा\ ८६ य = ४३$$

$$य = \frac{४३}{८६} = \frac{१}{२}$$

उदाहरण (५)—

$$\frac{\frac{य}{६} + २य}{७} + \frac{य - ३}{१०} + ११ = \frac{\frac{य - १}{४} \times ९}{-\frac{३}{८}}$$

इसमें य का मान निकालिए :—

$$\frac{\frac{य}{३}+२य}{७}+\frac{य-३}{१०}+११=\frac{\frac{य-१}{४}\times ९}{\frac{३}{८}}$$

$$\frac{य+६य}{२१}+\frac{य-३}{१०}+११=\frac{(य-१)\times ९\times ८}{४\times ३}$$

$$\therefore \frac{१० य+६० य+२१ य-६३}{२१०}+११=६ य-६$$

वा $\frac{९१ य-६३}{२१०}=६ य-१७$

$$\therefore \frac{१३ य-९}{३०}=६ य-१७$$

वा १३ य − ९ = १८० य − ५१०

पक्षान्तरनयन से ५०१ = १६७ य

$$\therefore य-\frac{५०१}{१६७}=३।$$

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) $\frac{य}{४}+\frac{३य}{२}-य=३$ इसमें य = ४,

(२) $\frac{३य+२}{४}+\frac{५य-३}{७}-\frac{२य-४}{५}=३$; इसमें य = २

(३) $\frac{२य+५}{३}+\frac{य+१}{६}=\frac{२य-४}{३}+४$ इसमें य = ५

(४) $५य+\frac{१०-७य}{३}-\frac{५-य}{४}=१५-१०य$ इसमें य = १

(५) $\frac{२य-३}{३}+\frac{४य-१२}{४}-\frac{५य+६}{१२}=३$ इसमें य = ६

(६) $\frac{य-३}{१०}+\frac{५य+३}{९}+\frac{१०य-४}{१३}-\frac{४य-१०}{२}=३$ इसमें य=३

(७) $\frac{३य+६}{५}-\frac{५य+५}{९}+१०=य+३$ इसमें य = ८

(८) $\frac{४य+१६}{६}+\frac{५य-\frac{३}{२}}{४}-\frac{७य-\frac{१}{२}}{२}=\frac{७}{४}$ इसमें $य=\frac{१}{२}$

(९) $\frac{२य-४}{५}+\frac{५य+५}{८}+\frac{३य-\frac{य}{७}}{२}-\frac{४य-८}{४}=१२$, इसमें $य=७$

(१०) $\frac{३य-१}{५}+\frac{४}{३}\left(य+\frac{५य-३^{२}}{७}\right)=\frac{(४य-१)^{५}}{७}$, इसमें $य=२$

(११) $\frac{३य+१}{१३}\times\frac{२५य-१}{११}-\frac{५य+४}{६}\times\frac{३य-५}{७}=$

$$\frac{२य-७}{२}\times\frac{८य-२}{३}$$ इसमें $य=४$

(१२) $\frac{य-९}{८}-\frac{(१५\frac{३}{४}-य)}{११}=\frac{(य-१२)}{५}$, इसमें $य=९$

(१३) $\frac{\frac{(य+७)}{१०}}{३}+\frac{\frac{य-२}{१}}{७}-\frac{\frac{य-१}{२}}{५}=५$, इसमें $य=३$

(१४) $\frac{४}{य}+\frac{५}{२}-\frac{८}{य}=२$ इसमें $य=८$

उदाहरणम्

यत्पञ्चकद्विकचतुष्कशतेन दत्तं
खण्डैस्त्रिभिर्नवतियुक् त्रिशतीधनं तत् ।
मासेषु सप्तदशपञ्चसु तुल्यमाप्तं
खण्डत्रयेऽपि सफलं वद खण्ड संख्याम् ॥११॥

अत्र सफलस्य खण्डस्य समधनस्य प्रमाणं यावत्तावत् १ । यद्येकेन मासेन पञ्चफलं शतस्य तदा माससप्तकेन किमिति लब्धं शतस्य फलम् ३५ । एतच्छते प्रक्षिप्य जातम् १३५ । यद्यस्य सफलस्य शतं मूलं तदा यावत्तान्मितस्य सफलस्य किमिति लब्धं प्रथमखण्ड प्रमाणम् या $\frac{२}{२७}$ ।

पुनर्यदि मासेन द्वौ फलं शतस्य तदा दशभिर्मासैः किमित्याद्युक्त-प्रकारेण द्वितीयखण्डम् या $\frac{५}{६}$ । एवं तृतीयम् या $\frac{५}{६}$। एषामैक्यम् या $\frac{६५}{२७}$। सर्वधनस्यास्य ३९० समं कृत्वा यावत्तावन्मानेन १६२ अनेनोत्थापितानि खण्डानि १२०, १३५, १३५। सकलान्तरं सम-मेतत्। १६२।

सुधा :—तीन सौ नब्बे को तीन खण्ड कर प्रथम को पाँच रुपये सैंकड़े की दर से, दूसरे खण्ड को दो रुपये सैंकड़े की दर से एवं तृतीय खण्ड को चार रुपये सैंकड़े की दर से सूद पर लगाया गया।

इस प्रकार तीन खण्ड करने पर भी प्रथम खण्ड का सात महीने में, दूसरे खण्ड का दश महीने में, और तीसरे खण्ड का पाँच महीने में सकलान्तर (ब्याज सहित) मूलधन बराबर होता है तो तीनों खण्डों को अलग-अलग बतलाइए।

उदाहरण :—

समधन (ब्याजसहित खण्ड) प्रमाण = य।

प्रश्नानुसार पञ्चराशिक के द्वारा सौ रुपयों का सात महीने में

$$\text{सूद} = \left.\begin{matrix} १ & ७ \\ १०० & १०० \\ ५ & \end{matrix}\right\} = \frac{७ \times १०० \times ५}{१००}$$

= ३५। इसे इसके मूलधन १०० में जोड़ने से १०० + ३५ = सकलान्तर मूलधन।

पुनः अनुपात :—इस सकलान्तर मूलधन १३५ में यदि १०० मूलधन तो 'य' स्वरूप सकलान्तर मूलधन से क्या :—

$$\frac{१०० \times य}{१३५} = \frac{२०य}{२६} = \text{प्रथम खण्ड}$$

इसी प्रकार दो रुपये सैंकड़ की दर से दश महीने का ब्याज

$$\text{पञ्चाराशिक} \left.\begin{matrix} १ & १० \\ १०० & १०० \\ २ & \end{matrix}\right\} \text{से} \quad \frac{१० \times १०० \times २}{१००} = २०।$$

इसे १०० में जोड़ने से १०० + २० = १२०। फिर अनुपात, सूद सहित मूल-धन १२० में यदि १०० मूलधन तो 'य' में क्या :—

$$\frac{१०० \times य}{१२०} = \frac{५य}{६} = \text{दूसरा खण्ड}।$$

तीसरे खण्ड का भी ज्ञान इसी प्रकार पञ्चराशिक के द्वारा

$$\left.\begin{matrix} १ & ५ \\ १०० & १०० \\ ४ & \end{matrix}\right\} \text{सूद} = \frac{५ \times १०० \times ४}{१००} = २०$$

सूद सहित मूलधन = १०० + २० = १२० ।

पुनः अनुपात, सकलान्तर १२० में यदि १०० रु० मूलधन तो 'य' में क्या

$$= \frac{१०० \times य}{१२०} = \frac{५य}{६} = \text{तीसरा खण्ड ।}$$

$$\text{इसी तरह तीनो खण्ड} = \frac{२०य}{२७}, \frac{५य}{६}, \frac{५य}{६}$$

$$\text{तीनों खण्डों का योग} = \frac{२०य}{२७} + \frac{५य}{६} + \frac{५य}{६} =$$

$$\frac{४०य + ४५य + ४५य}{५४} = \frac{१३०य}{५४} = \frac{६५य}{२७} ।$$

$$\text{प्रश्नानुसार} \quad \frac{६५य}{२७} = ३९०$$

$$\therefore य = \frac{३९० \times २७}{६५} = \frac{३० \times २७}{५} = ६ \times २७$$

१६२ = समधन

अतः तीनों खण्डों में उत्थापन से

$$\text{प्र. खं} = \frac{१६२ \times २०}{२७} = ६ \times २० = १२०$$

$$\text{द्वि. खं.} = \frac{१६२ \times ५}{६} = २७ \times ५ = १३५$$

$$\text{तृ. खं.} = \frac{१६२ \times ५}{६} = २७ \times ५ = १३५$$

तीनों खण्डों का योग = १२० + १३५ + १३५ = ३९० इन्हीं तीनों खण्डों से सभी आलाप घट जाते है ।

पाँच रुपये सैकड़े की दर से १२० रुपये का ७ महीनों में ब्याज

$$\left.\begin{matrix} १ & ७ \\ १०० & १२० \\ ५ & \end{matrix}\right\} = \frac{१० \times १३५ \times २}{१२०} = ४२$$

दो रुपये सैकड़े की दर से १३५ रु० का १० महीनों में

$$\text{ब्याज} = \left.\begin{matrix} १ & १० \\ १०० & १०० \\ २ & \end{matrix}\right\} = \frac{१० \times १३५ \times २}{१००} = २७$$

एवम् चार रुपये सैकड़े की दर से १३५ रुपये का ५ महीनों में ब्याज

$$= \left.\begin{matrix} १ & ५ \\ १०० & १३५ \\ ४ & \end{matrix}\right\} = \frac{५ \times १३५ \times ४}{१२०} = २७$$

अतः क्रमशः तीनों खण्डों का अलग २ (कलान्तर) ब्याज = ४२, २७, २७

$$\begin{matrix} १२० + ४२ = १६२ \\ १३५ + २७ = १६२ \\ १३५ + २७ = १६२ \end{matrix} \quad = \text{समधन} = \text{य}$$

उदाहरण :—

पुरप्रवेशे दशदो द्विसंगुणं
विधाय शेषं दशभुक् च निर्गमे ।
ददौ दशैवं नगरत्रयेऽभवत्
त्रिनिघ्नमाद्यं वद तत्कियद्धनम् ।। १२ ।।

अत्र धनम् या १। अस्यालापवत् सर्वं कृत्वा पुरत्रयनिवृत्तौ जातं धनम् या ८ रु २८०।

एतदाद्यस्य त्रिगुणितस्य या ३ समं कृत्वाऽऽप्तं यावत्तावन्मानम् ५६।

सुधा :—किसी नगर में प्रवेश करते समय दश कर देने वाला व्यापारी ने शेष को दूना करके दश रुपये अपने भोजन, तथा दश रुपये निर्गम कर में लगाया। एसी स्थिति तीन नगरों में हुई। अन्त में अपने घर लौटने पर अपने मूलधन का त्रिगुणित धन उसे हस्तगत था तो मूलधन क्या रहा ?

उदाहरण.—

मूलधन प्रमाण = य।

अतः पुर प्रवेश के बाद उसके पास धन = य – १०। द्विगुण करने पर (य – १०) × २ = २य – २०। दश रुपये उसने भोजन में, और दश रुपये निर्गम कर में लगाया। अतः प्रथम नगर से निकलने पर उसके पास धन = २य – २० – २० = २य – ४०।

दूसरे नगर में प्रवेश के समय दश रुपये कर दिया। अत: २य - ४० - १० = २य - ५० उसके पास रहा। पुन: उस धन को उसने दूना कर दश भोजन तथा दश निर्गम कर में खर्चा किया।

अत: द्वितीय नगर से निकलने पर उसके पास धन = (२य - ५०) × २ - २० = ४य - १०० - २० = ४य - १२०।

पुन: तीसरे नगर में प्रवेश के समय दश रुपये कर देने पर उसके पास धन = ४य - १२० - १० = ४य - १३०। इसे दूना करने पर

(४य - १३०) × २ = ८य - २६०।

पुन: भोजन में १० और निर्गम कर में भी दश रुपये उसने खर्चा किए
अत: उसके पास तीसरे नगर से लोटने पर
धन = ८य - २६० - २० = ८य - २८०।
यह प्रश्नानुसार मूलधन का तीना है
अत: समीकरण = ८य - २८० = ३य

∴ ८य - ३य = २८०

∴ ५य = २८०

$$\therefore \text{य} = \frac{२८०}{५} = ५६$$

= यही है व्यापारी का मूलधन।

उदाहरणम् :—

सार्धं तण्डुलमानकत्रयमहो द्रम्मेण मानाष्टकं
मुद्गानां च यदि त्रयोदश मिता एता वणिक् काकिणी:।
आदायार्पय तण्डुलांशयुगलं मुद्गैकभागान्वितं
क्षिप्रं क्षिप्रभुजो व्रजेम हि यत: सार्थोऽग्रतो यास्यति ॥१३॥

अत्र तण्डुलमानम् या २। मुद्गमानम् या १। यदि सार्धमानत्रयेणै को द्रम्भो लभ्यते तदा या २ अनेन किमिति लब्धं तण्डुलमौल्यम्

$$\text{या}\ \frac{४}{७}\ ।$$

यदि मानाष्टकेनैको द्रम्मस्तदा या १ अनेन किमिति लब्धं मुद्गमौल्यम् या $\frac{१}{८}$।

अनयोर्योगः $\frac{३९}{५६}$ त्रयोदश काकिणी सम इति द्रम्मजातया $\frac{१३}{६४}$ साम्यकरणाल्लब्धं यावत्तावन्मानम् $\frac{७}{२४}$ ।

अनेनोत्थापिते तण्डुलमुद्गमूल्ये $\frac{१}{६}$, $\frac{७}{१९२}$। तण्डुलमुद्गमान-भागाश्च $\frac{७}{१२}$, $\frac{७}{२४}$ ।

सुधा :—एक द्रम्म में साढ़े तीन माना चावल और आठ माना मूंग की दाल यदि मिले तो हे वणिक इस तेरह काकिणी का दो हिस्सा चावल और एक हिस्सा मूंग हमें दो जिससे जल्द भोजन कर हम शीघ्र जा सकें क्योंकि सार्थ (काफला) आगे जायगा ।

उदाहरण :—

यहाँ चावल का प्रमाण = २य, मूंग का = १ य माना गया ।

$$\text{चावल का मूल्य} = \frac{१ \times २य}{\frac{७}{२}} = \frac{४य}{७}$$

$$\text{मूंग का मूल्य} = \frac{१ \times य}{८} = \frac{य}{८}$$

$$\text{दोनों के मूल्यों का योग} = \frac{४य}{७} + \frac{य}{८} = \frac{३९य}{५६} ।$$

प्रश्नानुसार इसे १३ काकिणी $\left(\frac{१३}{६४}\text{ द्रम्म}\right)$ के बराबर करने से

$$\frac{३९य}{५६} = \frac{१३}{६४}$$

$$\therefore \frac{३९य}{७} = \frac{१३}{८} \quad \text{वा}$$

$$१३ \times ७ = ३९ \times ८य$$

$$\therefore ७ = ३ \times ८य = २४ य$$

$$\therefore य = \frac{७}{२४} = \text{मूंग का भाग ।}$$

$$\therefore २य = \frac{७}{१२} = \text{चावल का भाग}$$

य के मान से चावल के मूल्य $\frac{४य}{७}$ में उत्थापन देने से

$$\text{चावल का मूल्य} = \frac{४}{७} \times \frac{७}{२४} = \frac{१}{६}$$

$$\text{मूंग का मूल्य} = \frac{य}{८} = \frac{७}{२४ \times ८} = \frac{७}{१९२}$$

उदाहरण :—

स्वार्धपञ्चांशनवमैर्युक्ताः के स्युः समास्त्रयः ।
अन्यांशद्वयहीनाश्च षष्टिः शेषाश्च तान् वद ।। १४ ।।

अत्र समराशिमानं यावत्तावत् १ । अतो विलोमविधिना, "अथ स्वांशाधिकोन" इत्यादिना राशयः या $\frac{२}{३}$, या $\frac{५}{६}$, $\frac{९}{१०}$ इहान्य भागद्वयोनोनाः सर्वेऽप्येवं शेषाः स्युः या $\frac{२}{५}$ । एतत् षष्टिसमं कृत्वाऽऽप्त-यावत्तावन्मानेन १५० उत्थापिता जाता राशयः—१००, १२५, १३५ ।

सुधा :—कौन सी ऐसी तीन राशियां है जिनमें पहली राशि में अपना आधा, दूसरी में अपना पञ्चमांश, तीसरी में अपना नवमांश; जोड़ देने से समान हो जाती हैं ।

साथ ही प्रत्येक राशि में दूसरे अंशद्वय का योग घटाने पर शेष साठ हो जाता है ।

उदाहरण

यहां समराशि = य ।

$$\text{अर्थात् } रा + \frac{रा}{२} = य \quad \therefore रा = \frac{२ य}{३}$$

$$रा' + \frac{रा'}{५} = य \quad \therefore रा' = \frac{५ य}{६}$$

$$रा'' + \frac{रा''}{९} = य \quad \therefore रा'' = \frac{९ य}{१०}$$

इन राशियों में प्रथम राशि में दूसरी राशि का पञ्चमांश एवं तीसरी राशि का नवमांश घटाने पर साठ होते हैं ।

$$\therefore \frac{२ य}{३} - \left(\frac{५ य}{६ \times ५} + \frac{९ य}{१० \times ९} \right) = \frac{२ य}{३} - \left(\frac{य}{६} + \frac{य}{१०} \right)$$

$$= \frac{२ य}{३} - \frac{४ य}{१५} = \frac{६ य}{१५} = \frac{२ य}{५} = ६०$$

$\therefore$ २ य = ३०० $\therefore$ य=१५०

$$\text{अतः रा} = \frac{१५० \times २}{३} = \frac{३००}{३} = १००$$

$$\text{रा}' = \frac{१५० \times ५}{२} = \frac{५० \times ५}{२} = १२५$$

$$\text{रा}'' = \frac{१५० \times ९}{१०} = १५ \times ९ = १३५$$

प्रथम राशि १०० में राश्यार्ध ५० जोड़ने पर=१५० ।

द्वितीय राशि १२५ में पञ्चमांश २५ जोड़ने पर=१५०

तृतीय राशि १३५ में नवमांश १५ जोड़ने से=१५०

$$\text{इसी तरह } १०० - \left(\frac{\text{रा}'}{५} + \frac{\text{रा}''}{९} \right)$$

$= १०० - (२५+१५) = १०० - ४० = ६०$

$$१२५ - \left(\frac{\text{रा}}{२} + \frac{\text{रा}''}{९} \right) = १२५ - (५०+१५) =$$

$१२५ - ६५ = ६०$

$$१३५ - \left(\frac{\text{रा}}{२} + \frac{\text{रा}'}{५} \right) = १३५ - (५०+२५)$$

$= १३५ - ७५ = ६०$ ।

इस तरह सभी आलाप घट रहे हैं ।

उदाहरणम्

त्रयोदश तथा पञ्च करण्यो भुजयोर्मितिः ।
भूरज्ञाता च चत्वारः फलं भूमिं वदाशु मे ।।१५।।

अत्र भूमे र्यावत्तावत्कल्पने क्रिया प्रसरतीति स्वेच्छया त्र्यस्रे क १३ भूमिः कल्प्यते फलविशेषाभावात् । अतोऽत्र कल्पितं त्र्यस्रम् ।

न्यासः—

अत्र "लम्बगुणं भूम्यर्थं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवति" इति व्यत्ययेन फलाल्लम्बो जातः क $\frac{६४}{१३}$। एतद्वर्गं भुज ५ करणी वर्गात् रु ५ अस्मादपास्य रु $\frac{१}{१३}$ मूलं-जाताऽऽबाधा क $\frac{१}{१३}$। इमां भूमेरपास्य "योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्य" इति जाताऽन्याऽऽबाधा क $\frac{१४४}{१३}$। अस्यां वर्गात् रु $\frac{१४४}{१३}$। लम्बवर्ग रु $\frac{६४}{१३}$ युतात् रु $\frac{२०८}{१३}$ मूलं जातो भुजः ४। इयमेव भूमिः।

सुधा—किसी त्रिभुज में करणी तेरह एवं करणी पाँच दोनों भुजाओं का मान है, भूमि अज्ञात है तो त्रिभुज फल एवं भूमि का मान बतलाओ।

उदाहरण

ग्रंथकार ने कहा है कि भूमि का मान यदि यावत् माना जाय तो क्रिया का प्रसार होता है अतः भूमि का मान 'या' नहीं मान कर बड़े भुज का ही मान या मान लिया गया है। ऐसा मानने से भू=$\sqrt{१३}$ ज्ञात भुज=$\sqrt{५}$ अज्ञात भुज = य,=बृहद्भुज।

'लम्बगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवती' ति के अनुसार—

$$\text{फ}=\text{लं}\times\frac{\text{भू}}{२}=\text{लं}\times\frac{\sqrt{१३}}{२}=४$$

$$\therefore \text{लं}=\frac{४\times २}{\sqrt{१३}}=\frac{८}{\sqrt{१३}}$$

$$\therefore \text{भुज}^2-\text{ल}^2=\text{आबाधा}^2$$

$$\text{अतः }(\sqrt{५})^2-\left(\frac{८}{\sqrt{१३}}\right)^2=\text{लघ्वाबाधा}^2$$

$$=५-\frac{६४}{१३}=\frac{६५-६४}{१३}=\frac{१}{१३}=\text{ल आ}^2$$

$$\therefore \text{लघ्वाबाधा}=\sqrt{\frac{१}{१३}}$$

$$\text{भूमि}-\text{लघ्वाबाधा}=\text{बृहदाबाधा}$$

$$\sqrt{१३}-\sqrt{\frac{१}{१३}}\ \text{बृहदाबाधा।}$$

चूंकि ये दोनों करणी हैं अतः इनका अन्तर 'योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प' आदि के अनुसार ही होगा। अतः तदनुसार—

$$\text{महती} = १३ + \frac{१}{१३} = \frac{१७०}{१३}$$

$$\text{लघु} = \sqrt{१३ \times \frac{१}{१३}} \times २. = २.\sqrt{\frac{१३}{१३}} = २ \times १$$
$$= २ ।$$

अतः उपर्युक्त करणीद्वय का अन्तर =

$$\frac{१७०}{१३} - २ = \sqrt{\frac{१४४}{१३}}$$

$$= \frac{१२}{\sqrt{१३}} = \text{बृहदाबाधा.} = \text{बृ आ.}$$

$$\text{लं}^2 + \text{बृ अ}^2 = \text{द्वितीय भुज}^2 = \text{य}^2$$

$$\therefore \sqrt{\text{लं}^2 + \text{बृ आ}^2} = \text{य.}$$

$$\text{वा.} \sqrt{\left(\frac{८}{\sqrt{१३}}\right)^2 + \left(\frac{१२}{\sqrt{१३}}\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{६४}{१३} + \frac{१४४}{१३}} = \sqrt{\frac{२०८}{१३}} = \sqrt{१६} = ४$$
$$= \text{य. ।}$$

भूमि का मान 'य' मानने से क्रिया का प्रसार होता है जैसा कि :-

त्रिभुजे भुजयोर्योग इत्यादि के अनुसार

$$\frac{(\sqrt{५} + \sqrt{१३})(\sqrt{१३} - \sqrt{५})}{\text{भू}} = \frac{१३ - ५}{\text{भू}} = \frac{८}{\text{य}} = \text{ल.}$$

$$\frac{\text{य} - \text{ल}}{२} = \frac{\text{य} - \frac{८}{\text{य}}}{२} = \frac{\text{य}^2 - ८}{२\,\text{य}} = \text{लघ्वाबाधा.}$$

$\therefore \text{लम्बवर्ग} = ५ - \left(\frac{य^2 - ८}{२ य}\right)^2 =$

$५ - \frac{य^४ - १६य^२ + ६४}{४ य^२}$

$\frac{२० य^2 - य^४ + १६ य^2 - ६४}{४ य^2} =$

$= \frac{३६ य^2 - य^४ - ६४}{४ य^2} \quad (१)$

'लम्बगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवति' के अनुसार

$\text{लं} \times \frac{\text{भू}}{२} = \text{फ} = ४$

$\therefore \text{लं} \times \frac{य}{२} = ४ \quad \therefore \text{लं} = \frac{८}{य}$ ।

$\therefore \text{लं}^२ = \frac{६४}{य^२}$ । इसे स्वरूप (१) के साथ समीकरण करने से :—

$\frac{३६ य^2 - य^४ - ६४}{४ य^2} = \frac{६४}{य^2}$

$\therefore \frac{३६ य^2 - य^४ - ६४}{४} = ६४$

$\therefore ३६य^2 - य^४ - ६४ = ६४ \times ४ = २५६.$

अथवा $३६ य^2 - य^४ = २५६ + ६४ = ३२०$

पक्षों को एक ऋण से गुणने पर

$य^४ - ३६य^२ = - ३२०$

दोनों पक्षों में $(१८)^2$ जोड़ने पर

$य^४ - ३६ य - + ३२४ = ३२४ - ३२० = ४$

दोनों पक्षों के वर्गमूल लेने पर

$य^२ - १८ = \pm २$

$\therefore य^२ = २० \text{ या } १६$

$\therefore य = \sqrt{२०}, \text{ वा } \sqrt{१६} = ४$

अन्तर्लम्ब त्रिभुज में भूमि = ४, वहिर्लम्ब में $(- \sqrt{२०})$

इस तरह मध्यमाहरण के प्रसङ्ग हो जाने के कारण ही क्रिया का प्रसार इसे कहा गया है ।

उदाहरणम्

दशपञ्चकरण्यन्तरमेको बाहुः परश्च षट्करणी ।
भूरष्टादश करणी रूपोना लम्बमानमाचक्ष्व ॥१६॥

अथाऽबाधाज्ञाने लम्बज्ञानमिति लब्धाबाधा = या. । एतदूना भूरन्याबाधाप्रमाणमिति तथा न्यासः

भू = क १८ रू १

स्वाबाधावर्गं स्वभुजवर्गादपास्य जातो लम्बवर्गः =
या व १. रू १५ क २००।

द्वितीयाबाधावर्गं = याव १ या क ७२ या २ रु० १९ क ७२ । स्वभुजवर्गात् रु० ६ अपास्य जातो द्वितीयो लम्बवर्गः = याव १ या २ याक ७२ रु० १३ क ७२ ।

पक्षौ समाविति समशोधने कृते जातौ पक्षौ
रु० २८ क ५१२ ।
या २ या.क ७२ ।

अत्र भाजकस्याव्यक्तशेषस्य याकारस्य प्रयोजनाभावादपगमे कृते भाज्यभाजकौ जातौ

अत्र "धनर्णताव्यत्ययमीप्सितायाश्छेदे करण्या असकृद् विधाय" इति द्विसप्ततिमितकरण्या धनत्वं प्रकल्प्य क ४ क ७२ । अनया भाज्ये गुणिते जातम्

क ३६८६४ क ३१३६ क ५६४४८ क २०४८

एतास्वेतयोः क ३६८६४, क ३१३६ । मूले १९२ । ५६ अनयोर्योगः रु० १३६ ।

शेषकरण्योरनयोः क ५६४४८ क २०४८ अन्तरं योग इति जातो योगः क ३६९९२ ।

भाजके च क ४६२४ । अनया भाज्ये हृते लब्धं यावत्तावन्मानम् रु० २ क ८ ।

इयमेव लघ्वाबाधा, एतदूना भूरन्याबाधा रु० १ क २ यावत्ताव-न्मानेन लम्बवर्गावुत्थाप्य स्वाबाधावर्गं स्वभुजवर्गादपास्य वा जातो लम्बवर्गः रु० ३ क ८ ।

एतस्य मूलसममेव लम्बमानम् रु० १ क २ ।

सुधा--जिस त्रिभुज में एक भुजा दश एवं पाँच करणियों का अन्तर है, दूसरी भुजा छः करणी है, और रूपोन अष्टादश करणी आधार है, वहाँ लम्बमान कहो ।

उदाहरण--

वस्तुतः "त्रिभुजे भुजयो योंग" इत्यादि लीलावत्युक्त सूत्रानुसार यहाँ लम्ब या त्रिभुज फल सुसाध्य है। फिर भी लघ्वाबाधा का मान 'य' माना जिससे $भु^2 - आबाधा^2 =$ लम्बवर्ग सरलतया लाया जा सके ।

प्रश्नानुसार जिस त्रिभुज में एक भुजा (लघु) $\sqrt{१०} - \sqrt{५}$ है बड़ी दूसरी भुजा $= \sqrt{६}$, भूमि $= \sqrt{१८} - १$ है तो लम्बमान का ज्ञान अपेक्षित है ।

लघ्वाबाधा का मान = य,

$$\text{अतः } लम्ब^2 = (\sqrt{१०} - \sqrt{५})^2 - य^2$$
$$= १५ - \sqrt{२००} - य^2 ।$$

इसी तरह $(\sqrt{६})^2 - (\sqrt{१८} - १ - य)^2 = लम्ब^2$

$$६ - (य^2 + २ य - \sqrt{७२ य} - \sqrt{७२} + १९)$$
$$= - य^2 - २ य + \sqrt{७२ य} + \sqrt{७२} - १३$$

दोनों लम्ब वर्गों के समीकरण से

$$- य^2 + १५ - \sqrt{२००} = - य^2 - २ य + \sqrt{७२ य} + \sqrt{७२} - १३$$
$$२८ + २ य = \sqrt{७२} य + \sqrt{७२} + \sqrt{२००}$$
$$= \sqrt{७२} य + \sqrt{५१२}$$
$$\therefore २ य - \sqrt{७२} य = \sqrt{५१२} - २८$$
$$\therefore य (२ - \sqrt{७२}) = \sqrt{५१२} - २८$$
$$\therefore य = \frac{\sqrt{५१२} - २८}{२ - \sqrt{७२}},$$

इसी कारण आचार्य ने "भाजकस्याव्यक्तशेषस्य याकारस्य प्रयोजनाभावा-दपगमे कृते कहा है ।

उपर्युक्त भाज्य = $\sqrt{५१२}$ – २८ = $\sqrt{५१२} - \sqrt{७८४}$, क्योंकि "क्षयो भवेच्चक्षयरूप वर्गश्चेत्साध्यतेऽसौ करणीत्वहेतोः" कहा गया है।

एवम्--भाजक = २ – $\sqrt{७२} = \sqrt{४} - \sqrt{७२}$

यहाँ भागफल लाने के लिए भाज्य एवं भाजक दोनों को एक करण्यात्मक बनाना है। तदर्थ "धनर्णताव्यत्ययमीप्सितायाः" के अनुसार ह्रस्थ – $\sqrt{७२}$ को धनात्मक मानकर भाजक और भाज्य दोनों को इस नये भाजक से गुणा किया।

भाजक को गुणा करने पर ($\sqrt{४} - \sqrt{७२}$) ($\sqrt{४} + \sqrt{७२}$) = $\sqrt{१६} - \sqrt{५१८४}$ = – $\sqrt{४६२४}$, दोनों के वर्गमूलान्तर = – ७२ + ४ = – ६८। इसका वर्ग = – $\sqrt{४६२४}$, = भाजक।

एवम् भाज्य ($\sqrt{५१२} - \sqrt{७८४}$) को ($\sqrt{४} + \sqrt{७२}$) से गुणने पर गुणनफल = ($\sqrt{५१२} - \sqrt{७८४}$) ($\sqrt{४} + \sqrt{७२}$) = $\sqrt{२०४८} - \sqrt{३१३६} + \sqrt{३६८६४} - \sqrt{५६४४८}$

इन चार करणियों में $\sqrt{२०४८}$, – $\sqrt{५६४४८}$ इव दोनों का अन्तर रूप योग लाने के लिए "आदौ करण्यावपवर्त्तनीये" आदि सूत्रानुसार दो से अपवर्त्तित वे दोनों क्रमशः १०२४, तथा – २८२२४ होंगे। दोनों का क्रमशः मूल = ३२, – १६८, इन मूलों का अन्तर = – १३६। इसका वर्ग – १८४९६ इसे अपवर्त्तनांक २ से गुणा करने पर—३६९९२। यह करणी हुई।

अतः $\sqrt{२०४८} - \sqrt{५६४४८}$ = – $\sqrt{३६९९२}$

इसी प्रकार – $\sqrt{३१३६} + \sqrt{३६८६४}$ = १३६ = $\sqrt{१८४९६}$।

यहाँ भी दोनों करणियों के अन्तर रूप योग के लिए दोनों का क्रमशः वर्गमूल – ५६, १९२। इन का योग (अन्तर रूप) = १३६ = $\sqrt{१८४९६}$

अतः उपर्युक्त गुणनफल में दो-दो करणियों का अन्तर रूप योग करने पर गुणनफल = – $\sqrt{३६९९२} + \sqrt{१८९९६}$ = भाज्य

पूर्वागत – $\sqrt{४६२४}$ = भाजक।

भाज्य में भाजक से भाग देनें पर लब्धि = – $\sqrt{४} + \sqrt{८}$ यही हुआ 'य' का म.न = लघ्वावाधा। इसे आधार ($\sqrt{१८}$ – १) में घटाने पर बृहदावाधा = ($\sqrt{१८}$ – १) – ($\sqrt{८}$ – २) = $\sqrt{१८} - \sqrt{८}$ + १ = $\sqrt{२}$ + १ = बृ. आ.।

'य' के मान से लम्बवर्ग में उत्थापन देने से

लम्बवर्ग = – य^2 + १५ – $\sqrt{२००}$

$$= -(\sqrt{८} - \sqrt{४})^2 - \sqrt{२००} + १५ =$$
$$-(१२ - \sqrt{१२८}) - \sqrt{२००} + १५ =$$
$$-१२ + \sqrt{१२८} - \sqrt{२००} + १५ = ३ - \sqrt{८}$$

यहाँ भी करणीद्वय का अन्तर रूप योग "आदौ करण्यावयवर्त्तनीयौ" के अनुसार ही समझना ।

अतः लम्बवर्ग = $३ - \sqrt{८}$ ।

इसका मूल "वर्गे करण्याः' आदि के अनुसार

$$\sqrt{३ - \sqrt{८}} = \sqrt{२} - \sqrt{१} = \text{लम्ब} ।$$

क्योंकि 'ऋणात्मिका चेत्करणीकृतौ स्यात्' के अनुसार

ऋणात्मक $\sqrt{८}$ को धनात्मक मान कर

रूप ३ के वर्ग में घटाने पर ९ − ८ = १ ।

$\sqrt{१} = १$ । ३ + १ = ४ । एमम् ३ = १ = २ ।

दोनों को अर्धित करने पर २ । १ करणियां हुईं जिनमें स्वेच्छया एक करणी को ऋणात्मक माना गया ।

अतः लम्ब = $\sqrt{२} - \sqrt{१} = \sqrt{२} - १$

अथवा लघु भुज वर्ग में लघ्वाबाधा वर्ग घटाने पर भी वही लम्बवर्ग तथा उसका मूल लम्ब होगा ।

उपर्युक्त उदाहरण के दोनों भुजाओं में न्यूनाधिक्य का निर्णयः—

$$\sqrt{१०} - \sqrt{५} > = \angle \sqrt{६}$$

पक्षद्वय के वर्ग करने से

$$१५ - \sqrt{२००} > = \angle ६$$

पक्षान्तर नयन से

$$१५ - ६ > = \angle \sqrt{२००}$$
$$\therefore ९ > = \angle \sqrt{२००}$$
$$\therefore \sqrt{८१} < = \angle २००$$

प्रत्यक्षतः दक्षिणपक्षीय $\sqrt{२००}$ वामपक्षीय $\sqrt{८१}$ से बड़ी है अतः दक्षिण पक्षीय भुजा $\sqrt{६}$ बड़ी सिद्ध हुई ।

उदाहरणम्

असमानसमच्छेदान् राशींस्तान् चतुरोवद ।
यदैक्यं यद्घनैक्यं वा येषां वर्गैक्यसम्मितम् ॥ १७ ॥

अत्र राशयः या १, या २, या ३, या ४।

एषां योगः या १०। वर्गयोगेनानेन याव ३० सम इति पक्षौ यावत्तावतापवर्त्य न्यासः

| या ३० रु ०।
| या ० रु १०।

समशोधनादिना प्राग्वल्लब्धयावत्तावन्मानेनोत्थापिता राशयः

$\frac{१}{३}, \frac{२}{३}, \frac{३}{३}, \frac{४}{३}$।

अथ द्वितीयोदाहरणे राशयः या १, या २, या ३, या ४। एषां घनैक्यम् याघ १००। एतद्वर्गैक्यमानेन याव ३० सममिति पक्षौ यावद्वर्गेणापवर्त्य प्राग्वल्लब्धयावत्तावन्मानेनोत्थापिता जाता राशयः $\frac{३}{१०}, \frac{६}{१०}, \frac{९}{१०}, \frac{१२}{१०}$।

सुधा:—समान हर वाले असमान उन चार राशियों को कहो जिनका ऐक्य या घनैक्य उन राशियों के वर्गैक्य के बराबर होता है।

उदाहरण

यहाँ असमान य, २ य, ३ य, ४ य राशियाँ कल्पित की गयीं जिनका योग या घनयोग प्रश्नानुसार इन राशियों के वर्गयोग के बराबर है।

अतः $य + २य + ३य + ४य = १०य =$ राशियों के वर्गैक्य $=$
$य^2 + ४य^2 + ९य^2 + १६य^2 = ३०य^2$

$\therefore १०य = ३०य^2$

$\therefore ३०य = १०$

वा $य = \frac{१०}{३०} = \frac{१}{३}$

अतः राशियां $= \frac{१}{३}, \frac{२}{३}, \frac{३}{३}, \frac{४}{४}$।

ये सभी राशि असमान एवं समच्छद वाली हैं।

द्वितीय उदाहरण

प्रश्नानुसार राशियों का घनैक्य उनके वर्गैक्य के बराबर है, अतः
$य^3 + ८य^3 + २७य^3 + ६४य^3 = १००य^3$
$= य^2 + ४य^2 + ९य^2 + १६य^2 = ३०य^2$

$\therefore १००य^3 = ३०य^2$

दोनों पक्षों में 'य^2' से अपवर्त्तन से

$$१०० य = ३०$$

$$\therefore \quad य = \frac{३०}{१००} = \frac{३}{१०}$$

अतः चारों राशियाँ = $\frac{३}{१०}, \frac{६}{१०}, \frac{९}{१०}, \frac{१२}{१०}$

दोनों उदाहरणों में आलाप आसानी से घटते हैं। जैसा कि

$$चारों\ राशियों\ का\ योग = \frac{१}{३} + \frac{२}{३} + \frac{३}{३} + \frac{४}{३} = \frac{१०}{३}$$

$$चारों\ का\ वर्गयोग = \frac{१}{९} + \frac{४}{९} + \frac{९}{९} + \frac{१६}{९} = \frac{३०}{९} = \frac{१०}{३}$$

द्वितीयोदाहरण के राशियों का वर्गयोग

$$= \frac{९}{१००} + \frac{३६}{१००} + \frac{८१}{१००} + \frac{१४४}{१००} = \frac{२७०}{१००} = \frac{२७}{१०} ।$$

चारों का घनयोग

$$= \frac{२७}{१०००} + \frac{२१६}{१०००} + \frac{७२९}{१०००} + \frac{१७२८}{१०००} = \frac{२७००}{१०००} = \frac{२७}{१०} ।$$

उदाहरणम्—

त्र्यस्त्रक्षेत्रस्य यस्य स्यात् फलं वर्गेण सम्मितम्
दोः कोटिश्रुतिघातेन समं यस्य च तद्वद ॥ १८ ॥

न्यासः

अत्रष्ट क्षेत्रभुजानां यावत्तावद्गुणितानां न्यासः या ३' या ४, या ५ । अथ भुजकोटिघातार्धं फलम् याव ६ । एतत् कर्णेनानेन या ५ सममिति पक्षौ यावत्तावताऽपवर्त्य प्राग्वल्लब्धेन यावत्तावन्मानेनो-त्थापिता भुजकोटिकर्णाः $\frac{५}{३}, \frac{१०}{३}, \frac{२५}{५}$, एवमिष्टवशादन्येऽपि ।

अथ द्वितीयोदाहरणे कल्पितं तदेव क्षेत्रम्। यस्य फलम्=याव ६ एतद्दोः कोटिकर्णघातेनानेन याघ ६० सममिति पक्षौ यावद्वर्गेणापवर्त्य समीकरणेन प्राग्वज्जाता दोः कोटिकर्णाः $\frac{३}{१०}$, $\frac{२}{५}$; $\frac{१}{२}$। एवमिष्टवशादन्येऽपि।

सुधा :—जिस जात्य त्रिभुजक्षेत्र का फल कर्ण के या भुज कोटि घात के बराबर है, उसके भुज आदियों को कहो।

उदाहरण :—

यहाँ भुज कोटि कर्ण का मान क्रमशः ३य, ४य, ५य, मान लिया गया।

प्रश्नानुसार त्रिभुज फल = कर्ण = ५य

अतः त्रिभुजफल=भुजकोटिघातार्ध$=\frac{३य \times ४य}{२}=\frac{१२य^2}{२}=६य^2$

$\therefore$ $६य^2 = ५\ य =$ कर्ण

$\therefore$ $६य = ५$

$\therefore$ $य = \frac{५}{६}$।

य के मान से उत्थापन देने पर भुज $= \frac{५}{२}$;

कोटि $= \frac{५}{६} \times ४ = \frac{१०}{३}$

कर्ण $= \frac{५}{६} \times ५ = \frac{२५}{६}$।

यहाँ $\frac{\text{भुजकोटिगुणनफल}}{२}$ = क्षेफ. =

$\left[\frac{५}{२} \times \frac{१०}{३}\right] \frac{१}{२} = \frac{५०}{१२} = \frac{२५}{६} =$ कर्ण

अतः आलाप भी मिल गया।

द्वितीयोदाहरण :—

प्रश्नानुसार भु × को × क = क्षेफ.

$३य \times ४य \times ५य = ६०य^3 = ६य^2$

$\therefore$ $६०य = ६$

$\therefore$ य $= \frac{१}{१०}$, उत्थापन के द्वारा

$$\left.\begin{array}{l} भु = \frac{१}{१०} \times ३ = \frac{३}{१०} \\ को = \frac{१}{१०} \times ४ = \frac{२}{५} \\ कर्ण = \frac{१}{१०} \times ५ = \frac{१}{२} \end{array}\right\}$$

आलाप भी आसानी से मिल जाता है

जैसा कि $भु \times को \times क = \frac{३}{१०} \times \frac{२}{५} \times \frac{१}{२} = \frac{३}{५०} =$

$$\frac{भुज \times को}{२} = \left(\frac{३}{१०} \times \frac{२}{५}\right) \frac{१}{२} = \frac{३}{५०}$$ ।

उदाहरणम्

युतौ वर्गोऽन्तरे वर्गो ययोर्घाते घनो भवेत् ।
तौ राशी शीघ्रमाचक्ष्व दक्षोऽसि गणिते यदि ।। १९ ।।

अत्र राशी याव ५, याव ४ । योगेऽन्तरे च यथा वर्गः स्यात्तथा कल्पितौ । अत्रानयोर्घातः यावव २० । एवं घन इति इष्टयावत्तावद्शकस्य घनेन समीकरणे पक्षौ यावत्तावद्घनेनापवर्त्य प्राग्वज्जातौ राशी १००००, १२५०० ।।

सुधा :—वे कौन सी दो राशियाँ हैं जिनका योग या अन्तर वर्गात्मक हो जाता है, और दोनों राशियों के घात घनात्मक होता है । यदि गणित में प्रवीण हो तो उन राशियों को बतलाओ ।

उदाहरण :—

यहाँ ऐसी दो राशियाँ $४य^2$, $५य^2$ कल्पना की जिनका योग $= ४य^2 + ५य^2 = ९य^2$ = वर्गात्मक,

अन्तर $= ५य^2 - ४य^2 = य^2$ – वर्गात्मक ।

दोनो राशियों का घात $= ५य^2 \times ४य^2 = २० य^४$ ।

यह प्रश्नानुसार किसी के घन के बराबर है ।

अतः $२०य^४ = (१०य)^3$ मानकर

$२०य^४ = १०००य^3 \;\therefore\; २०य = १०००$

वा $य = \frac{१०००}{२०} = ५०$

अतः राशियाँ = २५०० × ४ = १०००० । २५०० × ५ = १२५०० है
इन राशियों पर से आलाप आसानी से घट जाता है ।

उदाहरणम्

घनैक्यं जायते वर्गो वर्गैक्यं च ययोर्घनः ।
तौ चेद् वेत्सि तदाऽहं त्वां मन्ये बीजावदां वरम् ।।२०।।

अत्र कल्पितौ राशी याव १, याव २ । अनयोर्घनयोगः यावघ ९ । एष स्वयमेव वर्गो जातोऽस्यमूलम् = याघ ३ ।

ननु यावत्तावद्वर्गघनोऽयं राशि र्न घनवर्गः कथमस्य घनात्मकं मूलमिति चेदुच्यते यावानेव घनवर्ग स्तावानेव वर्गघनः स्यादित्यत एव द्विगतचतुर्गतषड्गताष्टगता वर्गाः स्युः एषामेकद्वित्रिचतुर्गतानि मूलानि यथाक्रमं स्युः । एवं त्रिषड्नवगता घनाः । एक द्वित्रिगतानि तेषां मूलानि । एवं सर्वत्र ज्ञातव्यम् ।

अथ राश्योर्वर्गयोगः यावव ५ । अयं घन इतीष्टयावत्तावत्पञ्चघनसमं कृत्वा पक्षौ यावत्तावद्घनेनापवर्त्य प्रागवज्जातौ राशी ६२५।१२५० ।

एवमव्यक्तापवर्त्तनं यथासम्भवति तथा चिन्त्यम् ।

सुधा—वे कौन सी दो राशियाँ हैं जिनका घनयोग वर्गात्मक और वर्गयोग घनात्मक हो जाता है । उन राशियों को यदि तुम मुझे कहो तो तुम्हें मैं बीजवेत्ताओं में श्रेष्ठ मानूँ ।

उदाहरण

यहाँ प्रथमालाप घटित दो राशियां मानी गई । वे राशियाँ हैं $य^2$, $२ य^2$ ।

दोनों का घन योग = $(य^2)^3 + (२ य^2)^3 = य^6 + ८ य^6 = ९ य^6$, यह वर्गात्मक है क्योंकि $९ य^6$ का वर्गमूल = $३ य^3$ ।

दोनों राशियों का वर्ग योग प्रश्नानुसार घनात्मक होता है, अतः राशियों का वर्गयोग = $(य^2)^2 + (२ य^2)^2 = य^4 + ४ य^4 = ५ य^4$ इसे अभीष्ट ५ य के घन के समान करने से $५ य^4 = १२५ य^3$,

$$\therefore ५ य = १२५ \therefore य = २५ ।$$

इस य मान से राशियों में उत्थापन से

प्रथम राशि$=$य^2 $=$ (२५)^2 $=$ ६२५

द्वितीय राशि$=$२ य^2$=$६२५$\times$२$=$१२५०

इन दोनों राशियों से सभी आलाप घट जायेंगे।

यहाँ ग्रंथकार ने स्वयनेव सन्देह व्यक्त किया है कि किसी राशि का घनवर्ग या वर्गघन दोनों भिन्न हैं अथवा एक।

इसका निराकरण भी उन्होने ही कर दिया है कि दोनों एक ही है क्योंकि किसी अंक का घातांक २, ४, ६, ८ रहे तो सभी वर्गात्मक है और ३, ६, ९ आदि रहे तो घनात्मक है। जैसा कि य^6 का वर्गमूल$=$य^3, और उसका घनमूल य^2 है। अतः वर्ग का घन या घन का वर्ग दोनों समान ही है।

विमर्श—

एक वर्ण समीकरण सम्बद्ध उदाहरणों में छेदगम या पक्षान्तरनयन से एक पक्ष में अव्यक्तांक का एक घात, और दूसरे पक्ष में व्यक्ताङ्क दीख पड़ते हैं। अव्यक्ताङ्क के गुणकाङ्क से व्यक्ताङ्क में भाग देने पर अव्यक्त का मान निकल जाता है।

किन्तु जहाँ एक पक्ष में अव्यक्त का वर्ग घन आदि घात बचे वहाँ समीकरण के सभी पदों को वाम पक्षगत करके दक्षिण पक्ष को शून्य बनावें। फिर फिर वाम पक्ष के खण्डों मे जहाँ अव्यक्त का एक घात रहे उस खण्ड को शून्य के समान मानकर समक्रिया से आगत अव्यक्त का मान उद्दिष्ट समीकरण में अव्यक्त का मान होगा।

यदि वाम पक्ष में ऐसे अनेक खण्ड हों जिनमें अव्यक्त का एक घात रहे तो प्रत्येक खण्ड को शून्य के समान करके समीकरण से अव्यक्त के जो दो या तीन मान आवेंगे सभी उद्दिष्ट समीकरण में अव्यक्त के मान होंगे। निम्नाङ्कित उदाहरणों से उपर्युक्त बातें स्पष्ट हो जायेंगी।

उदा० (१) यदि ३ य^2 $-$ ७ य$=$५ य $-$ य^2 है तो य का मान बतलाइए।

$\because$ ३ य^2 $-$ ७ य$=$५ य $-$ य^2

$\therefore$ पक्षान्तर नयन से

४ य^2 $-$ १२ य $=$ ०

४ य (य $-$ ३) $=$ ० अतः प्रथम पक्ष में दो खण्डों ४ य, (य $-$ ३) में से कोई भी शून्य हो सकता। अतः यदि य $-$ ३ $=$ ० तो य$=$३, यदि ४ य$=$ ० तो य$=$०। अतः उपर्युक्त उदाहरण में य$=$३ या य$=$०

उदा० (२)

यदि $य^2 = ४ य + १२$ तो य का मान बतलाइये ।

पक्षान्तरनयन से उपर्युक्त समीकरण

$य^2 - ४ य - १२ = ०$

$\therefore य^2 - ६ य + २ य - १२ = ०$

या $य (य - ६) + २ (य - ६)$

तुल्य गुणक पृथक्करण से

$(य+२) (य - ६) = ०$ । यह प्रथम पक्ष का कोई भी खण्ड शून्य हो सकता । यदि $य - ६=०$ है तो $य=६$ या यदि $य+२=०$ तो $य= - २$

अतः उपर्युक्त इस उदाहरण में $य=६$ या $य = - २$

उदा० ३—

यदि $\frac{य^2 - ४}{य + २} = \frac{२ य - १}{५}$ तो य का मान क्या है ?

$\therefore \frac{य^2 - ४}{य + २} = \frac{२ य - १}{५}$ $\therefore ५ (य^2 - ४) = (२ य - १) (य + २)$

या $५ (य - २) (य + २) = (२ य - १) (य + २)$

या $५ (य - २) = २ य - १$

वा $५ य - १० = २ य - १$

समशोधन करने पर

$३ य - ९ = ०$ $\therefore ३ (य - ३) = ०$

$\therefore य = ३$

उदा० (४)

$य + \frac{१}{२} = २ \frac{१}{२}$ है तो य का मान बतलाइए—

समच्छेद करने पर उपर्युक्त स्वरूप

$\frac{य^2 + १}{य} = \frac{५}{२}$ $\therefore २य^2 + २ = ५ य$

या $२ य^2 - ५ य + २ = ०$

वा $२ य^2 - ४ य - य + २ = ०$

तुल्यगुणक पृथक्करण से

$२ य (य - २) - (य - २) = ०$

वा $(२ य - १) (य - २) = ०$

$\therefore य = २$ या $२ य = १$ $\therefore य = \frac{१}{२}$,

उदा० (५)

$\text{४य} + \frac{\text{३}}{\text{य}} = \text{५ य} - \text{२}$ है तो य का मान क्या है ?

समच्छेद एवं छेदापगम करने पर

$\text{४ य}^2 + \text{३} = \text{५ य}^2 - \text{२ य}$

$\therefore \text{य}^2 - \text{२ य} - \text{३} = \text{०}$

वा $\text{य}^2 - \text{३ य} + \text{य} - \text{३} = \text{०}$

वा $\text{य} (\text{य} - \text{३}) + (\text{य} - \text{३}) \times \text{१} = \text{०}$

वा $(\text{य} + \text{१})(\text{य} - \text{३}) = \text{०}$

अत: य = ३ या य = − १

(६) $\text{क}^2 - \frac{\text{१}}{\text{क२}} = \left(\text{अ} + \frac{\text{१}}{\text{क}}\right)\left(\text{क} - \frac{\text{१}}{\text{क}}\right)$ हो तो क का मान क्या है ?

वर्गान्तर = योगान्तरघात, अत:

$\left(\text{क} + \frac{\text{१}}{\text{क}}\right)\left(\text{क} - \frac{\text{१}}{\text{क}}\right) = \left(\text{अ} + \frac{\text{१}}{\text{क}}\right)\left(\text{क} - \frac{\text{१}}{\text{क}}\right)$

वा $\left(\text{क} + \frac{\text{१}}{\text{क}}\right)\left(\text{क} - \frac{\text{१}}{\text{क}}\right) - \left(\text{अ} + \frac{\text{१}}{\text{क}}\right)\left(\text{क} - \frac{\text{१}}{\text{क}}\right) = \text{०}$

तुल्यगुणकपृथक्करण से

$\left(\text{क} - \frac{\text{१}}{\text{क}}\right)\left(\text{क} + \frac{\text{१}}{\text{क}}\right) - \left(\text{अ} + \frac{\text{१}}{\text{क}}\right) = \left(\text{क} - \frac{\text{१}}{\text{क}}\right)\left(\text{क} - \text{अ}\right) = \text{०}$

वा $(\text{क}^2 - \text{१})(\text{क} - \text{अ}) = \text{०}$

वा $(\text{क} - \text{१})(\text{क} + \text{१})(\text{क} - \text{अ}) = \text{०}$

यहाँ क + १ = ०, क − १ = ०, क − अ = ० हो सकते ।

अत: क = − १ वा क = १ वा क = अ ।

अभ्यासार्थं कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) $\text{४य}^2 - \text{५} = \text{२य}^2 + \text{२५}$ इसमें य = ५ वा $-\frac{\text{५}}{\text{२}}$

(२) $\text{य}^3 = \text{२७}$ तो य = ३

(३) $(\text{य} - \text{अ})^2 - \text{ग}^2 = \text{०}$ तो य = अ ± ग

(४) $\text{य}^2 = \text{४}(\text{२य} - \text{३})$ इसमें य = २, वा ६

(५) $\text{य}(\text{य} + \text{११}) = \text{६}(\text{य}^2 - \text{२})$ तो य = ३ वा $-\frac{\text{४}}{\text{५}}$

(६) $\frac{\text{य}^2 - \text{९}}{\text{५}} = (\text{य} - \text{३})(\text{य} - \text{५})$ है तो य = ३, या = ७

(७) $\frac{य^2-1}{5} = (य - 2) + 1$ है तो $य = 4$

(८) $\frac{4य^2 - 6}{2य - 1} = य + 3$ है तो $य = 3$ या $-\frac{1}{2}$

(९) $4य^2 + \frac{3}{य} = 5य - 2$ है तो $य = 3$ या $य = -1$

(१०) $\frac{य-3}{य-4} - \frac{य-2}{य-3} = \frac{य-1}{19य-12}$ है तो $य = 0$ वा $य = 8$

(११) $\frac{य+1}{य-3} - \frac{5-य}{2} = \frac{4य-7}{2}$ है तो $य = 4$ या $य = \frac{1}{3}$

(१२) $\frac{य-1}{य+1} + \frac{5य-2य}{3} = \frac{3य-4}{3}$ है तो $य = 2$ या $य = -\frac{3}{5}$

(१३) $\frac{1}{य-2} - \frac{6}{य-3} + \frac{6}{य-4} = \frac{2य^2 - 7य}{(य-2)(य-3)(य-4)}$
है तो $य = 6$, वा $य = 0$

उदाहरणम्

यत्र त्र्यस्त्रक्षेत्रे धात्री मनुसम्मिता सखे बाहू।
एकः पञ्चदशान्यः त्रयोदश ववावलम्बकं तत्र ॥ २१ ॥

आबाधाज्ञाने सति लम्बज्ञानमिति लब्ध्वाबाधा यावत्तावन्मिता कल्पिता या १। एतदूना चतुर्दशान्याबाधा या १̇ रू १४।

स्वाबाधावर्गोनौ स्वभुजवर्गौ समाविति समशोधनार्थं
न्यासः—याव १̇ या ० रु १६९।
याव १̇ या २८ रु २९।
अनयोः समवर्गगमे लब्धं यावत्तावन्मानम् ५।
अनेनोत्थापिते जाते आबाधे ५, ९। लम्बवर्गयोश्योत्थापितयोरुभयतः सम एव लम्बः १२।
अत्रोत्थापनं वर्गस्य वर्गेण घनस्य घनेनेति सुधिया ज्ञातव्यम्।

सुधा –जिस त्रिभुज में आधार चौदह एक भुजा पन्द्रह तथा अन्य भुजा तेरह है तो वहाँ लम्बमान बतलाइये––

उदाहरण

यही क्षेत्र स्वरूप है।
यहाँ लघ्वाबाधा = य

∴ बृहद्बाधा = १४ – य।

∵ $भु^2 - आ^2 = लम्ब^2$

∴ $(१३)^2 - य^2 = १६९ - य^2 = लं^2$ (१)

$= (१५)^2 - (१४ - य)^2 = २२५ - (य^2 - २८ य + १९६)$

$= २९ - य^2 + २८ य = लं^2$ (२)

∴ $१६९ - य^2 = २९ - य^2 + २८ य$

$१६९ - २९ = २८ य$

∴ $१४० = २८ य$

∴ $य = \frac{१२८}{२८} = ५$

अतः $लं^2 = १६९ - २५ = १४४$

∴ $लं = \sqrt{१४४} = १२$

द्वितीय लम्बवर्ग स्वरूप में भी 'य' के मान से उत्थापन से लम्ब = १२।

उदाहरणम् :—

यदि समभुवि वेणुर्द्वित्रिपाणिप्रमाणो
गणक ! पवनवेगादेकदेशे स भग्नः।
भुवि नृपमितहस्तेष्वङ्ग लग्नं तदग्रं
कथय कतिषु मूलादेव भग्नः करेषु ॥ २२ ॥

अत्र वंशाधरखण्डं कोटिस्तत्प्रमाणम् या १। एतदूना द्वात्रिंदूर्ध्वं खण्डम् या १̇ रु ३२ = कर्णः मूलाग्रयोरन्तरं भुजः = १६

भुजकोटिवर्गयोगः = याव १ रु २५६। कर्णवर्गस्यास्य याव १ या ६४̇ रु १०२४ सम इति समवर्गगमे प्रागवदाप्तयावत्तावन्मानेन १२ उत्थापितौ कोटिकर्णौ १२, २०। एवं भुजकोटियुतावपि ॥

सुधा :—हे गणक समान भूमि पर बत्तिस हाथ का बाँस के अग्रभाग का हिस्सा हवा के वेग से टूटने पर वंश मूल से सोलह हाथ पर लगा। तो बताओ वंश का कितना भाग टूटा ?

उदाहरण :—

यहाँ बाँस का अधः खण्ड (कोटिरूप) का मान य मानने से ३२ − य = ऊर्ध्वखण्ड = कर्ण।

जात्य त्रिभुज होने के कारण भु^{2} + को^{2} = कर्ण।

यहाँ भु = १६, कोटि = य, कर्ण = ३२ − य

अतः २५६ + य^2 = (३२ − य)^2 = १०२४ − ६४य + य^2

समशोधन एवं पक्षान्तरनयन से

६४य = १०२४ − २५६ = ७६८

$\therefore$ य = $\frac{७६८}{६४}$ = १२ = कोटि।

अतः कर्ण = ३२ − १२ = २०। अतः

२० हाथ का अग्रभाग टूटा।

अथ कोटिकर्णान्तरे भुजे च ज्ञाते उदाहरणम्

चक्रक्रौञ्चाकुलितसलिले क्वापि दृष्टं तडागे
तोयादूर्ध्वं कमलकलिकाग्रं वितस्तिप्रमाणम्।

मन्दं मन्दं चलितमनिलेनाहृतं हस्तयुग्मे
तस्मिन् मग्नं गणक ! कथय क्षिप्रमम्भः प्रमाणम् ॥ २३ ॥

अत्र जलप्रमाणं जलगाम्भीर्यमिति तत्प्रमाणम् = या १ इयं कोटिः सा कलिकामानयुता जातः कर्णः = $\frac{\text{या २ रु १}}{\text{२}}$ हस्तद्वयं भुजः = रु २ ।

अत्रापि दोः कोटिवर्गयोगं कर्णवर्गसमं कृत्वा लब्धं जलगाम्भीर्यम् = $\frac{१५}{४}$ । कर्णमानम् = $\frac{१७}{४}$

सुधा :—चक्र तथा क्रौञ्च से आलोड़ित एक जलाशय के पानी के ऊपर एक वित्ता (हस्तार्ध) कमल की कलिका दीख पड़ी । मन्द२ वायुवेग से आहत होने पर वही कलिकाग्र अपने स्थान से दो हाथ पर जलमग्न हो गया तो बताओ उस तालाब में पानी कितना था ?

उदाहरण :—

यहाँ जल प्रमाण कोटि रूप है जिसका मान 'य' माना समस्त कलिकाग्र तक कमल कर्ण के रूप में जलमग्न होता है अतः कर्ण = य+$\frac{1}{2}$, भु = २

$\therefore$ भु^{2} + को^{2} = (२)^2 + य^2 = कर्ण^2

$$\therefore ४ + य^2 = \left(य + \frac{१}{२}\right)^2 = \left(\frac{२य + १}{२}\right)^2 = \frac{४य^2 + ४य + १}{४}$$

$$\therefore (४ + य^2)\,४ = ४य^2 + ४य + १$$

$$\text{वा } १६ + ४य^2 = ४य^2 + ४य + १$$

समशोधन एवं पक्षान्तरनयन से १५ = ४य

$$\therefore य = \frac{१५}{४} = \text{कोटि} = \text{पानी का मान ।}$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \frac{१५}{४} + \frac{१}{२} = \frac{१७}{४} = \text{कर्ण ।}$$

वृक्षाद्धस्तशतोच्छ्रयाच्छतयुगे वाप्यां कपिः कोऽप्यगा-
दुत्तीर्याथ परोद्रुतं श्रुतिपथात्प्रोड्डीय किञ्चिद्द्रुमात् ।
जातैवं समता तयोर्यदि गतावुड्डीयमानं कियद्
विद्वंश्चेत्सुपरिश्रमोऽस्ति गणिते क्षिप्रं तदाचक्ष्व मे ।। २४ ।।

अत्र समागतिः = ३०० । उड्डीयमानम् = या १ । एतद्युतोवृक्षोच्छ्रायः कोटिः । यावत्तावदूना समगतिः कर्णः । तरुवाप्यन्तरं भुजः

न्यासः

भुजकोटिवर्गैक्यं कर्णवर्गसमं कृत्वा लब्धमुड्डीयमानम् = ५०

सुधा :—एक सौ हाथ वाले ताल के पेड़ से उतरकर एक बन्दर पेड़ से दो सौ हाथ की दूरी पर स्थित वापी के पास जाता है। उसी पेड़ पर स्थित दूसरा बन्दर ऊपर की ओर कुछ हाथ उड़कर कर्ण मार्ग मार्ग से उसी वापी के पास पहुँचता। इस तरह दोनों की गति में समता हुई, अर्थात् दोनों को बराबर चलने पड़े, तो बताओ कि बन्दर कितना हाथ उड़ा ?

उदाहरण :—

यहाँ उड्डीयमानप्रमाण = य

$\therefore$ १०० + य = कोटि।

चूँकि दोनों की गति बराबर है अतः ३०० − य = कर्ण

$\because$ भु^{2} + को^{2} = कर्ण

$\therefore$ $(२००)^2 + (य + १००)^2 = (३०० - य)^2$

$\therefore$ ४०००० + य^2 + २०० य + १०००० = ९०००० − ६००य + य^2

समशोधन एवं पक्षान्तरनयन से

$\therefore$ ८०० य = ९०००० − ५०००० = ४००००

$\therefore$ य = $\frac{४००००}{८००}$ = ५० = उड्डीयमान,

अतः कोटि = १०० + ५० = १५०

कर्ण = ३०० − ५० = २५० ।

पञ्चदशदशकरोच्छ्रयवेण्वोरज्ञातमध्यभूमिकयोः ।
इतरेतरमूलाग्रगसूत्रयुतेर्लम्बमानमाचक्ष्व ॥२५॥

अत्र क्रियावतरणार्थमिष्टं वेण्वन्तरभूमानं कल्पितम् =२० । सूत्र-सम्पातात् लम्बमानम् = या १ । यदि पञ्चदशकोटया विंशतिर्भुज-स्तदा यावत्तावन्मितया किमिति लब्धा लघुवंशाश्रितावाधा या $\frac{४}{३}$ ।

पुनर्यदि दशमितकोटया विंशतिर्भुजः तदा यावन्मितकोट्या किमिति लब्धा बृहद्वंशाश्रितावाधा या २ । अनयोर्योगं या $\frac{१०}{३}$ विंशति सम कृत्वा लब्धोलम्बः ६ । उत्थापनेनावाधे च ८, १२ ।

अथवा वंशसम्बन्धेनाबाधे तद्युतिर्भूमिरिति यदि वंशद्वययोगेन २५ अनेनाबाधायोगो । २० लभ्यते तदा वंशाभ्यां १५, १० किमिति जाते आवाधे ८, १२ । अत्रानुपातात् सम एव लम्बः ६ । किं यावत्तावत्कल्पनया ।

अथवा वंशयोर्वधो योगहृतो यत्रकुत्रापि वंशान्तरे लम्बः स्यादिति किं भूमिकल्पनयापि, एतद्भुवि सूत्राणि प्रसार्य बुद्धिमतोह्यम् ।

इति भास्करीय बीजगणिते एकवर्णसमीकरणं—समाप्तम्

सुधा :—पन्द्रह और दश हाथ के दो बाँस जिनकी दूरी अज्ञात है, जमीन पर स्थित हैं । एक के अग्र और दूसरे की जड़ में गए हुए सूत्रों के योग बिन्दु से भूमि पर किए हुए लम्ब का मान बतलाओ ।

उदाहरण :—

यहाँ भूमि अज्ञात है किन्तु कल्पना के द्वारा उसे २० मान लिया गया । तथा लम्ब=य

अ क ग, ल क' ग त्रिभुजों के साजात्य के कारण अनुपात से

$$आ = \frac{२० \times य}{१५}$$

एवम् $\frac{२० \times य}{१०} = आ'$ ।

दोनों आवाधाओं का योग

$$= \frac{२० य}{१५} + \frac{२० य}{१०} = भूमि = २०$$

$$\therefore \frac{४०य + ६०य}{३०} = २०$$

वा $४०य + ६०य = ६००$

$\therefore १००य = ६००$

वा $य = \frac{६००}{१००} = ६ =$ लम्ब ।

अतः आबाधाएँ = ८, १२,

अथवा इष्टभूमिमान माने विना ही

लम्बज्ञान :—

भूमि = भू, लम्ब = य

पूर्ववत् अनुपात से $\frac{भू \times य}{बृवं}$ = लघ्वाबाधा

एवम् $\frac{भू \times य}{लवं}$ = बृहदाबाधा

आबाधाद्वययोग = भूमि = $\frac{भू \times य}{बृवं} + \frac{भू \times य}{लवं}$

$= भू.य \left(\frac{१}{बृवं} + \frac{१}{लवं} \right)$

$= भू.\ य \left(\frac{लवं + बृवं}{बृवं \times लवं} \right) = भू.$ ।

$\therefore य \left(\frac{लवं + बृवं}{बृवं \times लवं} \right) = १$

$\therefore य\ (लवं + बृवं) = बृवं \times लवं$

$\therefore य = \frac{बृवं \times लवं}{लवं + बृवं} = \frac{१५ \times १०}{१५ + १०} = \frac{१५०}{२५} = ६ =$ लम्ब

विमर्श :—बुद्धिवैशद्य के लिए प्रश्न सम्बद्ध उदाहरण

उदाहरण (१)—कौन सी संख्या है जिसे त्रिगुणित करके बीस घटा देने पर शेष पञ्चगुणित संख्या का तृतीयांश रहता है

माना कि वह संख्या = य

अतः प्रश्नानुसार

$$३य - २० = \frac{५य}{३}\ ।$$

$\therefore$ ९य − ६० = ५य

वा ९य − ५य = ६०

$\therefore$ ४य = ६०

$\therefore$ य = $\frac{६०}{४}$ = १५

उदाहरण (२) ३६ को ऐसे दो भागों में विभक्त कीजिए कि पहले का चतुर्थांश में दूसरे का अष्टमांश जोड़ कर योगफल में राशि का षष्ठांश घटा देते हैं तो शेष एक रहता है तो दोनों खण्डों को बतलाइए।

उत्तर:—माना कि प्रथम खण्ड = य, द्वितीयखण्ड = र

$\therefore$ प्रश्नानुमार य + र = ३६ $\therefore$ य = ३६ − र

एवम् प्रश्नानुसार ही

$$\left(\frac{य}{४} + \frac{र}{८}\right) - \frac{य + र}{६} = १$$

$$\therefore \frac{२य + र}{८} - \frac{(य + र)}{६} = १$$

$$\therefore \frac{६य + ३र - ४य - ४र}{२४} = १$$

$\therefore$ २य − र = २४

२य = २४ + र

$$\therefore य = \frac{२४ + र}{२} = ३६ - र$$

वा २४ + र = ७२ − २र

$\therefore$ ३र = ४८

$\therefore$ र = १६ = द्वितीय खण्ड।

उत्थापन देने से य = ३६ − १६ = २० = प्रथम खण्ड।

उदाहरण (३)—-राम, श्याम, मोहन ने सम्मिलित रूप से व्यापार में एक हजार रुपये लगाए। राम ने जितने धन लगाए उसका आधा दश अधिक श्याम ने, और राम के धन के चतुर्थांश से १० अधिक मोहन ने यदि लगाए तो बतलाइए किन२ ने कितने२ धन व्यापार में लगाए ?

मान लिया कि राम ने 'य' धन लगाया।

अतः प्रश्नानुसार

$\frac{य}{२} + १० =$ श्याम ने, $\frac{य}{४} + १० =$ मोहन ने अतः तीनों के धन का योग =

$$य + \frac{य}{२} + १० + \frac{य}{४} + १० = १०००$$

$$\therefore \frac{२य + य + २०}{२} + \frac{य + ४०}{४} = १०००$$

$$\therefore \frac{४य + २य + ४० + य + ४०}{४} = १०००$$

$$\therefore ७य + ८० = ४०००$$

$$\therefore ७य = ४००० - ८० = ३९२०$$

$$\therefore य = \frac{३९२०}{७} = ५६०$$

अतः राम ने	५६०	रुपये	लगाइए
श्याम ने	२९०	रुपये	
मोहन ने	१५०	रुपये	
योग =	१०००		

उदाहरण (४)--कौन सी वह भिन्न संख्या है जिसके अंश में ६ जोड़ने पर = २, और हार में एक घटाने पर एक होता है, तो भिन्न संख्या बतलाइए :—

माना कि भिन्न संख्या $= \frac{य}{र}$

अतः प्रश्नानुसार $\frac{य + ६}{र} = २$

$$\therefore य = २र - ६$$

एवम् $\frac{य}{र - १} = १$

$$\therefore य = र - १ ।$$

य मानों के समीकरण से

$$२र - ६ = र - १$$

$$\therefore र = ५ \text{ एवम् } = य = ४$$

अतः भिन्न संख्या $= \frac{४}{५}$ ।

उदाहरण (५)--राम ने श्याम से कहा कि यदि तुम अपने धन का तृतीयांश मुझे दे दो तो मैं तुम से ड्योढ़ा हो जाऊगा। श्याम ने तुरत जवाब दिया कि यदि तुम अपने में से १० मात्र ही मुझे दे दो तो मैं तुम से चौगुना हो जाऊँ, तो बताइए दोनों के पास कितने२ धन थे।

माना कि राम के पास = य,

और श्याम के पास = र

प्रश्नानुसार

$$य + \frac{र}{३} = \frac{२र}{३} + \frac{र}{३}$$

$$\therefore य + \frac{र}{३} = \frac{३र}{३} = र$$

$$\therefore य = र - \frac{र}{३} = \frac{२र}{३}$$

पुनः दूसरे प्रश्न के अनुसार

$$(य - १०)४ = र + १०$$

$$\therefore ४य - ४० = र + १०$$

$$वा, ४य = र + ५०$$

$$\therefore य = \frac{र + ५०}{४} = \frac{२र}{३}$$

$$\therefore ३र + १५० = ८र$$

$$\therefore १५० = ५र$$

$$\therefore र = ३०, य = २०$$

अतः राम का धन = २०

श्याम „ „ = ३०

उदा० (६) एक व्यक्ति के पास ४ गायें, ३ भैंस, ५ बैल और पचास रुपये ऋण थे। दूसरे के पास १० गाये एक भैंस, ३ बैल तथा ५० रुपये भी थे। एक गाय के मूल्य से १ भैंस का मूल्य दूना और एक बैल का ड्योढ़ा था फिर भी दोनों तुल्य धन वाले थे तो बतलाइए कि गाय, भैंस तथा बैल के मूल्य कितने-कितने थे।

माना कि एक गाय का मूल्य = य

अतः एक भैंस = २य, और एक बैल का $= \frac{३य}{२}$

प्रश्नानुसार—

प्रथम व्यक्ति का धन $= ४ य + ६ य + \frac{१५य}{२} - ५०$

दूसरे का धन $= १० य + २ य + \frac{९य}{२} + ५०$

दोनों तुल्य धन वाले थे अतः

$$४य + ६य + \frac{१५य}{२} - ५० = १० य + २य + \frac{९य}{२} + ५०$$

समच्छेद करने पर।

$$\frac{२० य + १५ य}{२} - ५० = \frac{२४ य + ९ य}{२} + ५०$$

$$\therefore \frac{३५य}{२} - ५० = \frac{३३य}{२} + ५०$$

य = १०० ।

अतः प्रथम का धन $= \frac{३५००}{२} - ५० = १७००$

एवम् दूसरे का धन $= \frac{३३००}{२} + ५० = १७००$

उदा० ७ – राम, श्याम तथा मोहन किसी काम को अलग-अलग क्रमशः प, फ, ब दिनों में करते तो तीनों मिलकर उसे कितने दिनों में पूरा कर सकेंगे ?

माना कि 'य' दिनों में तीनो मिलकर काम पूरा करेंगे। पूरे काम का द्योतक = १

तो तीनों एक दिन में क्रमशः $\frac{१}{प}, \frac{१}{फ}, \frac{१}{ब}$ पूरा करेंगे।

अतः एक दिन में तीनों मिल कर कार्य का

$\left(\frac{१}{प} + \frac{१}{फ} + \frac{१}{ब}\right)$ भाग करेंगे।

अतः एक दिन मे काम का $\left(\frac{प + फ}{प.फ} + \frac{१}{ब}\right)$

$= \left(\frac{प.ब + फ.ब + प फ}{प.फ.ब}\right)$ इतना हिस्सा वे पूरा करेंगे।

अतः यदि काम के उपर्युक्त भाग पूरा करने में यदि एक दिन तो पूरे काम करने में कितने दिन इस त्रैमाशिक से—

$$\frac{१ \times १}{\frac{(\text{पब} + \text{फब} + \text{पफ})}{\text{प फ. ब.}}}$$

$$\frac{१ \times १ \times \text{प. फ. ब}}{(\text{पब} + \text{फब} + \text{पफ})} = \frac{\text{प. फ. ब}}{(\text{पब} + \text{फब} + \text{पफ})}$$

$= \text{य}.$ ।

उदा० ८—वर्त्तमान समय में पिता की आयु पुत्र की आयु से छगुनी है और दो वर्ष पहले पिता की आयु पुत्र की आयु से एकादश गुणित थी तो दोनों की आयु बतलाइए।

माना कि वर्त्तमान समय में पुत्र की आयु = य,

अतः पिता की आयु = ६ य.

दो वर्ष पहले पुत्र की आयु = य − २,

और पिता की आयु = ६ य − २

अतः प्रश्नानुसार

६ य − २ = (य − २) × ११

∴ ६ य − २ = ११ य − २२

पक्षान्तरनयन से २० = ५ य

∴ य = ४ = पुत्र की आयु।

अतः पिता की आयु = २४।

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) यदि दो संख्याओं का योग = ३०, और दोनों में ५-५ जोड़ देने पर छोटी संख्या से बड़ी संख्या त्रिगुणित हो जाती है तो संख्याएँ बतलाइये—

उत्तर = ५, २५

(२) वह कौन सी संख्या है जिसे त्रिगुणित करके १५ जोड़ देने पर पञ्चोन उस संख्या से पञ्च गुणित हो जाती है तो संख्या बतलाइए—

उत्तर = २०

(३) ३० को ऐसे तीन भागों में विभक्त कीजिए कि प्रथम भाग से दूसरा भाग दूना और तीसरा तीना हो।

उत्तर = ५, १०, १५

(४) दो लड़कियों में छोटी की आयु से बड़ी की आयु त्रिगुणित है किन्तु दो वर्ष पहले छोटी की आयु से बड़ी की आयु चतुर्गुणित से भी एक वर्ष अधिक थी तो वर्त्तमान समय में दोनों की क्या आयु है ?

उत्तर = ५, १५

(५) एक बनिया ने बच्चों की मजदूरी से औरतों की दूनी और पुरुषों की चौगुनी मजदूरी तय की और उसने कुल ७०० रुपये मजदूरी में खर्च किये और बच्चों से स्त्रियाँ दूनी और पुरुष चौगुने थे, सभी को मजदूररी भी बराबर बराबर मिली तो कितने बच्चे कितनी स्त्रियाँ और कितने पुरुष थे ?

उत्तर = बच्चे=२५, पुरुष = १००, स्त्रियाँ = ५०

(६) दो संख्याओं का योग = ८५ और दोनों का वर्गान्तर = ४६७५ तो राशियाँ बतलाइए ।

उत्तर = ७०, १५

(७) राम के पास १० रत्न और एक सौ रुपये ऋण था, किन्तु श्याम के पास ८ रत्न एवं सौ रुपये धन था, दोनों समान सम्पत्ति वाले थे रत्न का मूल्य क्या है ?

उत्तर=१००

(८) एक बगीचे में आम, कटहल एवं अमरूद के १००० पेड़ थे । आम के पेड़ से कटहल के पेड़ १०० (एक सौ) कम, और अमरूद का पेड़ २०० अधिक थे तो सबकी अलग-अलग संख्या बतलाइये ।

उत्तर = आम=३००, कटहल=२००, अमरूद ५००

(९) एक भिन्न संख्या का मान = $\frac{१}{२}$, अंश में पाँच घटाने पर वह $\frac{१}{३}$ के बराबर हो जाता है तो भिन्न संख्या क्या है ?

उत्तर = $\frac{१५}{०}$

(१०) राम के पास १० घोड़े, ५ ऊँट और एक हाथी थे, और श्याम के पास ४ घोड़े, ३ ऊँट और २ हाथी थे । घोड़ा के मूल्य से ऊँट का दूना और हाथी का चौगुना था । दोनों ने अपने-अपने पशु बेच डाले तो राम के पास श्याम से ६०० रुपये अधिक थे तो पशुओं का मूल्य बतलाइये ।

एक घोड़ा का मूल्य=१००

एक ऊँट का मूल्य=२००

एक हाथी का मूल्य=४००

(११) पास की बे कौन सी दो संख्यायें हैं जिनके वर्गान्तर=३१ है तो संख्यायें बतलाइये--

उत्तर=१५, १६

(१२) एक व्यक्ति को लड़के और भतीजे मिलाकर २५ थे और उसके पास ५००० रुपये भी थे। मृत्यु के समय उसने लड़कों और भतीजों में बराबर बराबर धन बाँट दिये फिर भी एक भतीजे की अपेक्षा एक लड़के को चतुर्गुणित धन मिला तो लड़कों और भतीजों की संख्या बतलाइये।

उत्तर—लड़के ५, भतीजे २०

(१३) ६०५ को ऐसे चार भागों मे विभक्त कीजिये कि प्रथम भाग में १० जोड़ने, दूसरे भाग में १० घटाने तीसरे भाग को १० से गुणा करने, और चौथे भाग में १० से भाग देने पर समान ही लब्धि हो।

उत्तर—४०, ६०, ५, ५००

(१४) आम का एक व्यापारी एक रुपया में ७ आम बेचता है तो दो आम बच जाते, एक रुपये में ९ आम देने पर एक आम शेष रह जाता और एक रुपया में ५ आम देने से निःशेष आम हो जाता। किन्तु तीनों लब्धियों का योग ४५ रुपये होते तो आम कितने थे ?

उत्तर--१००

(१५) जिन दो संख्याओं में प्रथम का तृतीयांश और दूसरे का चतुर्थांश मिलकर बीस होते, और प्रथम के पञ्चमांश में दूसरे के चतुर्थांश को घटाकर आधा करने से दो होते तो संख्या बतलाइये।

उत्तर--४५, २०

(१६) एक पेड़ की डाल पर बैठने के लिए पक्षिसमूह आया। एक एक डाल पर एक एक पक्षी जब बैठा तो एक पक्षी शेष रह गया। जब दो दो पक्षी एक एक डाल पर बैठे तो एक डाल ही शेष रह गई तो डाल और पक्षियों की संख्या क्या है ?

उत्तर डाल=३ पक्षिसंख्या=४

(१७) राम और श्याम के पास कुछ कुछ रुपये थे। राम ने कहा कि यदि मेरे पास और ४५ रुपये होते तो तुमसे मैं दूना हो जाता। श्याम ने जबाव दिया कि यदि मेरे पास पाँच रुपये मात्र और होते तो मैं तुमसे छेगुना हो जाता, तो बतलाइये कि कितने कितने रुपये दोनों के पास थे ?

राम=५, श्याम=२५

(१८) राम ने श्याम से कहा कि यदि तुम एक रुपया मुझे दो तो मैं तुमसे दूना, दो रुपये दो तो मैं तुमसे तिनगुना और तीन रुपये दो तो मैं तुमसे पञ्चगुना हो जाऊँगा, तो बताइये कि राम और श्याम के पास कितने कितने रुपये थे ?

उत्तर—राम के पास-७

श्याम के पास=५

(१९) राम अपने घर से २५ दिनों में वाराणसी पहुंच जाता, श्याम वहाँ से १५ दिनों में वाराणसी जाता, राम अपने घर से वाराणसी की ओर और श्याम वाराणशी से अपने घर की ओर चले तो कितने दिदों में दोनों का संयोग होगा ?

उत्तर—$९+\frac{३}{८}$ दिन

(२०) नगर में पुलिस की टुकड़ियाँ गस्त लगा रही थी। एक ने टुकड़ी के एक जवान से पूछा कि आप सब कितने हैं ? जवान ने उत्तर दिया कि हम इस टुकड़ी में जितने हैं उसके दूने आगे जा चुके हैं और तीनगुने पीछे हैं और तीनों टुकड़ियों के योग का दशमांश पदाधिकारी हैं, हम सभी मिलाकर १९८ हैं तो जवान कितने थे और पदाधिकारियों की संख्या क्या थी ?

उत्तर—जवानों की संख्या=१८० पदाधिकारी=१८

(२१) दो अंकों की वह कौन सी संख्या है जिसमें एक स्थानीय का दश स्थानीय अंक आधा है और यदि उस संख्या में १० घटाते हैं तो एकस्थानीय का तृतीयांश दशस्थानीय हो जाता है तो संख्या बतलाइये—

उत्तर=३६

(२२) राम और श्याम को जो पैत्रिक सम्पत्ति रुपयों की थैली के रूप में मिली, राम ने उसमें से २० रुपये निकाल कर शेष का तृतीयांश ले लिया। श्याम ने अवशिष्ट का आधा लेकर शेष का तृतीयाँश भी ले लिया तो थैली में केवल ४० रुपये मात्र बचे तो बतलाइये थैली कितने रुपयों की थी और प्रत्येक ने कितने कितने रुपये लिए।

उत्तर—२०० रुपये।

राम और श्याम दोनों को अस्सी-अस्सी रुपये मिले।

(२३) राम ने अपनी पैत्रिक सम्पत्ति में से १०० रुपये घरेलू काम में लगा कर शेष को व्यापार से दूना कर लिया, पुनः २०० रुपये निकाल कर शेष को व्यापार में लगाकर दूना किया। इस प्रकार प्राप्त धन में से ४०० रुपये निकाल कर शेष को तीसरी बार भी दूना किया। इस तरह उसे अपने त्रिगुण

पैत्रिक मूलधन से एक सौ रुपये अधिक हो गये तो बताइये उसके पैत्रिक मूल-धन क्या थे ?

उत्तर--५०० रुपये

(२४) उन निकटवर्ती दोनों संख्याओं को बतलाइये जिनका वर्गान्तर १०१ है।

उत्तर--५०, ५१

(२५) त्रिकोणात्मक किला के तीनों फाटकों पर सिपाही तैनात थे, पहले फाटक पर डाकू जब पहुंचे तो फाटक के अधिकारी ने अन्य दोनों फाटकों से अपनी संख्या के बराबर बराबर सिपाही मंगवा लिए। सिपाहियों की बड़ी संख्या देखकर डाकू दूसरे फाटक पर गये। वहाँ के अधिकारी ने भी अपनी संख्या के बराबर बराबर दोनों फाटकों से सिपाही मंगवाए। डाकू लोग वहाँ भी अधिक सिपाही देखकर तीसरे फाटक पर पहुंचे वहाँ के अधिकारी ने भी अपनी संख्या के बराबर बराबर अन्य दोनों फाटकों से सिपाही मंगवा लेने पर तीनों फाटकों पर बराबर बराबर सिपाही दीख पड़े। तो आरम्भ में तीनों फाटक पर कितने कितने सिपाही थे ?

यर प्रश्न मैंने कुछ वर्ष पहले उत्तरमध्यमा परीक्षा में दिया था। उत्तर तो नहीं ही मिला साथ ही इसे बहुतों ने गलत करार दिया। अतः इसका उत्तर भी दे रहा हूं--

उत्तर—माना कि अन्तिम समय तीनों फाटकों पर बराबर २ सिपाहियों की संख्या = य।

विलोमगणित से दूसरे फाटक पर डाकुओं के पहुँचते ही शेष दो फाटकों से सिपाहियों के आजाने पर दूसरे फाटक पर की संख्या $य + \frac{य}{३} = \frac{४य}{३}$। तीसरे फाटक पर उस समय मात्र $\frac{य}{३}$ संख्यक सिपाही थे।

और प्रथम फाटक पर की संख्या भी $= य + \frac{य}{३} = \frac{४य}{३}$

प्रथम फाटकपर डाकुओं के पहुंचने पर द्वितीय तृतीय फाटकों से सिपाहियों के आ जाने पर संख्या =

$$\frac{४य}{३} + \frac{४य}{३ \times ३} = \frac{१६य}{९}।$$

उस समय दूसरे फाटक पर संख्या $= \frac{४य}{९}$

,, तीसरे फाटम पर $\frac{य}{३} + \frac{४य}{९} = \frac{७य}{९}$

अतः पहले फाटक पर डाकुओं के आने के पूर्व सिपाहियों की संख्या= $\frac{१६य}{२७}$

दूसरे फाटक पर $\frac{४य}{९}+\frac{१६य}{२७}=\frac{२८य}{२७}$

तीसरे फाटक पर $\frac{७य}{९}+\frac{१६य}{२७}=\frac{३७य}{२७}$

अतः डाकुओं के आने के पूर्व तीनों फाटकों पर मोजूद सिपाही क्रमशः

$\frac{१६य}{२७}, \frac{२८य}{२७}, \frac{य३७}{२७}$

सिपाही भिन्नांक नहीं हो सकते अतः य का मान, २७, ५४, ८१ आदि माने जा सकते अतः यदि य = २७ तो तीनों फाटकों पर सिपाही १६, २८, ३७

यदि य = ५४ तो तीनों फाटकों पर सिपाही ३२, ५६, ७४ इत्यादि। इन संख्याओं पर से आलाप आदि आसानी से घट जाते।

देवचन्द्रकृतबीजवासना
सद्विमर्शसुधयाऽभिषिञ्चिता।
एकवर्णजसमीकृतौ बुधैः
सद्विवेचनपरैर्विभाव्यताम् ॥

इति सविमर्शसुधाव्याख्योपेते भास्करीयबीजगणिते एकवर्णसमीकरणं समाप्तम्।

अथाऽव्यक्तवर्गादिसमीकरणम्

तच्च मध्यमाहरणमिति व्यावर्णयन्त्याचार्याः ।
यतोऽत्र वर्गराशावेकस्य मध्यमस्याहरणमिति ॥

अत्र सूत्रं वृत्तत्रयम्—

अव्यक्तवर्गादि यदाऽवशेषं पक्षौ तदेष्टेन निहत्य किञ्चित् ।
क्षेपं तयोर्येन पदप्रदः स्यादव्यक्तपक्षोऽस्य पदेन भूयः ॥ १ ॥
व्यक्तस्य मूलस्य समक्रियैवमव्यक्तमानं खलु लभ्यते तत् ।
न निर्वहेच्चेद्घनवर्गवर्गेष्वेवं तदा ज्ञेयमिदं स्वबुद्धया ॥ २ ॥
अव्यक्तमूलर्णगरूपतोऽल्पं व्यक्तस्य पक्षस्यपदं यदि स्यात् ।
ऋणं धनं तच्च विधाय साध्यमव्यक्तमानं द्विविधं क्वचित्स्यात् ।

यत्र पक्षयोः समशोधने सत्येकास्मिन् पक्षेऽव्यक्तवर्गादिकं स्यादन्यस्मिन् पक्षे रूपाण्येव तत्र द्वावपि पक्षो केनचिदेकेनेष्टेन तथा गुण्यौ भाज्यौ वा तथा किञ्चित् समं क्षेप्यं शोध्यं वा यथाऽव्यक्तपक्षो मूलदः स्यात् । तस्मिन् पक्षे मूलदे इतरपक्षेणार्थान्मूलदेन भवितव्यं यतः समौ पक्षौ, समयोः समयोगादौ समतैवेति । अतस्तत्पदयोः पुनः समीकरणेनाऽव्यक्तस्य मानं स्यात् । अथ यद्येवं कृते घनवर्गादिषु सत्सु कथञ्चिदव्यक्तपक्षमूलभावात् क्रिया न निर्वहति तदा बुद्धयैवाऽव्यक्तमानं ज्ञेयम् । यतो बुद्धिरेव पारमार्थिकं बीजम् । अथ यद्यव्यक्तपक्षमूले यानि ऋण रूपाणि तेभ्योऽल्पानि व्यक्तपक्षमूलरूपाणि स्युस्तदा तानि धनगतानि ऋणगतानि च कृत्वाऽव्यक्तमितिः साध्या, सा चैवं द्विधा भवति क्वचित् ।

सुधा—समशोधन के बाद एक में अव्यक्त वर्गादि और दूसरों में व्यक्त मात्र रहे तो दोनों पक्षों को किसी से गुणा, भाग, जोड़ या घटाव आदि करें जिससे समीकरण से अव्यक्त पक्ष का वर्गमूल मिले । फिर उसके साथ व्यक्त पक्ष के मूल का समीकरण करें तो अव्यक्त का मान निकल जायगा ।

यदि एक पक्ष में घन, वर्गवर्ग आदि रहने से वर्गमूलाभाव हो तो अपनी बुद्धि के अनुसार कल्पनया अव्यक्त का मान लावें ।

अव्यक्त पक्षीय ऋणात्मक रूप से व्यक्त पक्ष का मूल यदि न्यून हो तो

व्यक्तपक्षीय उस मूल को ऋण और धन दोनों मानकर कहीं-कहीं अव्यक्त का द्विविध मान का साधन करें।

वासना—पूर्वमेकवर्णसमीकरणे प्रथमपक्षेऽव्यक्तस्य स्थितेरव्यक्तगुणकाङ्कभक्तौ पक्षावेवाव्यक्तमानमानयत:। मध्यमाहरणेऽव्यक्तवर्गादीनां पूर्वपक्षे संस्थितेर्नहिपूर्वयुक्तयाऽव्यक्तमानमानेतुं शक्यमिति तदर्थमितरथा प्रयतितमाचार्यै:। अतोऽत्र मध्यमाहरणस्वरूपम् =

$$इ य^2 \pm इ' य = \pm व्य$$

$$\therefore य^2 \pm \frac{इ' य}{इ} = \pm \frac{व्य}{इ}$$

$$\therefore य^2 \pm \frac{इ' य}{इ} + \left(\frac{इ'}{२इ}\right)^2 = \left(\frac{इ'}{२इ}\right)^2 \pm \frac{व्य}{इ}$$

पक्षयोर्मूलग्रहणेन

$$य \pm \frac{इ'}{२इ} = \pm \sqrt{\left(\frac{इ'}{२इ}\right)^2 \pm \frac{व्य}{इ}} = मू.$$

अत्र यदि $य + \frac{इ'}{२इ} = \sqrt{\left(\frac{इ'}{२इ}\right)^2 + \frac{व्य}{इ}}$ तदैकमेव मानम्

अथ चेत् $य - \frac{इ'}{२इ} = \sqrt{\left(\frac{इ'}{२इ}\right)^2 - \frac{व्य}{इ}} = मू$

अत्रात्रशमव्यक्तमूलर्णगरूपतोऽल्पं व्यक्ताक्षरदं यतोऽव्यक्तपक्षीयर्णगरूपवर्गत: $\frac{व्य}{इ}$ विशोध्य शेषस्य पदं व्यक्तपक्षीयमूल मिति—स्फुटं दृश्यतेऽतोऽव्यक्तमूलर्णगरूपतोऽल्पमित्याद्युपपन्नम्।

अत्रापि स्थितिद्वयम् $य - \frac{इ'}{२इ} = \pm मू$

$\therefore य = \frac{इ'}{२इ} \pm मू$ अतो द्विविधं मानं युक्तमुक्तम्।

अथाऽत्र श्रीधराचार्यसूत्रानुसाराद् पक्षद्वयगुणने गौरवं भवति तदपेक्षयाऽव्यक्तवर्गाङ्कत: पक्षद्वयं विभज्य ततो मध्यस्थिताऽव्यक्तेर्यद्व्यक्ताङ्कमानं तदर्धं वर्गयोगेन लाघवात् पक्षद्वयं मूलदं भवतीति गणितज्ञानामतिस्पष्टम्।

उपरितनेयं वासना विशेषपदाभिधेयमहामहोपाध्यायपरमगुरुश्रीसुधाकरद्विवेदिकृता। वस्तुतो विशेषकृतवासनैव सर्वविधोपपत्तिजननीति बोध्यं विज्ञै:।

अथ श्रीधराचार्य सूत्रम् :—

"चतुराहतवर्गसमै रूपैः पक्षद्वयं गुणयेत् ।
अव्यक्तवर्गरूपैर्युक्तौ पक्षौ ततो मूलम् ॥"

सुधा—दोनों पक्षों को चतुर्गुणित अव्यक्तवर्गाङ्क से गुणकर अव्यक्ताङ्क के वर्ग तुल्य रूप दोनों में जोड़ दें, फिर दोनों पक्षों का मूल लें।

वासना—आलापानुसारतः पक्षौ

$य^2 गु + गु' य = व्य.$ । पक्षौ गुणभक्तौ तदा

$\therefore य^2 + \frac{गु'}{गु} य = \frac{व्य}{गु}$

$\therefore य^2 + \frac{गु'}{गु} य + \left(\frac{गु'}{२गु}\right)^2 = \frac{व्य}{गु} = \left(\frac{गु'}{२गु}\right)^2$ । पक्षौ $४+गु^2$ तो गुणितौ

तदा $४ गु^2 . य^2 + ४ गु. गु'. य + गु'^2 = ४ गु. व्य + गु'^2$

$\therefore ४ गु (गु य^2 + गु' य) + गु'^2 = गु'^2 + ४ गु व्य.$

अतः उत्पन्नं श्रीधराचार्य सूत्रम् --

उदाहरणम्

अलिकुलदलमूलं मालतीं यातमष्टौ
निखिलनवमभागाश्चालिनी भृङ्गमेकम् ।
निशि परिमललुब्धं पद्ममध्ये निरुद्धं
प्रतिरणति रणन्तं ब्रूहि कान्ते ! ऽलिसंख्याम् ॥१॥

अलिकुलप्रमाणम् = याव २ । एतदर्धमूलम् = या १ । निखिल-नवमभागा अष्टौ = याव $\frac{१६}{९}$ । मूलभागैक्यं दृष्टालियुगलयुतं राशि सममिति पक्षौ समच्छेदीकृत्य छेदगमे न्यासः

याव १८ या ० रु० ० ।
याव १६ या ९ रु० १८ ।

शोधने कृते जातौ पक्षौ

याव २ या $\dot{९}$ रु० ०
याव ० या ० रु० १८

एतावद्भिः संगुण्य तयोरेकाशीतिरूपाणि प्रक्षिप्य मूले गृहीत्वा तयोः समीकरणार्थं

न्यासः

या ४ रु० $\dot{९}$ ।
या० रु० १५ ।

प्राग्वल्लब्धं यावत्तावन्मानम् ६ । अस्य वर्गेणोत्थापिता जाताऽलिकुलसंख्या = ७२ ।

सुधा—भ्रमर कुल के आधे का मूल तुल्य संख्यक भौंरा मालती के पास और अष्टगुणित पूरे का नवमांश भी उसी के पास गया। एक भ्रमरी सुगन्ध लुब्ध, कमल के मध्य निरुद्ध एक गूंजते भौंरे के लिए शब्द कर रही है, तो भौंरों की संख्या क्या है, बताओ।

उदाहरण

माना कि अलिकुल प्रमाण = $२ य^2$

प्रश्नानुसार $\sqrt{\frac{२य^२}{२}}+\frac{२य^2\times ८}{९}+२=२य^2$

$\therefore \frac{२य^2\times ८}{९}+य+२=२य^२$

वा $\frac{१६य^2}{९}+य+२=२य^२$

समच्छेद करने पर

$\frac{१६य^२+९य+१८}{९}=२य^२$

$\therefore १६य^2+९य+१८=१८य^2$

पक्षान्तरनयन से

$१८ = २य^२ - ९ य$

$\therefore ३६ = ४य^२ - १८ य$

$३६+\frac{८१}{४} = ४य^2 - १८ य + \frac{८१}{४}$

पक्षों के वर्गमूल लेने पर

$\sqrt{\frac{१४४+८१}{४}} = \sqrt{४य^२ - १८य+\frac{८१}{४}}$

$\sqrt{\frac{२२५}{४}} = २ य - \frac{९}{२}$

$\therefore \pm\frac{१५}{२}=२य-\frac{९}{२}$

$\therefore २य = \frac{९}{२}\pm\frac{१५}{२}=\frac{२४}{२}=१२,$ या $-\frac{६}{२}$

$\therefore य = ६$ या $य = -\frac{३}{२}$

अलिकुलमान में उत्थापन देने पर

अलिकुल = $२य^२$ = ७२ या $२य^२ = \frac{९}{२}$

द्वितीय मान अनुपयुक्तता के कारण अग्राह्य है। अथवा गुणनखण्ड के सहारे उपर्युक्त :—

$४ य^२ - १८ य = ३६$

$\therefore २य^2 - ९ य - १८ = ०$

वा $२य^2 - १२य + ३य - १८ = ०$

वा $२ य (य - ६) + ३ (य - ६) = ०$

या $(२ य + ३) (य - ६) = ०$

∴ पूर्वपक्षीय दोनों खण्डों में से कोई भी शून्य हो सकता है।

अतः $य - ६ = ०$ हो तो

$य = ६$

या $२ य + ३ = ०$ हो तो $य = - \frac{३}{२}$।

अतः अलिकुल प्रमाण = ७२ या $\frac{९}{२}$।

अथवा अलिकुल प्रमाण = य

प्रश्नानुसार—

$$\sqrt{\frac{य}{२}} + \frac{८य}{९} + २ = य$$

$$\sqrt{\frac{य}{२}} = य - \frac{८ य}{९} - २ = \frac{य - १८}{९}$$

दोनों पक्षों के वर्ग करने पर

$$\frac{य}{२} = \frac{य^२ - ३६ य + ३२४}{८१}$$

$$\therefore ८१य = २य^२ - ७२य + ६४८$$

$$\therefore -६४८ = २य^२ - ७२य - ८१य$$

$$= २य^२ - १५३य$$

$$\therefore -१२९६ = ४य^२ - ३०६य$$

दोनों पक्षों में $\left(\frac{१५३}{२}\right)^2$ जोड़ने पर

$$-१२९६ + \left(\frac{१५३}{२}\right)^२ = ४य^२ - ३०६ य + \left(\frac{१५३}{२}\right)^२$$

$$\therefore -१२९६ + \frac{२३४०९}{४} = ४य^२ - ३०६य + \left(\frac{१५३}{२}\right)^२$$

$$-\frac{५१८४+२३४०६}{४} = ४य^2 - ३०६ य + \left(\frac{१५३}{२}\right)^2$$

$$\therefore \frac{१८२२५}{४} = ४य^2 - ३०६ य + \left(\frac{१५३}{२}\right)^2$$

पक्षों के वर्गमूल लेने पर

$$\pm\frac{१३५}{२} = २ य - \frac{१५३}{२}$$

$$\therefore २ य = \frac{१५३}{२} \pm \frac{१३५}{२} = \frac{२८८}{२} \text{ या } \frac{१८}{२}$$

$$\text{अत: अलिकुल} = य = \frac{२८८}{४} = ७२$$

$$\text{वा } \frac{१८}{४} = \frac{९}{२}$$

किन्तु दूसरा मान अनुपयुक्त होने के कारण ग्राह्य नहीं है।

वस्तुत: वर्ग समीकरण में सर्वत्र दो मान आते हैं। लोक में ऋण मान के अनुपपन्न होने के कारण आचार्य ने उसे उपेक्षणीय कहा है। यहाँ अलिकुल भिन्नात्मक नहीं हो सकता अत: $\frac{९}{२}$ को अग्राह्य मैंने कहा है।

उदाहरणम्

पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो रणे सन्दधे
तस्यार्धेन निवार्य तच्छरगणं मूलैश्चतुर्भिर्हयान् ।
शल्यं षड्भिरथेषुभिस्त्रिभिरपिच्छत्रं ध्वजं कार्मुकं
चिच्छेदास्य शिरःशरेण कति ते यानर्जुनः सन्दधे ।।२।।

अत्र वाणसंख्या = याव १। अस्यार्धम् = याव $\frac{१}{२}$। चतुर्गुणितानि मूलानि या ४। व्यक्तमार्गणगणः — रु १०। एषामैक्यस्य याव १ समं कृत्वा लब्धयावत्तावन्मानेन १० उत्थापिता जाता वाण संख्या = १००

सुधा :—कर्ण के बध के लिए क्रुद्ध अर्जुन ने जिन शरों को धारण किया उनके आधे से कर्ण के शरों को रोककर, चतुगुणित शरमूल से उनके घोड़ों को, छे शरों से शल्य (सारथि) को मारा। तीन शरों से कर्ण के छत्र, ध्वज और धनुष को और एक शर से उसके सिर को काट डाला, तो बतलाइए कि पार्थ ने कितने शरों को धारण किया था ?

उदाहरण :—शर प्रमाण $=$ य^2,

प्रश्नानुसार $\frac{य^2}{२} + ४ य + १० = य^2$

$\therefore \frac{य^२ + ८ य + २०}{२} = य^२$

$\therefore य^२ + ८ य + २० = २ य^२$

$\therefore २० = य^२ - ८ य$

$\therefore ३६ = य^2 - ८ य + १६$

दोनों पक्षों के मूल ग्रहण करने पर

$\pm ६ = य - ४$

$\therefore य = १०$ वा -२

ऋणात्मक मान यहाँ अग्राह्य है।

अथवा उपर्युक्त $य^२ - ८ य = २०$

या $य^2 - ८ य - २० = ०$

गुणनखण्ड निकालने पर

या $य^२ - १० य + २ य - २० = ०$

या $य (य - १०) + २ (य - १०) = ०$

या $(य - १०) (य + २) = ०$

अतः $य = १०$ वा $य = -२$।

अथवा शर प्रमाण $=$ य

फिर प्रश्नानुसार—

$\frac{य}{२} + ४\sqrt{य} + १० = य$

$\therefore ४\sqrt{य} = \frac{य}{२} - १० = \frac{य - २०}{२}$

पक्षों के वर्ग करने पर;

$१६ य = \frac{य^2 - ४० य + ४००}{४}$

$६४ य = य^2 - ४० य + ४००$

पक्षान्तरनयन से

$\therefore -४०० = य^2 - १०४ य$

दोनों पक्षों में (५२)^2 जोड़ने पर

२७०४ − ४०० = य^2 − १०४ य + २७०४

य^2 − १०४ य + २७०४=२३०४

दोनों पक्षों के मूल ग्रहण करने पर

य − ५२ = ± ४८

∴ य=१०० वा ४

दूसरा मान यहाँ अग्राह्य है क्योंकि १० तो यहाँ दृश्य ही है फिर १० से कम कैसे शर हो सकते ?

अथवा गुणन खण्ड निकालने की विधि के सहारे भी 'य' का मान पूर्ववत् समझना।

उदाहरणम्

व्येकस्य गच्छस्य दलं किलादि-
रादेर्दलं तत्प्रचयः फलञ्च।
चयादिगच्छाभिहतिः स्वसप्त—
भागाधिका ब्रूहि चयादिगच्छान् ।। ३ ।।

अत्र गच्छः=या ४ रु १। आदिः=या २। प्रचयः= या १ एषां घातः स्वसप्तभागाधिकः=या घ ६४/७ याव १६/७। फलमिदं "व्येकपदघ्न चय" इति श्रेढीगणितस्यास्य याघ ८ याव १० या २ सम मिति पक्षौ यावत्तावताऽपवर्त्य समच्छेदीकृत्य छेदगमे शोधने च कृते जातौ पक्षौ याव ८ या ५४ रु ०। एतयोरष्टगुणयोः सप्तविंशतिवर्गयुतयो

याव ० या ० रु १४।

मूले
या ८ रु २७।
या ० रु २९।

पुनरनयोः समीकरणेनाप्तयावत्तावन्मानेन ७ उत्थापिता आद्युत्तरगच्छाः=१४, ७, २९।

सुधा—जहाँ एकोन गच्छ का आधा आदि, आदि का आधा चय और अपने सप्तमांश से अधिक चय आदि, गच्छ का घात फल है वहाँ चय, आदि, गच्छों को बतलाइये।

उदाहरण

कल्पित गच्छ=४य+१

अतः प्रश्नानुसार—आदि=२ य और च=१य

$$च \times आ \times ग + \frac{च\ आ.\ ग}{७} = फल$$

अतः $फल = य \times २ य \times (४ य + १) + \frac{य \times २ य (४ य + १)}{७} =$

$$२ य^2 (४ य + १) + \frac{२ य^2 (४ य + १)}{७} =$$

$$८ य^3 + २ य^2 + \frac{८ य^3 + २ य^2}{७} =$$

$$\frac{५६ य^3 + १४ य^2 + ८ य^3 + २ य^2}{७} =$$

$$\frac{६४ य^3 + १६ य^2}{७} = श्रेढीफल ।$$

'व्येकपदघ्नचयो मुखयुक्' इत्यादि के अनुसार भी श्रेढीफल ला रहा हूं--

$(ग - १)\, च + आ = अन्त्यधन =$

$४ य \times य + आ = ४ य^2 + २ य = अंध$

$$\frac{अंध + आ}{२} = मध्यधन = \frac{४ य^2 + २य + २ य}{२}$$

$$= \frac{४ य^2 + ४ य}{२}\ २ य^2 + २ य = म.ध.$$

$पद \times मध्यधन = (४ य + १)(२ य^2 + २ य)$

$= ८ य^3 + ८ य^2 + २ य^2 + २ य =$

$८ य^3 + १० य^2 + २ य = श्रेढ़ीफल ।$

दोनों फलों के समीकरण से

$$\frac{६४ य^3 + १६ य^2}{७} = ८ य^3 + १० य^2 + २ य$$

$\therefore ६४ य^3 + १६ य^2 = ५६ य^3 + ७० य^2 + १४ य$

दोनों पक्षों में य से अपवर्त्तन देने पर

$६४ य^2 + १६ य = ५६ य^2 + ७० य + १४$

पक्षान्तरनयन से

$८ य^2 - ५४ य = १४$

$\therefore १६ य^2 - १०८ य = २८$

$$\therefore १६ य^2 - १०८ य + \left(\frac{२७}{२}\right) = २८ + \left(\frac{२७}{२}\right)^2$$

दोनों पक्षों के मूलग्रहण करने पर

$$४य - \frac{२७}{२} = \sqrt{\frac{८४१}{४}} = \pm \frac{२९}{२}$$

$$\therefore ४य = \frac{२७}{२} \pm \frac{२९}{२} = २८, \text{ वा } १$$

$$\therefore य = \frac{२८}{४} = ७ \quad \text{वा} - \frac{१}{४} =$$

अतः गच्छ = २९	दूसरे मान से	
आदि = १४	ग = ०	
चय = ७	आ = ०	अग्राह्य
	चय = ०	

अथवा गुणन खण्ड के सहारे—

उपर्युक्त $८य^2 - ५४य = १४$

$$\therefore ८य^2 - ५४य - १४ = ०$$

$$\text{वा } ८य^2 - ५६य + २य - १४ = ०$$

$$\text{वा } ८य(य - ७) + २(य - ७) = ०$$

$$\therefore (८य + २)(य - ७) = ०$$

$$\therefore य = ७ \text{ वा } य = -\frac{१}{४} ।$$

अथवा गच्छप्रमाण 'य' मात्र मानने पर भी गच्छादि का मान पूर्वोक्त ही आते हैं जैसा कि—

मान लिया कि गच्छ = य

$$\text{अतः आदि} = \frac{य - १}{२}$$

$$\text{चय} = \frac{य - १}{४}$$

$$\text{च} \times \text{आदि} \times \text{गच्छ} = \frac{य - १}{४} \times \frac{य - १}{२} \times य = \frac{य^3 - य^2 - य^2 + य}{८}$$

$$= \frac{य^3 - २य^2 + य}{८}$$

इसमें इसी के सप्तमांश जोड़ने पर

$$\frac{य^3 - २य^2 + य}{८} + \frac{य^3 - २य^2 + य}{८ \times ७} = \frac{८य^3 - १६य^2 + ८य}{५६}$$

$$\frac{य^3 - २य^2 + य}{७} = \text{श्रेढ़ी फल ।}$$

'व्येकेपदघ्नचयो मुखयुक् इत्यादि के अनुसार

$$\text{अन्त्य धन} = (य - १) \times \left(\frac{य - १}{४}\right) + \frac{य - १}{२}$$

$$= \left(\frac{य - १}{४}\right)^2 + \left(\frac{य - १}{२}\right) = \frac{य^2 - २य + १}{४} + \frac{य - १}{२}$$

$$= \frac{य^2 - २य + १ + २य - २}{४} = \frac{य^2 - १}{४} = \text{अं. ध.}$$

$$\text{अतः मध्य धन} = \frac{\text{अंध + आदि}}{२} = \frac{\frac{य^2 - १}{४} + \frac{य - १}{२}}{२}$$

$$= \frac{य^2 - १ + २य - २}{४ \times २} = \frac{य^2 + २य - ३}{८} = \text{म. ध.}$$

$$\text{म ध} \times \text{गच्छ} = \frac{(य^2 + २य - ३)य}{८} = \frac{य^3 + २य^2 - ३य}{८} =$$

= श्रेढ़ी फल।

दोनों श्रेढ़ी फलों के समीकरण से

$$\frac{य^3 - २य + १य}{७} = \frac{य^3 + २य^2 - ३य}{८}$$

'य' से भाग देने पर $\frac{य^2 - २य + १}{७} = \frac{य^2 + २य - ३}{८}$

$\therefore ८य^2 - १६य + ८ = ७य^2 + १४य - २१$

$\therefore य^2 - ३०य = - २९$

$\therefore य^2 - ३०य + २२५ = २२५ - २९ = १९६$ दोनों के वर्गमूल लेने से

$य - १५ = \pm १४$

$\therefore य = २९ = \text{गच्छ}$

$\therefore \frac{२९ - १}{२} = १४ = \text{आदि}$

$\therefore \frac{१४}{२} = ७ = \text{चय}$

ये सभी गच्छादि पूर्वानीत के समान ही है इनसे सभी आलाप घट जायगे-

उदाहरणम्

कः खेन विहृतो राशिराद्ययुक्तो नवोनितः
वर्गितः स्वपदेनाढ्यः खगुणो नवतिर्भवेत् ॥ ४ ॥

अत्र राशिः = या १ । अयं खहृतः = $\frac{\text{या १}}{०}$ अस्य खहरत्वं कल्पितमेव। आद्येन या १ युतो जातः या २। नवोनितः=या २ रु ९̇ । वर्गितः याव ४ या ३६̇ रु ८१। स्वपदेन या २ रु ९̇ युतो याव ४ या ३४̇ रु ७२ अयं शून्यगुणो नवतिसम इति शून्येन गुणने प्राप्ते 'शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेत्' इति पूर्वंशून्यो हर इदानीं गुणस्तस्मादुभयोर्गुणहरयोर्नाशः।

एवं पक्षौ $\begin{cases} \text{याव ४ या ३४̇ रु ७२।} \\ \text{याव ० या ० रु ९०।} \end{cases}$

समशोधनात्पक्षशेषे $\begin{cases} \text{याव ४ या ३४̇ रु ०।} \\ \text{याव ० या ० रु १८।} \end{cases}$

एतौ पक्षौ षोडशभिः संगुण्य चतुस्त्रिंशद्वर्गतुल्यानि रूपाणि प्रक्षिप्य मूले गृहीत्वा पक्षयोः शोधनार्थं

न्यासः $\begin{cases} \text{या ८ रु ३४̇ ।} \\ \text{या ० रु ३८।} \end{cases}$

उक्तवज्जातोराशिः = ९।

अथ 'वाद्ययुक्तोऽथवोनित' इति पाठे राशिः = या १ । खहृतः = $\frac{\text{या१}}{०}$। आद्येन या १ युक्तोनीकरणाय खहरत्वात् समच्छेदीकरणेन शून्येनैव युक्तोनितः स एव $\frac{\text{या १}}{०}$। वर्गितः $\frac{\text{याव १}}{०}$। स्वपदेनाढयः = $\frac{\text{याव१ या १}}{०}$। अयं खगुणः पूर्वं खहरत्वाद्गुणहरयोर्नाशे कृते जातः = याव १ या ०। अयं नवतिसम इति समशोधनार्थं

न्यासः $\begin{cases} \text{याव १ या १ रु ०।} \\ \text{याव ० या ० रु ९०।} \end{cases}$

समशोधने कृते पक्षाविमौ चतुर्भिः संगुण्य एकं क्षिप्त्वा मुले

| या २ रु १।
| या ० रु १९

समशोधनाज्जातः प्राग्वद्राशिः = ९॥

सुधाः—कौन सी वह राशि है जिसे शून्य से भाग देकर लब्धि में राशि को जोड़कर योगफल में नौ घटा देते हैं, पुनः उस वियोगफल के वर्ग में अपना मूल जोड़कर शून्य से गुणते हैं तो नब्बे होता है ?

उदाहरण— कल्पित राशि = य,

इसमें शून्य से भाग देने पर भी "खहरश्चिन्त्यः शेषविधौ" के अनुसार यथावत् रक्खा।

आद्ययुक्त करने पर $य + य = २य$,

नवोनित करने पर $= २य - ९$

वर्गित $= (२य - ९)^2 = ४य^२ - ३६य + ८१$।

स्वमूलयुक्त करने से $४य^2 - ३६य + ८१ + २य - ९ =$

$४य^2 - ३४य + ७२$। यह प्रश्नानुसार नब्बे के बराबर है,

अतः $४य^2 - ३४य + ७२ = ९०$

$\therefore ४य^२ - ३४य = १८$

दोनों पक्षों में $\left(\frac{१७}{२}\right)^2$ जोड़ देने पर

$$४य^2 - ३४य + \left(\frac{१७}{२}\right)^2 = १८ + \frac{२८९}{४} = \frac{३६१}{४}$$

दोनों पक्षों के मूल लेने पर

$$२य - \frac{१७}{२} = \pm\frac{१९}{२}$$

$$\therefore २य = \pm\frac{१९}{२} + \frac{१७}{२} = १८, \text{ वा } -१,$$

$$\therefore य = ९ \text{ वा } -\frac{१}{२}$$

अथवा गुणनखण्ड के सहारे उपर्युक्त $४य^2 - ३४य = १८$ में पक्षान्तरनयन से $४य^2 - ३४य - १८ = ०$।

$\therefore ४य^2 - ३६य + २य - १८ = ०$।

या $४य(य - ९) + २(य - ९) = ०$।

वा $(४य + २)(य - ९) = ०$।

अतः $य = ९$ या $य = -\frac{१}{२}$

'आद्ययुक्तोऽथवोनितः' पाठ रहनेपर भी राशि = य। खहर होने पर $= \frac{य}{०}$

$$\text{वर्गितः} = \frac{य^2}{०}$$

स्वपदयुक्त करने पर $\frac{य^2}{०} + \frac{य}{०} = \frac{य^2 + य}{०}$

खगुण करने पर $य^2 + य$। इसे नब्बे के समान किया तो

$य^2 + य = ९०$

$\therefore ४य^2 + ४य = ३६०$

$\therefore ४य^2 + ४य + १ = ३६१$

मूल लेने पर

$२ य + १ = \pm १९$

$\therefore २ य = \pm १९ - १ = १८, वा - २०$

$\therefore य = ९ वा - १०$

गुणनखण्ड के सहारे यहाँ भी य का मान पूर्ववत् समझना।

उदाहरणम्

कः स्वार्धसहितो राशिःखगुणो वर्गितो युतः।
स्वपदाभ्यां खभक्तश्च जातः पञ्चदशोच्यताम् ॥५॥

अत्र राशिः=या १। अयं स्वार्णयुक्तः=या $\frac{३}{२}$। खगुणः खं न कार्यः किन्तु खगुण एव चिन्त्यः शेषविधौ कर्त्तव्ये या $\frac{३}{२}$। वर्गितः=याव $\frac{९}{४}$। स्वपदाभ्यां या ३ युतो जातः $\frac{याव ९ या १२}{४}$। अयं खभक्तः अत्रापि प्राग्वद् गुणहरयोस्तुल्यत्वान्नाशे कृतेऽविकृतो राशिः। तच्च पञ्चदश समंकृत्वा समच्छेदीकृत्य छेदगमे शोधनाज्जातौ पक्षौ:—

याव ९ या १२ रु ०
या व० या० रु ६०

एतौ चतुर्युतौ कृत्वा मूले गृहीत्वा पुनः समशोधनाल्लब्धं यावत्ता-वन्मानम्=२

तथा चास्मत्पाटीगणिते

"खहरः स्यात् खगुणः खं खगुणश्चिन्त्यश्च शेषविधौ।
शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेत् पुनस्तदा राशिः॥
अविकृत एव विचिन्त्यः सर्वत्रैवं विपश्चिद्भिः।"

सुधाः—कौन सी राशि है जिसमें अपना आधा जोड़ने के बाद शून्य से गुणाकर वर्गित कर देते पुनः उसमें द्विगुण अपना पद जोड़ कर शून्य से भाग देते तो पन्द्रह होते हैं, उसे कहो :—

उदाहरण—

कल्पित राशि मान = य प्रश्नानुसार

$य + \frac{य}{२} = \frac{३ य}{२}$। इसे शून्य से गुणा करने पर शून्य हो जायगा

किन्तु "खगुणश्चिन्त्यः शेषविधौ' के अनुसार शून्य का गुणन वास्तविक न होकर चिन्तनमात्र रहेगा। अतः खगुण के बाद भी $\frac{३ य}{२}$ ही रहा। वर्गित करने पर $\frac{९ य^2}{४}$ इसमें द्विगुण इसका पद अर्थात् $\frac{३ य}{२} \times २ = ३ य$

जोड़ दिया तो $\frac{९ य^2}{४} + ३ य = \frac{९ य^2 + १२ य}{४}$।

इसे शून्य से भाग देने पर प्रथमोक्त शून्य गुणक के कट जाने के कारण यथावत् रह गया $= \frac{९ य^2 + १२ य}{४}$।

यह प्रश्नानुसार पन्द्रह के बराबर है।

$$\therefore \frac{९ य^2 + १२ य}{४} = १५$$

$$\therefore ९ य^2 + १२ य = ६०$$

दोनों पक्षों में '४' जोड़ने पर

$$९ य^2 + १२ य + ४ = ६४$$

पक्षद्वय के मूल ग्रहण करने पर

$$३ य + २ = \pm ८$$

$$\therefore ३ य = ६ \quad \therefore य = २ \text{ या } य = -\frac{१०}{३}$$

अतः २ ही राशि है जिसे खगुणादि पूर्वोक्त क्रिया करने पर १५ होते हैं। अथवा गुणनखण्ड के सहारे उपर्युक्त ($९ य^2 + १२ य = ६०$) में पक्षान्तरनयन से $९ य^2 + १२ य - ६० = ०$।

पक्षों में ३ से भाग देने पर $= ३ य^2 + १० य - ६ य - २०$।

या $३ य (य - २) + १० (य - २) = ०$

$(३ य + १०) (य - २) = ०$।

अतः $य = २$ वा $य = -\frac{१०}{३}$

उदाहरणम्

राशिर्द्वादशनिघ्नो राशिघनाढ्यश्च कः समो यः स्यात्
राशिकृतिः षड्गुणिता पञ्चत्रिंशद्युता विद्वन् ॥६॥

अत्र राशिः = या १। अयं द्वादशगुणितो राशिघनाढ्यश्च याघ १ या १२। अयं याव ६ रु ३५ अनेन सम इति शोधने कृते जातमाद्यपक्षे याघ १ याव ६̇ या १२।

अन्यपक्षे रु १५। अनयोः ऋणरूपाष्टकं प्रक्षिप्य घनमूले –

| या १ रु २̇। पुनरनयोः समीकरणेन जातो—
| या ० रु ३।

राशिः = ५।

सुधा—कौन सी राशि हैं जिसे द्वादशगुणित करके गुणन फल में राशि का घन जोड़ देते तो वह पञ्चत्रिंशद्युक्त षड्गुणित राशिवर्ग के बराबर होता है।

उदाहरण

कल्पित राशि = य

प्रश्नानुसार $१२ य + य^3 = ६ य^2 + ३५$

$\therefore य^3 - ६ य^2 + १२ य = ३५$

दोनों पक्षो में ८ घटाने पर

$य^3 - ६ य^2 + १२ य - ८ = ३५ - ८ = २७$।

दोनों पक्षों के घन मूल लेने पर

$य - २ = ३$

$\therefore य = ३ + २ = ५$

यही राशि है जिसमें उपर्युक्त क्रिया करने पर अर्थात् $१२ \times ५ + (५)^3 = २५ \times ६ + ३५$ होता है।

प्रथम पक्ष = १८५, दूसरे पक्ष भी = १८५।

उदाहरणम्

कोराशिर्द्विशतीक्षुण्णो राशिवर्गयुतो हतः।
द्वाभ्यां तेनोनितो राशिर्वर्गवर्गोऽयुतं भवेत्।
रूपोनं वद तं राशिं वेत्सि बीजक्रियां यदि ॥७॥

अत्र राशिः = या १। द्विशतीक्षुण्णः = २००। राशिवर्गयुतो जातः याव १ या २०० अयं द्वाभ्यां गुणितः = या २ या ४००। अनेनायं यावत् १ राशिवर्गवर्ग ऊनितो जातः=यावव १ याव २̇ या ४००̇। अयं रूपोनायुत सम इति समशोधने कृते जातौ पक्षौ—

यावव १ याव २̇ या ४०० रु०

यावव ० याव ० या ० रु० ९९९९।

अत्राद्यपक्षे किल यावत्तावच्चतुः शतीं रूपाधिकां प्रक्षिप्य मूलं लभ्यते परं तावति क्षिप्ते नान्यपक्षस्य मूलमस्ति एवं क्रिया न निर्वहति। अतोऽत्र स्वबुद्धिः।

इह पक्षयोर्यावत्तावद्वर्गचतुष्टयं यावच्चतुः शतीं रूपं च प्रक्षिप्य

मूले याव १ या ० रु० १।
याव ० या २ रु० १०० :

पुन रनयोः समीकरणेन प्राग्बल्लब्धं यावत्तावन्मानम् ११। इत्यादि बुद्धिमता ज्ञेयम्॥

सुधा—कौन सी राशि है जिसे दो सौ से गुणा कर गुणनफल में राशिवर्ग जोड़ देते हैं और योग को दो से गुणते हैं गुणन फल को राशि के चतुर्घात में घटाते हैं तो रूपोन एक अयुत (१००००) के समान होता है ?

उदाहरण

कल्पित राशि = य।

प्रश्नानुसार (य × २०० + य^2) × २

= २ य^2 + ४०० य। इसे राशिवर्ग वर्ग (य^4) में घटाया तो शेष = य^4 − २ य^2 − ४०० य = ९९९९ = रूपोय एक अयुत

पक्ष द्वय में ४ य^2 जोड़ने पर

य^4 − २ य^2 − ४०० य + ४ य^2 = ४ य^2 + ९९९९

∴ य^4 + २ य^2 − ४०० य = ४ य^2 + ९९९९

∴ य^4 + २ य^2 = ४ य^2 + ४०० य + ९९९९;

∴ य^4 + २ य^2 + १ = ४ य^2 + ४०० य + १००००

पक्ष द्वय के मूल लेने पर

य^2 + १ = २ य + १००

∴ य^2 − २ य + १ = १००

पुनः पक्षद्वय के मूल लेने पर

य − १ = ± १०

∴ य = ११, वा − ९

'य' मान ११ से समस्त आलाप घट जाता है।

किन्तु य = − ९ यदि मानते हैं तो आलाप =

− ९ × २०० = − १८०० । − १८०० + ८१ = − १७१९ ।

− १७१९ × २ = − ३४३८

(− ९)^4 = ६५६१ ।

६५६१ − (− ३४३८) = ६५६१ + ३४३८ = ९९९९ ।

अतः दोनों मानों से आलाप घट जाता है।

उदाहरणम्

वनान्तराले प्लवगाष्टभागः
सम्वर्गितो वल्गति जातरागः।
फूत्कारनादप्रतिनादहृष्टा
दृष्टा गिरौ द्वादश ते कियन्तः॥ ८ ॥

अत्र कपियूथम्=या १। अस्याष्टांशवर्गो द्वादशयुतो यूथसम इति पक्षौ—

$$\frac{\text{याव १ या ० रु ७६८}}{\text{६४}}$$

याव ० या १ रु ०।

एतौ समच्छेदीकृत्य छेदगमे शोधने च कृते जातौ पक्षौ

याव १ या ६४̇ रु ०

याव ० या ० रु ७६८̇

इह पक्षयोर्द्वात्रिंशद्वर्गं १०२४ प्रक्षिप्य मूले

या १ रु ३२̇।

या ० रु १६।

अत्राऽव्यक्तरूपेभ्योऽल्पानि व्यक्तपक्षरूपाणि सन्ति तानि धनमृणं च कृत्वा लब्धं द्विविधंयावत्तावन्मामम् ४८, १६॥

सुधा—घने जंगल में समूह के अष्टमांश के वर्ग के बराबर बन्दरों का एक दल प्रेमासक्त होकर बातें कर रहा है। शेष १२ बन्दर आपसी फुफकार के नाद प्रतिनाद से परम प्रसन्न पहाड़ पर दीख पड़े तो बन्दरों की संख्या क्या है ?

उदाहरण

बन्दरों की कल्पित संख्या = य

प्रश्नानुसारः— $\left(\frac{\text{य}}{\text{८}}\right)^2 + \text{१२} = \text{य}$

अतः $\frac{\text{य}^2}{\text{६४}} + \text{१२} = \text{य}$

छेदगम तथा पक्षान्तरनयन से

$\therefore \text{य}^2 + \text{७६८} = \text{६४ य}$

एवम् $\text{य}^2 - \text{६४ य} = -\text{७६८}$

वा   य^2 − ६४ य + (३२)^2 = − ७६८ + १०२४ = २५६

दोनों पक्षों के मूल ग्रहण से

य − ३२ = $\sqrt{\text{२५६}}$ = ± १६

∴ य = ४८ या १६

यहाँ दोनों मान ग्राह्य हैं

दोनों से आलाप घट जाता है। जैसा कि

$\left(\frac{\text{४८}}{\text{८}}\right)^2$ = ३६ । ३६+१२=४८

अथवा

$\left(\frac{\text{१६}}{\text{८}}\right)$ =४ । ४+१२=१६

अथवा

गुणावयव (Factor) के द्वारा आसानी से दोनों मान निकल आते हैं।

जैसा कि उपर्युक्त समीकरण—य^2 − ६४ य = − ७६८ ।

य^2 − ६४ य + ७६८ = ०

∴ य^2 − १६ य − ४८ य+७६८ = ०

गुणावयव के द्वारा

य (य − १६) − ४८ (य − १६) = ०

वा   (य − ४८) (य − १६)=०

∴ य=४८ वा य=१६

उदाहरण :—

यूथात्पञ्चांशकस्त्र्यूनो वर्गितो गह्वरं गतः ।
दृष्टः शाखामृगः शाखामारूढो वद ते कति ।। ९ ।।

अत्र यूथ प्रमाणम् = या १ । अत्र पञ्चांशकस्त्र्यूनः = $\frac{\text{या १ रु १५}\dot{}}{\text{५}}$

वर्गितः = $\frac{\text{याव १ या ३०}\dot{}\text{ रु २२५}}{\text{२५}}$,

एतद् दृष्टेन युतः = $\frac{\text{याव १ या ३०}\dot{}\text{ रु २५०}}{\text{२५}}$,

यूथसम इति पक्षौ समच्छेदीकृत्य छेदगमे शोधने च कृते जातौ:—

| याव १ या ५५˙ रु० ।
| याव ० या ० रु २५०˙ ।

एतौ चतुर्भिः संगुण्य पञ्चपञ्चाशद् बर्गं ३०२५ प्रक्षिप्य मूले

| या २ रु ५५ ।
| या ० रु ४५ ।

अत्रापि प्राग्वल्लब्धं द्विविधं मानम् = ५०, ५ ।

द्वितीयमत्र न ग्राह्यमनुपपन्नत्वात् नहि व्यक्ते ऋणगते लोकस्य प्रतीतिरस्तीति ॥

सुधा :—समुदाय के पञ्चमांश में तीन घटाने से जो शेष, उसके वर्ग के तुल्य बन्दर कन्दरा में चला गया और एक बन्दर पेड़ की शाखा पर चढ़ा दीखे तो बतलाइए बन्दरों की संख्या क्या थी ?

उदाहरणः—

समूह का मान = य,

$$\text{प्रश्नानुसार} \left(\frac{\text{य}}{५} - ३ \right)^२ + १ = \text{य}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{य} - १५}{५} \right)^२ + १ = \text{य},$$

$$\text{वा य}^2 - ३०\text{य} + २२५ + २५ = २५\text{य}$$

$$\text{अतः य}^2 - ३०\text{य} + २५० = २५\text{य} \cdots\cdots\cdots (१)$$

$$\text{वा } \text{य}^2 - ५५\text{य} = - २५०$$

$$\text{वा } \text{य}^2 - ५५\text{य} + \left(\frac{५५}{२} \right)^2 = - २५० + \frac{३०२५}{४}$$

$$\therefore \text{य}^2 - ५५\text{य} + \frac{३०२५}{४} = \frac{-१००० + ३०२५}{४} = \frac{२०२५}{४}$$

दोनों पक्षों के मूल लेने पर

$$\text{य} - \frac{५५}{२} = \pm \frac{४५}{२}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{१००}{२} = ५०$$

$$\text{वा य} = \frac{१०}{२} = ५$$

दोनों मान से आलाप मजे में घट जाते जैसा कि :—

$$\left(\frac{५०}{५} - ३ \right)^2 + १ = ४९ + १ = ५० ।$$

$$\text{वा} \left(\frac{५}{५} - ३ \right)^2 + १ = (- २)^2 + १ = ५$$

फिर भी ऋणात्मक बन्दर की लोक में अप्रतीति के कारण आचार्य ने द्वितीय मान ५ को अग्राह्य बतलाया है।

उपर्युक्त $य^2 - ५५य = - २५०$ में पक्षान्तरानयन से

$$य^2 - ५५य + २५० = ०$$
$$वा\ य^2 - ५०य - ५य + २५० = ०$$
$$य\ (य - ५०) - ५\ (य - ५०) = (य - ५) \times (य - ५०) = ०$$

अतः पूर्ववत् य = ५० या य = ५

उदाहरणम्–

कर्णस्य त्रिलवेनोना　द्वादशाङ्कुलशङ्कुभा।
चतुर्दशांगुला जाता गणक ! ब्रूहि तां द्रुतम् ॥ १० ॥

अत्र छाया = या । इयं कर्णत्र्यंशोना चतुर्दशाङ्गुला जाताऽतो वैपरीत्येनास्याश्चतुर्दश विशोध्य शेषं कर्णत्र्यंशः = या १ रु १४̇ । अयं त्रिगुणो जातः कर्णः = या ३ रु ४२̇ । अस्य वर्गः = याव ९ या २५२̇ रु १७६४ । कर्णवर्गेनानेन याव १ रु १४४ सम इति समशोधने कृते जातौ पक्षौ :—

| याव ८ या २५२̇ रु ० ।
| याव ० या ० रु १६२०̇ ।

एतौ पक्षौ द्वाभ्यां संगुण्य ऋणत्रिषष्टिवर्गं प्रक्षिप्य मूले।

| या ४ रु ६३̇ ।
| या ० रु २७ ।

पक्षयोः पुनःसमीकरणं कृत्वा प्राग्वल्लब्धं द्विविधं यावत्तावन्मानम्

$= \frac{४५}{२}$, ९ ।

उत्थापिते छाये च $\frac{४५}{२}$, ९ । द्वितीयच्छाया चतुर्दशभ्यो न्यूनाऽनुपपन्नत्वान्न ग्राह्याऽत उक्तं द्विविधं क्वचिदिति।

सुधा :—कर्ण के तृतीयांश को द्वादशाङ्गुल शङ्कुच्छाया में घटाते है तो चौदह अङ्गुल हो जाते तो गणक ? शङ्कुच्छाया का मान बतलाइए :—

उदाहरण :—

छाया प्रमाण = य

प्रश्नानुसार

$छा - \frac{क}{३} = १४$

$\therefore य - \frac{क}{३} = १४$

$\therefore ३य - क = ४५$

$\therefore ३य - ४२ = क$

$\therefore कर्ण^2 = ९य^2 - २५२य + १७६४$

एवम् $कर्ण^2 = (१२)^2 + य^2 = य^2 + १४४$

अत: दोनों कर्ण वर्गों के समीकरण से

$९य^2 - २५२य + १७६४ = य^2 + १४४$

$\therefore ८य^2 - २५२य = - १६२०$

वा $१६य^२ - ५०४य = - ३२४०$

दोनों पक्षों में $(६३)^२$ जोड़ देने पर

$१६य^२ - ५०४य + ३९६९ = ३९६९ - ३२४० = ७२९$ ।

दोनों पक्षों में मूलग्रहण से

$४य - ६३ = \pm २७$

$\therefore ४य = ६३ \pm २७ = ९०,$ वा ३६

$\therefore य = \frac{९०}{४}$ वा $\frac{३६}{४} = \frac{४५}{२}$, वा ९

यहाँ दूसरी छाया = ९, चूंकि १४ से अल्प है अत: उपयुक्त नहीं है ।

क्योंकि $\sqrt{(१२)^२ + (९)^२} =$ छा कर्ण

$= \sqrt{२२५} = १५ =$ कर्ण

$\frac{क}{३} = ५;$

$९ - ५ = ४$ यह १४ से अल्प है ।

प्रथम मान $\frac{४५}{२}$ से आलाप घट जाता है

यदि छा $= \frac{४५}{२}$ तदा कर्ण

$$\sqrt{१४४+\left(\frac{४५}{२}\right)^2}=\sqrt{\frac{५७६+२०२५}{४}}$$

$$\sqrt{\frac{२६०१}{४}}=\frac{५१}{२}=\text{कर्ण}$$

$$\therefore \frac{\text{कर्ण}}{३}=\frac{५१}{२\times ३}=\frac{१७}{२},$$

$$\frac{४५}{२}-\frac{१७}{२}=\frac{२८}{२}=१४$$

अतः साध्य सिद्ध हो गया।

अथवा गुणनखण्ड के सहारे

उपर्युक्त $८य^2 - २५२य = -१६२०$ में पक्षान्तरानयन से

$$८य^2 - २५२य + १६२० = ०।$$

$$\text{वा } २य^2 - ६३य + ४०५ = ० = २य^2 - १८य - ४५य + ४०५$$

$$\text{वा } २य(य-९) - ४५(य-९) = ०$$

$$\text{वा } (२य-४५)(य-९) = ०$$

$$\therefore य = ९$$

$$\text{या } य = \frac{४५}{२}$$

पद्मनाभबीजे :—

"व्यक्तपक्षस्य चेन्मूलमन्यपक्षर्णरूपतः।
अल्पं धनर्णगं कृत्वा द्विविधोत्पद्यते मितिः॥"

इति यत्परिभाषितं तस्य व्यभिचारोऽयम्

सुधा :—ग्रन्थकार का कहना है कि पद्नाभ बीज में कहा गया है कि व्यक्त पक्ष का मूल अन्य पक्षीय ऋण रूप से यदि अल्प हो तो उस मूल को धन ऋण मानकर द्विविध मान आते हैं। यह उनका कहना उपर्युक्त उदाहरण में व्यभिचरित हो गया, क्योंकि द्वितीय मान अनुपयुक्त हैं। इसी दृष्टि से भास्कर ने 'क्वचित्' शब्द का प्रयोग किया है।

उदाहरणम् :—

चत्वारो राशयः के ते मूलदा ये द्विसंयुताः।
द्वयोर्द्वयोर्यथासन्नघाताश्चाष्टादशान्विताः ॥ ११ ॥

मूलदाः सर्वमूलैक्यादेकादशयुतात्पदम् ।
त्रयोदश सखे जातं बीजज्ञ वद तान् मम ॥ १२ ॥

अत्र राशिर्येन युतो मूलदो भवति स किल राशिक्षेपः । मूलयोरन्तरवर्गेण हतो राशिक्षेपो वधक्षेपो भवति । तयो राश्योर्वधस्तेन युतोऽवश्यं मूलदः स्यादित्यर्थः । राशिमूलानां यथासन्नं द्वयोर्द्वयोर्वधा राशिक्षेपोना राशिवधमूलानि भवन्ति ।

अत्रोदाहरणे राशिक्षेपाद् वधक्षेपो नवगुणः, नवानां मूलं त्रयः अतस्त्र्युत्तराणि राशिमूलानि :—

या १ रु ० ।
या १ रु ३ ।
या १ रु ६ ।
या १ रु ९ ।

एषां द्वयोर्द्वयोर्वधा राशिक्षेपोनाः सन्तः राशिवधानामष्टादश युतानां मूलानि भवन्त्यत उक्तवधमूलानि—

याव १ या ३ रु २ ।
याव १ या ९ रु १६ ।
याव १ या १५ रु ५२ ।

एषां पूर्वमूलानां च सर्वेषां योगः—याव ३ या ३१ रु ८४ ।
इदमेकादशयुतं त्रयोदशवर्ग—याव ३ या ३१ रु ९५ ।
याव ० या ० रु १६९ ।

समं कृत्वा पक्षशेषं द्वादशभिः संगुण्य 'तयोरेकत्रिंशद्वर्गं ९६१ निक्षिप्य मूले—या ६ रु ३१ ।
या ० रु ४३ ।

पुनरनयोः समीकरणाल्लब्धेन यावत्तावन्मानेन २ अनेनोत्थापितानि राशिमूलानि २, ५, ८, ११ ।

एषां वर्गा राशयः क्षेपोना अर्थाद्राशयो भवन्ति २, २३, ६२, ११९ ।

अत्राद्यपरिभाषा—

"राशिक्षेपाद् वधक्षेपो यद्गुणस्तत्पदोत्तरम्
अव्यक्ता राशयः कल्प्या वर्गिता क्षेपवर्जिताः"

इयं कल्पना गणितेऽतिपरिचिता स्यात् ।

सुधा—वे कौन सी चार राशियां हैं जिनमें दो जोड़ने से मूलप्रद होती हैं। आसन्नवर्ती दो दो राशियों के गुणनफल में अठारह जोड़ने पर भी मूलद वे होती हैं।

सभी मूलों (राशिक्षेप या वधक्षेप से सम्बद्ध) के ऐक्य में एगारह जोड़ने तथा उसके वर्गमूल लेने पर तेरह होते तो हे मित्र ! उन चारों राशियों को मुझे बतलाओ।

आचार्य ने गद्य में कहा है कि जिनके जोड़ने से राशियाँ मूलद होती वे राशिक्षेप, और मूलद्वय के अन्तर वर्ग से गुणित राशिक्षेप वधक्षेप होता है। आसन्नवर्त्तीं दो दो राशि मूलों के घात में राशि शेष घटाने से राशियों के घात का मूल हो जाता है। पुनः उन्होंने आद्य परिभाषा के रूप में "राशिक्षेपाद्वधक्षेप" इत्यादि कहा है जिसका तात्पर्य है कि

राशिक्षेप से वधक्षेप यद्गुणित हो अर्थात् वधक्षेप में राशिक्षेप से भाग लेकर जो लब्धि आवे उसके मूल तुल्य अन्तर कर के अव्यक्त राशियाँ मानें जिनके वर्गों में राशिक्षेप घटाने से अभीष्ट चारो राशियाँ होगी।

इन उपर्युक्त नियम को दृष्टि में रख कर ही 'चत्वारो राशयः' आदि का गणित ज्ञेय है।

उदाहरण

प्रस्तुत उदाहरण में राशिक्षेप=२ वधक्षेप-१८ वधक्षेप में राशिक्षेप से भाग देने से लब्धि$=\frac{१८}{२}=९$। $\sqrt{९}=३$। अतः 'राशिक्षेपाद्वधक्षेप' इत्याद्यनुसार—चार (य, य+३, य+६, य+९) ये राशियाँ हैं जिनका क्रमशः वर्ग$=$ $य^२$, $य^२+६य+९$, $य^२+१२ य+३६$, $य^२+१८ य+८१$ ये हैं। इनमें राशि क्षेप घटाया तो चारों राशियाँ हुईं—(१) $य^२-२$ (२) $य^२+६ य+७$ (३) $य^२+१२य+३४$ (४) $य^२+१८ य+७९$।

ये ही वे चार राशियाँ हैं जिनमें राशि क्षेप जोड़ने से मूलद होते हैं और वे मूल क्रमशः उपर्युक्त य, य+३, य+६ और य+९ ये ही हैं।

यह सारी क्रिया "राशिक्षेपाद् वधक्षेपो यद्गुणस्तद पदोत्तरम्" अव्यक्ता राशयः ... ल्प्या वर्गिता क्षेपवर्जिताः" के अनुसार की है।

उदाहरणस्थ "द्वयोर्द्वयो र्यथासन्नघाताश्चाष्टादशान्विताः मूलदाः आदि कथनानुसार—

$$\sqrt{\text{प्रथम राशि} \times \text{द्वितीय राशि}+१८}$$
$$=\sqrt{(य^२-२)(य^२+६य+७)+१८}$$
$$=\sqrt{य^२(य^२+६य+७)-२(य^२+६य+७)+१८}$$

$= \sqrt{य^{४} + ६ य^{३} + ७ य^{२} - २ य^{२} - १२ य - १४ + १८}$

$= \sqrt{य^{४} + ६ य^{३} + ५ य^{२} - १२ य + ४}$

$= य^{२} + ३ य - २$

एवम् $\sqrt{\text{द्वि. रा.} \times \text{तृ. रा} + १८}$

$= \sqrt{(य^{2} + ६य + ७)(य^{2} + १२य + ३४) + १८}$

$= \sqrt{य^{2}(य^{2} + १२य + ३४) + ६य(य^{2} + १२य + ३४) + ७(य^{2} + १२य + ३४) + १८}$

$= \sqrt{य^{४} + १२य^{३} + ३४य^{२} + ६य^{3} + ७२य^{2} + २०४य + ७य^{2} + ८४य + २३८ + १८}$

$= \sqrt{य^{४} + १८य^{3} + ११३य^{2} + २८८य + २५६} = य^{२} + ९य + १६$

इसी तरह

$\sqrt{\text{तृ.रा} \times \text{च. रा} + १८}$

$= \sqrt{(य^{२} + १२य + ३४)(य^{2} + १८य + ७९) + १८}$

$= \sqrt{य^{४} + १८य^{3} + ७९य^{२} + १२य^{3} + २१६य^{२} + ९४८य + ३४य^{२} + ६१२य + २६८६ + १८}$

$= \sqrt{य^{४} + ३०य^{3} + ३२९ य^{2} + १५६०य + २७०४} = य^{2} + १२य + ५२$

अतः सर्वमूलैक्य = सातो मूलों का योग

$= य, + य + ३, + य + ६, + य + ९, + य^{2} + ३य - २, + य^{2} + ९य + १६ + य^{2} + १५य + ५२,$

$= ३य^{2} + ३१य + ८४$ ।

इसमें ११ जोड़कर मूल लेने से प्रश्नानुसार १३ होता है

अतः $\sqrt{३य^{2} + ३१य + ८४ + ११} = १३$

$\therefore ३य^{2} + ३१य + ९५ = १६९$

$\therefore ३य^{२} + ३१य = ७४$

$\therefore ९य^{2} + ९३य = २२२$

$\therefore ९य^{२} + ९३य + \left(\frac{३१}{२}\right)^{2} = २२२ + \left(\frac{३१}{२}\right)^{2}$

पक्षद्वय के मूल लेने से

$३य + \frac{३१}{२} = \sqrt{\frac{१८४९}{४}} = \frac{४३}{२}$

$३य = \frac{४३}{२} - \frac{३१}{२} = \frac{१२}{२} = ६$

$\therefore य = \frac{६}{३} = २$ ।

इससे उत्थापन देने पर चारों राशियाँ = २, २३, ६२, ११९, ये हुईं ।

अथवा गुणनखण्ड (Factor) के सहारे उपर्युक्त ($९य^२ + ९३य = २२२$) में पक्षान्तरानयन से $९य^२ + ९३य - २२२ = ०$ ।

$$३य^२ + ३१य - ७४ = ०$$
$$= ३य^2 - ६य + ३७य - ७४$$
$$\therefore ३य (य - २) + (य - २) ३७$$
$$\therefore (३य + ३७) (य - २) = ०$$
$$\therefore य = २,$$

प्रथम मूल = २
२ य मूल = ५
३ य मूल = ८
४ र्थ मूल = ११

} ये सभी मूल राशियों में द्विसंयुक्त करने से हुए है ।

वधक्षेप सम्बद्ध मूल :—

(१) $य^2 + ३य - २ = ८$

(२) $य^2 + ९य + १६ = ३८$

(३) $य^२ + ११य + ५२ = ८६$ ।

सर्वमूलैक्य = २ + ५ + ८ + ११ + ८ + ३८ + ८६ = १५८

इसमें ११ जोड़कर मूल लेने से $\sqrt{१६९} = १३$

अतः सभी आलाप भी घट गये ।

उपर्युक्त "राशिमूलानां यथासन्नं द्वयोर्द्वयोर्वधाः राशिक्षेपोना राशिवधमूलानि भवन्ति" तथा 'राशिक्षेपाद्वधक्षेप' इत्यादि की—

वासना:—तथा कल्प्येते 'राशी = $य^2 - क्षे$, $क^2 - क्षे$ यथा क्षेप युक्तौ तो मूलदौ ।

अतोऽत्र राशिक्षेपः = क्षे

मूलयोरन्तरवर्गेण हतोराशिक्षेपः =

$(य - क)^२ \times क्षे = य^२. क्षे - २ य क क्षे + क^२.क्षे$

अयं वधक्षेपः । यतो राश्योर्घातः एतेन युतो मूलदो भवति । तद्यथा राश्योर्घातः = $(य^२ - क्षे) (क^2 - क्षे)$

$= य^2.क^2 - य^2. क्षे - क्षे क^2 + क्षे^2$ ।

अयं क्षेपघ्नराशिमूलान्तरवर्गयुतः= $य^2.क^2 - य^2.क्षे - क्षे.क^2 + क्षे^२ + य^२ क्षे + क^२.क्षे - २ यक क्षे = य^२.क^२ - २ य.क.क्षे + क्षे^२$ अयं मूलदः ।

अस्य मूलम् = $\sqrt{य^२.क^२ - २ य.क.क्षे + क्षे^२} = य.क - क्षे$

अतो राशिमूलानां द्वयोर्द्वयोर्वधा राशिक्षेपोना राशिवधमूलानीति सूपपन्नम् ।

यतोऽत्र राशिक्षेप: = क्षे, वधक्षेप: = क्षे (य^2 – २ यक + क^2).

$\therefore \frac{\text{वक्षे}}{\text{क्षे}}$ = य^2 – २ य क + क^2 पक्षयोर्मूलग्रहणेन

$\sqrt{\frac{\text{व क्षे}}{\text{क्षे}}}$ = क – य = मूलान्तरम् ।

$\therefore$ य + $\sqrt{\frac{\text{व क्षे}}{\text{क्षे}}}$ = क ।

अतो "राशिक्षेपाद् वधक्षेपो यद्गुणस्तत्पदोत्तरम् अव्यक्ता राशय" इत्यन्त मुपपन्नम् यतो राशी = य^2 – क्षे, क^2 – क्षे अतो वर्गिता क्षेप वर्जिता इत्युक्तमिति सर्वं निरवद्यम् ।

उदाहरणम्—

क्षेत्रे तिथिनखैस्तुल्ये दोः कोटी तत्र का श्रुतिः ।
उपपत्तिश्च रूढस्य गणितस्यास्य कथ्यताम् ॥१३॥

अत्र कर्णः या १ । एतत् त्र्यस्रं परिवर्त्य यावत्तावत्कर्णो भूः कल्पिता । भुजकोटी तु भुजौ तत्र यो लम्बस्तदुभयतो ये त्र्यस्रे तयोरपि भुजकोटी पूर्वरूपे भवतः । अतस्त्रैराशिकं यदि यावत्तावति कर्णेऽयं १५ भुजस्तदा भुजतुल्ये कर्णे क इति लब्धो भुजः स्यात् । सा भुजाश्रिताऽऽबाधा = $\frac{२२५}{\text{या}}$ पुनर्यदि यावत्तावति कर्णे इयं २० कोटि स्तदा कोटितुल्ये कर्णे केति जाता कोटचाश्रिताबाधा = $\frac{४००}{\text{या १}}$ आबाधायुतिर्यावत्तावत्कर्णसमा क्रियते तावद् भुजकोटिवर्गयोगस्य पदं कर्णमानमुपपद्यते । अनेनोत्थापिते जाते आबाधे ९,१६ । ततो लम्बः = १२ । क्षेत्र दर्शनम्

अथाऽन्यथा वा कथ्यते कर्णः = या १ दोः कोटिघातार्धं त्र्यस्र-क्षेत्रस्य फलम् = १५० । एतद्विषमत्र्यस्रचतुष्टयेन कर्णसमं चतुर्भुजं-क्षेत्रमन्यत् कर्णज्ञानार्थं कल्पितम् ।

एवं मध्ये चतुर्भुजमुत्पन्नमत्र कोटिभुजान्तरसमं भुजमानम् = ५ । अस्य फलम् = २५ ।

भुजकोटिबधो द्विगुणस्त्र्यस्राणां चतुर्णां फलम् = ६०० । एत-द्योगः सर्वं वृहत्क्षेत्रफलम् = ६२५ एतद्यावत्तावद् वर्गसमं कृत्वा लब्धां कर्णमानम् = २५ यत्र व्यक्तस्य न पदं तत्रकरणीगतः कर्णः ।

सुधा—जिस (जात्य) क्षेत्र में १५, तथा २०, क्रमशः भुज तथा कोटि हैं वहाँ कर्ण क्या होगा ?

प्रसिद्ध इस गणित (भुज कोटि वर्ग योग कर्ण होता है) की उपपत्ति भी कहो ।

उदाहरणम्—

यहाँ कर्ण = य = आधार ।

भुज, तथा कोटि दोनों भुज है तो आधार सम्मुख कोण से आधार पर लम्ब करने से दो आबाधाएँ होगीं । लघ्वाबाधा = आ तथा वृहदाबाधा = आ' क्षेत्र स्थिति उपर्य्यंकित है । (पृ० २४६ देखें)

कर्ण पर शीर्ष कोण से लम्ब निपातन से जो दो जात्य बनते वे बड़े त्रिभुज के सजातीय होंगे । अतः अनुपात किया कि य तुल्य कर्ण में भुजतुल्य भुज तो भुजतुल्य कर्ण में क्या—

$\frac{\text{भु} \times \text{भु}}{\text{य}} = \frac{१५ \times १५}{\text{य}} = \frac{२२५}{\text{य}}$ = ल. आ.

एवम् 'य' तुल्य कर्ण में कोटि तुल्य कोटि तो कोटि तुल्य कर्ण में =

$\frac{\text{को} \times \text{को}}{\text{य}} = \frac{२० \times २०}{\text{य}} = \frac{४००}{\text{य}}$ = बृहदावाधा।

दोनों आवाधाओं का योग =

$\frac{२२५}{\text{य}} + \frac{४००}{\text{य}}$ = आधार = य

$\therefore \frac{२२५\text{य} + ४००\text{य}}{\text{य}^२} = \text{य}$

$\therefore ६२५\text{य} = \text{य} \times \text{य}^२$

$\therefore ६२५ = \text{य}^२$। मूल ग्रहण से

य = २५ = वर्ण।

अतः उत्थापन से लघ्वावाधा = $\frac{२२५}{२५} = ९$

बृहदावाधा = $\frac{४५०}{२५} = १६$

अतः लं = $\sqrt{\text{य}^2 - ९^2} = \sqrt{२२५ - ८१} = \sqrt{१४४}$

= १२।

प्रकारान्तर से भास्कराचार्य ने इसका उत्तर यों कहा है—

कल्पित कर्ण = य.।

त्रिभुज फ = $\frac{\text{भु} \times \text{को}}{२}$ = १५० $\therefore$ ४ त्रि फ = ६००

इस क्षेत्रफल वाले चार त्रिभुजों को ऐसा रक्खा कि एक चतुर्भुज (वर्ग क्षेत्र) बन जाय जिसका प्रत्येक भुज कर्ण के समान है और मध्य में एक और छोटा सा वर्ग क्षेत्र बना जिसका भुज कोटिभुजान्तर के तुल्य है।

उस छोटे वर्ग क्षेत्र का फल = २५

अतः योग = ६०० + ५ = ६२५, यह कर्ण सम भुज वाले क्षेत्र का फल। ६२५ = क्षे फ = य × य = $\text{य}^२$।

अतः य = $\sqrt{\text{य}^2} = \sqrt{६२५}$ = २५।

एतत्करणसूत्रं वृत्तम्

दोः कोट्यन्तरवर्गेण द्विघ्नो घातः समन्वितः ।
वर्गयोगसमः स स्याद् द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ।।१५।।

अथो लाघवार्थं दोःकोटिवर्गयोगस्य पदं कर्ण इत्युपपन्नम् तत्र तान्यपि क्षेत्रस्य खण्डान्यन्यथा विन्यस्य दर्शनम् ।

सुधा—दो अव्यक्त वर्णों की तरह भुज कोटि के अन्तर वर्ग से युक्त द्विगुण दोनों (भुज, कोटि,) का घात दोनों के वर्ग योग के बराबर होता है ।

वासना—वासनाऽस्य रेखागणितद्वितीयध्यायतोऽथवा $भु^2+को^2=भु^2-२\ भु.\ को+को^2+२\ भु\ को=(भु-को)^2+२,\ भु.\ को$

एतेनोपपन्नं प्रस्तुतम् ।

उदाहरणम्

भुजात्त्र्यूनात्पदं व्येकं कोटिकर्णान्तरं सखे ।
यत्र तत्र वद क्षेत्रे दोःकोटिश्रवणान्मम ।। १५ ।।

अत्र कोटिकर्णन्तरमिष्टम्=२, अतो विलोमेन भुजः १२, तद्यथा कल्पितमिष्टम्=२ । अस्य सरूपस्य ३ वर्गः=९ त्रियुतः=१२ । अस्य वर्गः=१४४ । तत्कोटिकर्ण-वर्गान्तरम् । अतो "राश्योर्वर्गान्तरं योगा-

न्तरघातसमं स्यात्' वर्गो हि समचतुरस्रक्षेत्रफलम्। अयं किल सप्तवर्गः ४९।

अस्मात् पञ्चवर्गं २५ विशोध्य शेषस्य २४ दर्शनम्।

इहान्तरं द्वौ २। योगो द्वादश १२। योगान्तरघातसम २४ कोष्ठकानि वर्त्तन्ते। तद्दर्शनम्

इत्युपपन्नं "वर्गान्तरं योगान्तरघातसमम्" इति।

अत इदं वर्गान्तरं १४४ कल्पितकोटिकर्णान्तरेण २ भक्तं जातम्=७२। अयं योगो द्विधाऽन्तरेणोनगुतोऽर्धित इति सङ्क्रमणेन जातौ कोटिकर्णौ ३५, ३७। एवमंकेन भुजकोटिकर्णा. ७, २४, २५। त्रिभिः १९, $\frac{१७६}{३}$ $\frac{१८५}{३}$। चतुर्भिर्वा २८, ९६, १००। एवमनेकधा एवं सर्वत्र।

सुधा—जिस त्रिभुज में भुज में तीन घटाने से जो मूल होता उसमें एक घटाने से कोटिकर्णान्तर हो जाता है। उस त्र्यस्रक्षेत्र के भुज कोटि कर्ण मुझे बतलाओ।

उदाहरण

यहाँ प्रश्नानुसार—$\sqrt{\text{भु} - ३} - १ =$ कोटिकर्णान्तर=य।

$\therefore$ भु $= (\text{य} + १)^२ + ३$

यदि यहाँ कल्पित कोटिकर्णान्तर = २

अतः भु $= (२+१)^२ + ३ = (३)^२ + ३ = ९ + ३ = १२$

$\therefore$ भु$^२ = १४४$।

भु^{२}=क^२ − को^{२} = (क − को) (क + को)

$\therefore \frac{\text{भु}^२}{\text{क} - \text{को}} = \text{क} + \text{को} = \frac{१४४}{२} = ७२$

अतः सङ्क्रमण के द्वारा $\frac{७२ - २}{२} = ३५ =$ कोटि

$\frac{७२+२}{२} = \frac{७४}{२} = ३७ =$ कर्ण

यहाँ कोटिकर्णान्तर २ मानने से उपर्युक्त भुज कोटि कर्ण १२, ३५, ३७ हुए वह अन्तर यदि =१ तो भु^{२}=४९

$\therefore$ क+को $= \frac{४९}{१} = ४९$। पुनः संकमण के द्वारा कोटि=२४, कर्ण=२५

इस प्रकार कोटिकर्णान्तर की विविधता से भुज कोटि कर्ण अनेकविध होंगे।

दो राशियों का वर्गान्तर उनके योग एवम् अन्तर के गुणनफल के तुल्य होता है इसकी उपपत्ति स्वयं ग्रंथकार ने निम्न कहा है जैसा कि :—सात, पाँच दो राशियाँ हैं।

सात के वर्ग तुल्य कोष्ठ वाले क्षेत्र में पाँच के वर्ग तुल्य कोष्ठ वाले क्षेत्र के घटाने से शेष कोष्ट वाले दो आयत क्षेत्र बचे।

प्रथम आयत में बृहद्राशि और राश्यन्तर के घात तुल्य (७ × २) = १४ कोष्ठ हैं।

दूसरे आयत में लघुराशि और राश्यन्तर के घात तुल्य कोष्ठ (५ × २ = १०) हैं।

दोनों वर्ग क्षेत्रों के अन्तर करने से इन्हीं दोनों आयतों के कोष्ठों का योग २४ आता है जो उपर्यंकित क्षेत्र में दोनों राशियों के योग (१२) अन्तर (२) के गुणन फल के समान होता है। (पृ० २५० के मध्यवर्गी क्षेत्र देखें)

इस क्षेत्र का फल १२×२ = २४ है जो कि राशिद्वय के योगान्तरघात के समान है। (पृ० २५० के तृतीय क्षेत्र देखें)

वासना—वर्गान्तरं योगान्तरघातसममिति रेखागणितद्वितीयाध्याय्यतः स्फुटम्।

अन्यथाऽपि वासनाऽस्यातीव सरला:—

तथाहि $अ^2 - क^2 = अ^2 + अ क - अ क - क^2$

$= अ (अ + क) - क (अ + क)$

$= (अ - क) (अ + क)$

अत उपपन्नम्।

अथ सूत्रं वृत्तम्

वर्गयोगस्य यद्राश्योर्युतिवर्गस्य चान्तरम्।
द्विघ्नघातसमानं स्याद्द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ॥१६॥

अत्र राशी ३, ५। अनयोर्युतिवर्गः = ६४। तयोर्वर्गौ ९, २५। अनयोर्योगः ३४। एतयोः ६४, ३४। अनन्तरम् = ३०। इदं राश्योर्घातेन १५ द्विघ्नेन ३० समं भवतीत्युपपन्नम्।

तेषां स्वरूपाणि यथा—

सुधा—दो राशियों का युतिवर्ग और वर्गयोग का अन्तर दोनों राशियों के द्विगुण घात के समान व्यक्त, अव्यक्त दोनों में होता है।

ग्रन्थकार ने दो व्यक्त राशियाँ ५, ३ मानकर दोनों का युति वर्ग ६४ में दोनों के वर्गयोग ३४ के घटाने से ३० होता है जो दोनों राशियों के गुणन फल १५ का द्विगुण है।

उपरिगत रेखा चित्रों में भी यही बात दिखलाई गई है। प्रथम चित्र युति वर्ग ६४ कोष्ठ का है जिसमें दोनों राशियों के वर्ग अलग-अलग दोनों छोटे चित्रों को घटाने से शेष पन्द्रह २ कोष्ठ वाले दो आयतों में दीख पड़ता है। वे कोष्ठ ३० हैं। ३० दोनों राशियों (३, ५) के द्विगुण घात के समान है—

३ × ५ × २ = ३०।

अतः ग्रन्थकारोक्त विषय उपपन्न हो गया।

वासना—यथाऽत्र राशी = य, क,

द्वयो राश्योर्वर्गयोगः = य^2 + क^2 = य^2 + २ य क + क^2 − २ य क
= (य + क)^2 − २ य क = वयो

पक्षान्तरनयन से

∴ (य + क)^2 − वयो = २ य क

∴ युति वर्ग − वयो = २ य क

अत पपन्नम्।

अन्यत् करणसूत्रं वृत्तम्।

चतुर्गुणस्य घातस्य युतिवर्गस्य चान्तरम्।
राश्यन्तरकृतेस्तुल्यं द्वयोरव्यक्तयो यंथा ॥१७॥

अत्र राशी ३, ५। अनयोर्युतिवर्गात् चतुर्षु कोणेषु घातचतुष्टयेऽपनीते राश्यन्तरवर्गसमानि कोष्ठकानि दृश्यन्त इत्युपपन्नम्।

सुधा :—दो राशियों के युतिवर्ग एवं उनके चतुर्गुणघात का अन्तर दोनों राशियों के अन्तरवर्ग के समान होता है।

यहाँ भी ग्रन्थकार ने ३, ५, दो राशियां मान ली। दोनों का युति वर्ग = ६४। दोनों का गुणन फल = १५। इसे चतुर्गुण करने पर १५ × ४ = ६०। इसे ६४ में घटाने पर शेष = ४, यह दोनों राशियों के अन्तर २ के वर्ग के समान है, ऐसा कहा है।

यहाँ के रेखा चित्र में भी यही बात स्पष्ट कर दी है। युति वर्ग के समान क्षेत्र के चारों कोने पर चार आयत क्षेत्र बने हैं जिनमें प्रत्येक क्षेत्र दोनों राशियों के घात तुल्य है। चारों क्षेत्रों के योग राशियों के चतुर्गुण घात तुल्य है युतिवर्ग क्षेत्र से इन चारों आयत क्षेत्रों को घटाने से एक छोटा सा चार कोष्ट का वर्ग क्षेत्र बँच जाता है जो राश्यन्तर रूप दो का वर्ग मात्र है।

अत: आचार्योक्त विषय निष्पन्न हो गया।

वासना—एतस्यापि वासनाऽतीव सरला।

यथाऽत्र राशी य, क,

$$(\text{य} - \text{क})^2 = \text{य}^2 - 2\,\text{य}\,\text{क} + \text{क}^2 = \text{य}^2 + 2\text{य}\,\text{क} + \text{क}^2 - 4\,\text{य}\,\text{क}$$

$$= (\text{य} + \text{क})^2 - 4\,\text{य}\,\text{क} = \text{राश्यन्तर वर्ग}$$

अत उपपन्नम्।

उदाहरणम्

चत्वारिंशद्युतिर्येषां दोः कोटिश्रवसां वद
भुजकोटिवधो येषु शतं विंशतिसंयुतम् ॥ १८ ॥

अत्र किल भुजकोटयोर्वधो द्विगुणः = २४० तद्युतिवर्गस्य वर्गयोगस्य चान्तरम्। यो हि भुजकोटयोर्वर्गयोगः स एव कर्णवर्गः अतो भुजकोटियुतिवर्गस्य कर्णवर्गस्य चान्तरमिदं २४० योगान्तरघात समं स्यात्। अत इदमन्तरं २४० योगेनानेन ४० भक्तं जातं भुजकोटि युतिकर्णान्तरम् = ६

"योगोऽन्तरेणोनयुतोऽर्धित" इत्यादिना संक्रमणेन जातो भुजकोटियोगः = २३, कर्णः = १७

'चतुर्गुणस्य घातस्य' इति भुजकोटियुतिवर्गादस्मात् ५२९ चतुर्गुणघातेऽस्मिन् ४८० शोधिते शेषं जातो दोः कोटयन्तरवर्गः = ४९ अस्यमूलम् = ७। इदं दोः कोटिविवरम्। "योगोऽन्तरेणोनयुतोऽर्धित' इति जाते भुजकोटी ८, १५।

सुधा :—जिन भुज कोटि कर्णों का योग चालिस है, और भुज कोटि का गुणन एक सौ बीस है तो भुज कोटि कर्ण का मान बतलाइए :—

उदाहरण :--

कल्पित कर्ण = य,

प्रश्नानुसार भु + को + क = ४०

भु × को = १२०

∴ भु + को = ४० − कर्ण = ४० − य ।

∴ (भु + को)^2 = (४० − य)^2 = य^2 − ८०य + १६००

भु^{2} + २भु.को + को^{2} = य^2 − ८०य + १६००

भु^{2} + को^{2} = य^2 − ८०य + १६०० − २ भु. को.

= य^2 − ८०य + १६०० − २४० =

य^2 − ८०य + १३६० = य^2 ∵ भु^{2} + को^{2} = य^2

∴ १३६० = ८०य

∴ य = १७ = कर्ण,

∴ ४० − १७ = भु + को = २३ ।

'चतुर्गुणस्य घातस्य युतिवर्गस्यचान्तर' मित्यादि से

(भु + को)^2 − ४ भु. को = (भु − को)^2

(२३)^2 − ४ × १२० = (भु − को)^2 =

५२९ − ४८० = ४९

पक्षयोर्मूले

भु − को = ७ = भुजकोटचन्तर ।

भुजकोटियोग त्रयोविंशति (२३) तुल्य है, अतः सङ्क्रमण से कोटि-ज्ञान सुगम है जैसा कि–

भु + को = २३, भु − को = ७

∴ २भु = ३० ∴ भु = १५

२को = २३ − ७ = १६ ∴ को = ८

भुज कोटि कर्णा : १५, ८, १७ ये हुए ।

उदाहरणम्

योगो दोः कोटिकर्णानां षट्पञ्चाशद्वधस्तथा ।
षट्शती सप्तभिः क्षुण्णा ४२०० येषां तन्मे पृथग् वद ।।१९।।

अत्र कर्णः या १ । अस्यवर्गः = याव । स एव भुजकोटिवर्गयोगः । अत्र दोःकोटिकर्णयोगे कर्णोने जातो भुजकोटियोगः = या १̇ रु ५६ । त्रयाणां घाते कर्णभक्ते जातो भुजकोटिवधः $\frac{४२००}{या १}$ ।

अथ "वर्गयोगस्य यद्राश्यो-
र्युतिवर्गस्यचान्तरम्
द्विघ्नघातसमानं स्यात्'

इति वर्गयोगः = याव १, युतिवर्गः=याव १ या ११२˙ रु ३१३६ ।
अनयोरन्तरम् = या ११२˙ रु ३१३६ । एतद् द्विघ्नघातस्यास्य

$\frac{८४००}{या १}$ सममिति समच्छेदीकृत्य छेदगमे

जातौ पक्षौ

याव ११२˙ या ३१३६ रु ०
याव ० या ० रु ८४००

एतौ द्वादशाधिकशतेनापवर्त्य शोधितौ

जातौ याव १˙ या २८ रु ०
याव ० या ० रु ७५

एतौ ऋणरूपेण संगुण्य चतुर्दशवर्गशमरूपाणि प्रक्षिप्य मूले

या १ रू १४˙
या ० रू ११ उक्तवच्छोधने कृते--

लब्धं यावत्तावन्मानम् = २५ । अत्र विकल्पेन द्वितीयं कर्णमानम् = ३ उत्पद्यते । एतदनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् । अथ त्रयाणांघातः = ४२०० । कर्ण २५ भक्तो जातो भुजकोटिवधः = १६८ । तथेयं भुजकोटियुतिः = ३१ । 'चतुर्गुणस्यघातस्येत्यादिना जातं दोः कोटयन्तरम् = १७ । योगोऽन्तरेणोनयुतोर्ऽद्धित' इत्यादिना जाते भुजकोटी ७, २४ । एवं सर्वत्र क्रियोपसंहारं कृत्वा मतिमद्भिः क्वापि युक्त्यैवोदाहरणमानीयते । अव्यक्तकल्पनया तु महती क्रिया भवति ।

इति भास्करीये बीजगणितेऽव्यक्तवर्गादिसमीकरणं समाप्तम् ।

सुधाः—भुज, कोटि, कर्ण का योग जहाँ छप्पन है, और तीनों का गुणनफल सप्तगुणित छे सौ (४२००) है वहाँ भुज, कोटि, कर्ण को अलग-अलग बतलाइए ।

उदाहरण—यहाँ कर्ण = य, ∴ भु + को = ५६ − य

भु × को × क = ४२००

$\therefore$ भु. को = $\frac{४२००}{क} = \frac{४२००}{य}$ ।

अथ वर्गयोगस्य यद्राश्योर्युतिवर्गस्य चान्तरमित्यादि से—

(भु + को)^2 − (भु^{2} + को^{2}) = (५६ − य)^2 − क^2

$(५६ - य)^2 - य^२ = - ११२ य + ३१३६$

$= २ \times भु. को = \frac{४२०० \times २}{य}$

$\therefore\ ३१३६ - ११२य = \frac{८४००}{य}$

$\therefore\ ३१३६ य - ११२ य^२ = ८४००$

ऋण ११२ से पक्षों को भाग देने पर :

$- २८ य + य^2 = - ७५$

वा $य^2 - २८ य + १९६ = १९६ - ७५ = १२१$

मूल लेने पर

$\therefore\ य - १४ = \pm ११$

∴ य = २५ वा ३ यहाँ ३ अग्राह्य है।

विमर्श: - यद्यपि एकवर्णसमीकरण के विमर्श में मैंने कुछ ऐसे उदाहरण या सोत्तर प्रश्न क्यिे जिन्हें मध्यमाहरणसम्बद्ध कहा जा सकता। फिर भी मध्यमाहरण के अन्त में भास्करीय बीजगणित तथा आधुनिक बीजगणित सम्बद्ध मध्यमाहरणों के प्रश्नोत्तर की प्रक्रिया में कहाँ अन्तर है इसे स्पष्ट करना आवश्यक है।

भास्करीय बीजगणित में मध्याहरण सम्बद्ध प्रश्नों के उत्तर में पहले ऐसे दो पक्ष बनते जिनमें एक पक्ष में अव्यक्त वर्ग तथा अव्यक्त और दूसरे पक्ष में व्यक्त मात्र रहता। फिर दोनों पक्षों को किसी से गुण कर गुणनफल में कुछ जोड़कर वर्गात्मक बनाकर दोनों पक्षों का वर्गमूल लिया जाता, फिर अव्यक्त का मान निकाला जाता है।

उदाहरण--(१) जैसे मान लिया कि

$३ क^२ + ३१ क = ७४$

भास्करीय बीजगणित पद्धति के अनुसार पहले दोनों पक्षों को ३ से गुणा कर, $(\frac{३१}{२})^2$ जोड़कर दोनों पक्षों का वर्गमूल लेंगे, फिर य का मान निकालेगे।

जैसे $३ क^२ + ३१ क = ७४$

$\therefore\ ९ क^२ + ९३ क = २२२$

दोनों पक्षों में $\left(\frac{३१}{२}\right)^२$ जोड़ देने पर

$९ क^२ + ९३ क + \left(\frac{३१}{२}\right)^२ = २२२ + \frac{९६१}{४} = \frac{८८८ + ९६१}{४}$

या ९ क^२ + ९३ क + $\left(\frac{३१}{२}\right)^2$ = $\frac{१८४९}{४}$

दोनों पक्षों के मूल ग्रहण से

३क + $\frac{३१}{२}$ = ± $\frac{४३}{२}$

∴ ३ क = $\frac{१२}{२}$ = ६ या $\frac{-७४}{२}$ = − ३७

∴ क = २, या $\frac{-३७}{३}$।

आधुनिक बीजगणित को पद्धति के अनुसार प्रथम पक्ष में ही सभी व्यक्त या अव्यक्तों को रखकर दूसरे पक्ष को शून्य के बराबर, और प्रथम पक्ष को गुणन खण्ड के द्वारा दो खण्डों में विभक्त कर य का द्विविध मान आता है। इस पद्धति में गुणनखण्ड निकालने का बड़ा महत्त्व है।

उपर्युक्त उदाहरण में

दो पक्ष :—३क^2 + ३१क = ७४ हैं

पक्षान्तरनयन से

∴ ३क + ३१क − ७४ = ०

अतः ३क^2 + ३१क − १२ − ६२ = ०

वा ३ (क^2 − ४) + ३१ (क − २) = ०

∴ (३क + ६) (क − २) + ३१ (क − २) = ०

(क − २) (३क + ३७) = ०

अतः यहाँ प्रथम पक्ष के दोनों खण्डों में से किसी को शून्य होने पर ही द्वितीय पक्ष शून्य होगा। यदि क = २ हो तो प्रथम पक्ष का प्रथम खण्ड शून्य हो जायगा, अतः दोनों खण्डों का गुणनफल = शून्य द्वितीय पक्ष के शून्य के बराबर हो सकता है।

अथवा

३क = − ३७ के बराबर होने पर भी प्रथम पक्ष का द्वितीय खण्ड शून्य हो जायगा अतः पूरा प्रथम पक्ष शून्य के बराबर हो सकता।

अतः उपर्युक्त समीकरण में

'क' का मान २, या − $\frac{३७}{३}$ ही

हो सकेगा।

उदाहरण (२)

$$\frac{२क^2 + १०}{१५} = ७ - \frac{५० + क^2}{२५}$$ में क मान क्या है

दोनों पक्षों को २५ से गुणनेपर

$$\frac{(२क^2 + १०)५}{३} = १७५ - \frac{(५० + क^2)}{१}$$

पुनः ३ से गुणने से

$(२क^2 + १०)५ = ५२५ - १५० - ३क^2$

$\therefore १०क^2 + ५० = ३७५ - ३क^2$

$\therefore १३क^2 = ३२५$

$\therefore १३क^2 - ३२५ = ०$

$१३(क^2 - २५) = ०$

$\therefore$ $क^2 = २५$ की स्थिति में ही प्रथम पक्ष शून्य के बराबर हो सकेगा।

$\therefore$ $क = \pm ५$ है।

उदाहरण (३)

$क^2 - ५क + ६ = ०$ है तो क का मान क्या है ?

प्रथम पक्ष को गुणन खण्ड में बदलने पर अर्थात् प्रथमपक्ष

$= क^2 - २क - ३क + ६ = क(क - २) - ३(क - २)$

$(क - २)(क - ३) = ०$

$\therefore$ $क = २$, वा $क = ३$

उदाहरण (४)

$२य^2 + १०य = ३य - १५$

पक्षान्तरनयन से

$२य^2 + १०य - ३य - १५ = ०$

$= २य(य + ५) - ३(य + ५) = ०$

$\therefore (२य - ३)(य + ५) = ०$

$\therefore$ $य = \frac{३}{२}$ वा $य = -५$

उदाहरण (५)

$$१०(२य + ३)(य - ३) + (७य + ३)^2 = २०(य + ३)(य - १)$$

यहाँ य का मान क्या है ?

$१०(२य^२ - ३य - ९) + (४९य^२ + ४२य + ९)$

$= २०(य^२ + २य - ३)$

$= २०य^२ - ३०य - ९० + ४९य^२ + ४२य + ९$

$= २०य^२ + ४०य - ६०$

$= ४९य^२ + १२य - ८१ = ४०य - ६०$

$\therefore ४९य^२ - २८य - २१ = ०$

वा $७य^२ - ४य - ३ = ०$

वा $७य^२ - ७य + ३य - ३ = ०$

$\therefore ७य\ य - १) + ३ (य - १) = ०$

$\therefore (७य + ३) (य - १) = ०$

अतः यहाँ $य = १$ या $-\frac{३}{७}$

उदाहरण (६)

$य - \frac{६५}{य} = ६४$ है तो 'य' मान बतलाइए

$\therefore य^२ - ६५ = ६४य$

$\therefore य^२ - ६४य - ६५ = ०$

$= य^२ - ६५य + १य - ६५ = ०$

$य (य - ६५) + १ (य - ६५) = ०$

$(य + १) (य - ६५) = ०$

$\therefore य = ६५$ या $य = - १$

उदाहरण (७)

$य^२ - ३०य = - २९$ है तो य का मान क्या है।

$\therefore य^२ - ३०य + २९ = ०$

प्रथम पक्ष को गुणन खण्ड में परिवर्त्तित करने पर

$य^२ - २९ य - य + २९ = ०$

$य (य - २९) - १ (य - २९) = ०$

$\therefore (य - १) (य - २९) = ०$

अतः यहाँ $य = १$

वा $य = २९$

उदाहरण (८)

$\frac{१३ - ६क}{३ + ४क} = \frac{७ - ९क}{७ + ६क}$ 'क' मान बतलाइए

$९१ - ४२क + ७८क - ३६क^2 =$

$= २१ - २७क + २८क - ३६क^2$

$९१ + ३६क - ३६क^2 = २१ + क - ३६क^2$

पक्षान्तरानयन से

$७० + ३५क = ०$ । दोनों पक्षों में ३५ से भाग देने पर

$क + २ = ०$

$\therefore क = -२$

उदाहरण (९)

$५(क + १)^2 + ७(क + ३)^2 = १२ (क + २)^2$

$५(क^2 + २क + १) + ७(क^2 + ६क + ९)$

$= १२ (क^2 + ४क + ४)$

$\therefore ५क^2 + १०क + ५ + ७क^2 + ४२क + ६३$

$= १२ क^2 + ४८क + ४८$

$\therefore १२क^2 + ५२क + ६८ = १२क^2 + ४८क + ४८$

$\therefore ५२ क + ६८ = ४८ क + ४८$

पक्षान्तर नयन से

$४ क + २० = ०$

$\therefore ४ क = -२०$

$\therefore क = \frac{-२०}{४} = -५$

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

१. एक सौदागर ने जितने रुपयों में एक घोड़ा खरीदा उतने ही रुपये सैंकड़े की दर से मुनाफा लेकर घोड़े को ९६ रुपये में बेच दिया तो घोड़े का मूल्य क्या है ?

उत्तर—६०

२. दो राशियों का अन्तर = ४७ तथा उन दोनों का गुणनफल = १५० तो राशियाँ बतलाइए ।

उत्तर—५०, ३

३. वर्त्तमान समय में पिता एवं पुत्र की अवस्थाओं का योग = ५२ । दश वर्ष पूर्व पिता और पुत्र की अवस्थाओं का गुणनफल = ६० तो वर्त्तमान आयु दोनों की क्या है ?

उत्तर—४०, १२

४. वह कौन सी संख्या है, जिसका वर्ग द्वादश गुणित संख्या से ३५ कम है।

उत्तर—५ या ७

५. कौन सी वह राशि है जिसका वर्ग दशगुणित संख्या से युक्त होने पर ११९ होता है तो राशि बतलाइए।

उत्तर—७ या – १७

६. वह कौन सी संख्या है जिसके वर्ग में संख्या को घटाने पर चतुर्गुणित अग्रिम संख्या से ४६ अधिक होता है।

उत्तर—१०

७. ५ य^2 – २० य = ३ य^2 इसमें य = ० या १०

८. य^2 – ५ य = ३६ इसमें य = ९ या – ४

९. ३ य^2 – १८ य+२४ = ० इसमें य = २, या ४

१०. $य+१ - \frac{६}{य+२} = ०$ इसमें य = १ या – ४

११. य^2 – ३ य = +४० इसमें य = ८ या – ५,

१२. $य^2 - \frac{५ य}{३} = ४$ इसमें य = ३ या $\frac{-४}{३}$

१३. $\frac{९ य^2 - ४९}{३ य - ७} - २ य = ११$ इसमें य = ४ या २ $\frac{२}{३}$

१४. य^2+९ य = ५२ इसमें य = ४ या – १३

१५. य^2 – २९ य – ९६ = ० इसमें य = ३२ या – ३

१६. य^2 – २१ य = ७२ इसमें य = २४ या – ३

१७. $\frac{२१ य^3 - १६}{३ य^2 - ४} - ७ य - ५ = ०$ इसमें य = २ या $\frac{२}{१५}$

१८. ७ य^2 – ७ य = ० इसमें य = १ या ०

१९. य^2 + २२ य+१२० = ० इसमें य = – १० या – १२

२०. $य - २ - \frac{य^3 - ८}{य^2 + ५} = ०$ इसमें या-२, या $\frac{१}{२}$

२१. य^2 – २० य = ९६ इसमें य = २४ या – ४

२२. य^2+८य+१५ = ० इसमें य = –५ या – ३

२३. ६ य^2+५ य = ४ इसमें य = $\frac{१}{२}$ या – $\frac{४}{३}$

२४. य^2 – ८ य+१२ = ० इसमे य = २ या ६

२५. $\frac{य^2 - ९}{५} - (य - ३)(य - ५) = ०$ इसमें $य = ३$ या ७

२६. $य^2 + ७ य - ३० = ०$ इसमें $य = ३$ या $- १०$

२७. $२ य^2 - ८ य - १० = ०$ इसमें $य = ५$ या $- १$

२८. $\left(य - \frac{य}{२}\right) य - य = \frac{३}{२}$ इसमें $य = ३$ या $- १$

२९. $\frac{५ य^2 - १०}{२} - य - ३ = ०$ इसमें $य = २$, या $\frac{- ८}{५}$

विशेष—इस आधुनिक पद्धति में गुणनखण्ड निकालने की क्षमता अधिक अपेक्षित है, यही कारण है कि मैंने आरम्भ में ही गुणनखण्ड (Factor) जानने की विधि बतलाई है।

इति सविमर्शसुधाव्याख्यायेते सवासने भास्करीबीजगणिते एकवर्णमध्यमाहरणं समाप्तम्।

देवचन्द्रकृतबीजवासमा सद्विमर्शसहिता सुधान्विता।
मध्यमाहरणजा सुधीवरैः सद्विवेचनपरैर्विभाव्यताम्॥

अथानेकवर्णसमीकरणं बीजम्

यत्र सूत्रं सार्धवृत्तत्रयम्

आद्यं वर्णं शोधयेदन्यपक्षा-
दन्यान् रूपाण्यन्यतश्चाद्यभक्ते ।
पक्षेऽन्यस्मिन्नाद्यवर्णोन्मितिः स्याद्-
वर्णस्यैकस्योन्मितीनां बहुत्वे ॥१॥
समीकृतच्छेदगमे तु ताभ्य-
स्तदन्यवर्णोन्मितयः प्रसाध्याः ।
अन्त्योन्मितौ कुट्टविधेर्गुणाप्ती
ते भाज्यतद्भाजकवर्णमाने ॥२॥
अन्येऽपि भाज्ये यदि सन्ति वर्णा-
स्तन्मानमिष्टं परिकल्प्य साध्ये ।
विलोमकोत्थापनतोऽन्यवर्ण
मानानि भिन्नं यदि मानमेवम् ॥३॥
भूयः कार्यः कुट्टकोऽत्रान्त्यवर्ण
तेनोत्थाप्योत्थापयेद्व्यस्तमाद्यान् ॥

इदमनेकवर्णसमीकरणं बीजम् । यत्रोदाहरणे द्वित्र्यादयोऽव्यक्तराशयो भवन्ति तेषां यावत्तावदादयो वर्णा मानेषु कल्प्यास्तेऽत्र पूर्वाचार्यैः कल्पिताः । यावत्तावत्, कालक, नीलक, पीतक, लोहितक, हरितक, श्वेतक, चित्रक,-कपिलक, पिङ्गलक,-धूम्रक,-पाटलक,-शवलक,-श्यामलक,-मेचक,-इत्यादि । अथवा कादीन्यक्षराणि अव्यक्तानां संज्ञा असंकरार्थं कल्प्याः । अतः प्राग्वदुद्देशकालापवद्विधिं कुर्वता गणकेन पक्षौ समौ कार्यौ पक्षा वा समाः कार्याः । ततः सूत्रावतारोऽयम् ।

तयोः समयोरेकस्मात् पक्षादितरपक्षस्याद्यं वर्णं शोधयेत् तदन्यवर्णान् रूपाणि च इतरपक्षाच्छोधयेत् । तत आद्यवर्णशेषेणेतरपक्षे भक्ते भाजव वर्णोन्मितिः । बहुषु पक्षेषु ययोर्ययोः साम्यमस्ति तयोरेवं

कृते सति अन्या उन्मितयः स्युः। ततस्तासून्मितिषु एकवर्णोन्मितयो यद्यनेकधा भवन्ति ततस्तासां मध्ये द्वयोर्द्वयोः समीकृतच्छेदगमेनाद्यं वर्णं शोधयेदित्यादिनाऽन्यवर्णोन्मितयः स्युः।

एवं यावत्तावत्सम्भवः। ततोऽन्त्योन्मितौ भाज्यवर्णे योऽङ्कः स भाज्यराशिर्यो भाजके स भाजकः। रूपाणि क्षेपः। अतः कुट्टकविधिना यो गुण उत्पद्यते तद्भाज्यवर्णमानं या लब्धिस्तद्भाजकवर्णमानं तयोर्मानयोर्दृढभाजकभाज्याविष्टेन वर्णेन गुणितौ क्षेपकौ कल्प्यौ। ततः स्वस्वमानेन सक्षेपेण पूर्णवर्णोन्मितौ वर्णावुत्थाप्य स्वच्छेदेन हरणे यल्लभ्यते तत्पूर्ववर्णस्य मानम्। एवं विलोमकोत्थापनतोऽन्यवर्णमानानि भवन्ति। यदि त्वन्त्योन्मितौ द्व्यादयो वर्णा भवन्ति तदा तेषामिष्टानि मानानि कृत्वा स्वस्वमानैस्तानुत्थाप्य रूपेषु प्रक्षिप्य कुट्टकः कार्यः।

अथ यदि विलोमकोत्थापने क्रियमाणे पूर्ववर्णोन्मितौ तन्मितिर्भिन्ना लभ्यते तदा कुट्टकविधिना यो गुण उत्पद्यते सक्षेपः, स भाज्यवर्णमानं तेनान्त्यवर्णमानेषु तं वर्णमुत्थाप्य पूर्वोन्मितिषु विलोमकोत्थापनप्रकारेणान्यवर्णमानानि साध्यानि। इह यस्य वर्णस्य यन्मानमागतं व्यक्तमव्यक्तं व्यक्ताव्यक्त वा तस्य मानस्य व्यक्ताङ्केन गुणने कृते तद्वर्णाक्षरस्य निरसनमुत्थापनमुच्यते ॥

सुधा— जिस उदाहरण में दो, तीन, चार आदि अव्यक्त राशियाँ हों उनका मान पूर्वाचार्यों ने यावत्तावत्, कालक नीलक, पीतक, लोहितक, हरितक, श्वेतक, चित्रक, कपिलक पिङ्गलक, धूम्रक, पाटलक, शवलक, श्यामलक, मेचक इत्यादि माना है। अथवा उन अव्यक्तों की संज्ञा क आदि अक्षर भी असाङ्कर्य के लिए मानी जा सकती।

अनन्तर प्रश्नानुसार क्रिया करने वाले गणकों को समान दो या अनेक पक्ष बनाने चाहिए।

उन समान दो पक्षों में से एक पक्ष के आदिम वर्ण को दूसरे पक्ष से, और दूसरे पक्ष के अन्य वर्ण तथा रूपों (व्यक्ताङ्कों) को इतर पक्ष में घटा कर आद्य पक्षीय वर्ण शेष से इतर पक्ष में भाग देने पर भाजक वर्ण का मान आएगा।

तात्पर्य यह है कि समान दो बनाकर प्रथम पक्ष के आदि पक्ष के वर्ण को दूसरे पक्ष में और दूसरे पक्ष के सभी व्यक्ताऽव्यक्तों को प्रथम पक्ष में (अपने-अपने पक्ष से हटाकर) रक्खे जिससे एक पक्ष में आदिम वर्ण शेष रहे और दूसरे पक्ष में व्यक्ताव्यक्त हो जाय। इस प्रकार आदिम वर्ण के व्यक्ताङ्क से दूसरे पक्ष में भाग लेने पर आदिम वर्ण का मान निकल जायगा।

"तुल्य पक्षद्वय में समान जोड़ने घटाने, या समान से भाग लेने या गुणने पर समान ही होता" यही उपर्युक्त विधान का मूल मन्त्र है।

बहुत से पक्षों में जिन-जिन दो पक्षों की समता हो उनमें उपर्युक्त विधान से एक वर्ण के अनेक मान आएगें। यदि एक वर्ण के अनेक उन्मिति (मान) आवें तो उनमें दो-दो के समीकरण तथा उपर्युक्त 'आद्यं वर्णं' मित्यादि करने से अन्य वर्णों की भी उन्मितियाँ आयेंगी।

इस प्रकार अन्त्य उन्मिति में भाज्य वर्ण के अङ्क को भाज्य और भाजक के अङ्क को भाजक तथा रूप को क्षेप मानकर कुट्टक के द्वारा आनीत गुण भाज्यवर्ण का, और लब्धि भाजक वर्ण का मान होता है।

यदि कुट्टक विधान के समय भाज्य में अन्य भी वर्ण हो तो उसका मान इष्ठ कल्पना कर क्षेप में जोड़ या घटाकर गुण लब्धि का साधन करें।

इस तरह कुट्टक के द्वारा आनीत गुण लब्धि भाज्य एवं भाजक के मान होंगे।

विपरीत रीति से उत्थापन के द्वारा अन्य वर्णों का भी मान लाना चाहिए। इस प्रकार अन्य वर्ण का मान यदि भिन्नाङ्क आवे तो पुनः कुट्टक के द्वारा गुण लब्धि लाकर क्षेप सहित गुण को भाज्य वर्ण का मान समझें। सक्षेप गुण से अन्त्य वर्ण में उत्थापन देकर विपरीत क्रम से आद्य वर्णों का भी मान उत्थापन द्वारा लाना चाहिए।

जिस किसी वर्ण के अगत-व्यक्तमान से वर्ण के गुणकांक को गुणने पर उस वर्ण का चूंकि निरसन (दूरीकरण) हो जाता अतः उसे उत्थापन कहते हैं।

उदाहरणानि

माणिक्यामलनीलमौक्तिकमितिरिति ।।१।।

अत्र माणिक्यादीनां मौल्यानि यावत्तावदादीनि प्रकल्प्य तद्गुणरत्नसंख्यां च कृत्वा रूपाणि च प्रक्षिप्य समशोधनार्थं न्यासः—

या ५ का ८ नी ७ रू ९० ।
या ७ का ९ नी ६ रू ६२ ।

आद्यं वर्णं शोधयेदित्यादिना जाता यवत्तावदुन्मितिः—

$$\text{या} = \frac{\text{क}१ \dot{} \ \text{नी}\ १\ \text{रू}\ २८}{२}$$

इयमेकैव, एकत्वादियमेवान्त्याऽतोऽत्र कुट्टकः कार्यः इह भाज्ये वर्णद्वयं वर्त्ततेतो नीलकमानमिष्टं रूपं १ कल्पितम्। अनेन नीलकमुत्थाप्य रूपेषु प्रक्षिप्य जातम् $\text{या} = \frac{\text{का}\ १\dot{}\ \text{रू}\ २९}{२}$

अतः कुट्टकविधिना "हरतष्टे धनक्षेपे" इत्यादिना गुणाप्ती सक्षेपे
पी २ रू १ ।
पी १ रू १४ ।

अत्र शून्येन पीतकमुत्थाप्य जातानि माणिक्यादीनां मौल्यानि १४, १, १ । अथवैकेन १३, ३, १ । द्वाभ्यां वा १२, ५, १ । त्रिभिर्वा ११, ७ १ । एवमिष्टवशादानन्त्यम् ॥

सुधा—एक-एक माणिक्यादिकों का अव्यक्त मान या, का, नी, या य, क, न, मानने से त्रैराशिक के द्वारा प्रश्नानुसार—

प्रथम का धन = ५य + ८क + ७न + ९०

एवम् द्वितीय का धन = ७य + ९क + ६न + ६२ दोनों बराबर हैं ।

अतः "आद्यं वर्णं शोधयेदन्यपक्षादित्यादि' अथवा 'समयोः समशुद्धौ समतैव' के अनुसार　　२ य = − क + न + २८

$$\therefore \text{य} = \frac{-\text{क} + \text{न} + २८}{२}$$

य की एकमात्र यही उन्मिति अन्तिम हुई । अतः यही कुट्टक करना है । किन्तु भाज्य में दो वर्ण हैं अतः न के मान को एक इष्ट मानने से

$$\text{य} = \frac{-१\text{क} + २९}{२} ।$$

धनक्षेप होने के कारण "हमतष्टे धनक्षेपे' के अनुसार कुट्टकार्थ न्यास—

$$\frac{\text{भा } १ \text{ क्षे } १}{\text{हा } २}$$ क्षेप तक्षण लब्धि = १४

कुट्टकोक्त रीति से वल्ली = | ० विषमवल्ली हुई
| १ राशिद्वय = ०
| ० 　　　　१

'स्वोर्ध्वे हतेन्त्येन' इत्याद्यनुसार विषम वल्ली के कारण तक्षण शुद्ध करने पर गुण = १, एवं लब्धि = १ । यह गुणलब्धि धन भाज्य तथा धनक्षेप सम्बद्ध हुई ।

यहाँ भाज्य ऋणात्मक है अतः "तद्वत्क्षेपे धनगते व्यस्तं स्यादृणभाज्यके" के अनुसार पूर्वागत लब्धि गुण १ १, को अपने-अपने तक्षण में घटाने पर ऋणभाज्य तथा धनक्षेप में गुण = १, लब्धि = ० ।

क्षेपतक्षणलाभाढ्यालब्धि = वास्तवलब्धि = ० + १४ = १४

'इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार इष्ट = प

अतः $-$ प $+$ १४ $=$ य

२ प $+$ १ $=$ क

० $+$ १ $=$ न पूर्वकल्पित है

अतः यदि प $=$ ०

तो य $=$ १४ $=$ माणिक्य मूल्य

क $=$ १ $=$ नीलममूल्य

न $=$ १ $=$ मुक्तामूल्य

यदि प $=$ १ तो माणिक्यादि का क्रमशः मूल्य $=$ १३, ३, १

,, प $=$ २ तो रत्नों का ,, ,, १२, ५, १

,, प $=$ ३ तो ,, ,, ,, ११, ७, १

इन रत्न मूल्यों से समस्त आलाप घट जायेंगे :—जैसा कि यदि १ माणिक्य $=$ १४, १ नीलम $=$ १, १ मुक्ता $=$ १ तो

प्रथम का धन $=$ ७० $+$ ८ $+$ ७ $+$ ९० $=$ १७५

द्वितीय का धन $=$ ९८ $+$ ९ $+$ ६ $+$ ६२ $=$ १७५

उदाहरणम्

एको ब्रवीति मम देहि शतमिति ।। २ ।।

अत्र धने या १, का १ । परधानाच्छतमपास्य पूर्वधने शतं प्रक्षिप्य जातं या १ रू १००, का १ रू १०० परधनादाद्य द्विगुणमिति परधनेन द्विगुणेन समं कृत्वा लब्धा यावत्तावदुन्मितिः—

या=का २ रू ३००

पुनराद्यधनाद्दशस्वपनीतेषु परधने क्षिप्तेषु जातम्—

या १ रू १० ।

का १ रू १० ।

आद्यादपरः षड्गुण इति आद्यं षड्गुणं परसमं कृत्वा लब्धं यावत्तावदुन्मानम् या $=\frac{\text{का १ रू ७०}}{६}$

अनयोः कृतसमच्छेदयोश्छेदगमे समीकरणं तत्रानेन वा एकवर्णत्वात् पूर्वबीजेनागतं कालकवर्णमानम् का $=$ १७० ।

अनेन यावत्तावदुन्मानद्वयेऽपि कालकमुत्थाप्य रूपाणि प्रक्षिप्य स्वच्छेदेन विभजय लब्धं यावत्तावदुन्मानम् या $=$ ४० ।

सुधः—इस उदाहरण की व्याख्या पहले की जा चुकी है ।

उदाहरण—दोनों के कल्पित अव्यक्त धन क्रमशः $=$ य, क, प्रश्नानुसार—

य $+$ १०० $=$ २ (क $-$ १००) $=$ २ क $-$ २००

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{२ क} - \text{३००}}{\text{१}}$$

एवम् $(\text{य} - \text{१०}) \times \text{६} = \text{क} + \text{१०}$

$$\therefore \text{६ य} - \text{६०} = \text{क} + \text{१०}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{क} + \text{७०}}{\text{६}} \text{।}$$

दोनों य मानों के समीकरण करने पर

$$\text{२ क} - \text{३००} = \frac{\text{क} + \text{७०}}{\text{६}}$$

$$\therefore \text{१२ क} - \text{१८००} = \text{क} + \text{७०}$$

पक्षान्तरनयन से—

$$\text{११ क} = \text{१८७०}$$

$\therefore$ क = १७० बिना कुट्टक के ही क का अभिन्न मान आया। अतः

$$\text{य} = \frac{\text{३४०} - \text{३००}}{\text{१}} = \text{४०}$$

इनसे सभी आलाप घट जायेंगे।

उदाहरणम्

अश्वाः पञ्चगुणाङ्गमङ्गलमिता येषां चतुर्णां धना-
न्युष्ट्राश्च द्विमुनिश्रुतिक्षितिमिता अष्टद्विभूपावकाः।
तेषामश्वतरा वृषा मुनिमहीनेत्रेन्दुसंख्याः क्रमात्
सर्वे तुल्यधनाश्च ते वद सपद्यश्वादिमौल्यानि मे ॥ ३॥

अत्राश्वादीनां मौल्यानि यावत्तावदादीनि प्रकल्प्य तद्गुणगुणिता-या मश्वादिसंख्यायां जातानि चतुर्णां धनानि—

प्रध = या ५ का २ नी ८ पी ७।
द्विध = या ३ का ७ नी २ पी १।
तृध = या ६ का ४ नी १ पी २।
चध = या ८ का १ नी ३ पी १।

एतानि समानीत्येषां प्रथमद्वितीययोः साम्यकरणाल्लब्धा यावत्तावदुन्मितिः $\text{या} = \frac{\text{का ५ नी ६' पी ६'}}{\text{२}}$ ।

द्वितीयतृतीययोरप्येवं लब्धा यावत्तावदुन्मितिः-

$$\text{या} = \frac{\text{का ३ नी १ पी १'}}{\text{३}} \text{।}$$

एवं तृतीयचतुर्थयोः या = $\frac{\text{का ३ नी २ पी १}}{\text{२}}$ ।

पुनरासां मध्ये प्रथमद्वितीययोः समीकृतच्छेदगमे साम्यकरणेन लब्धा कालकोन्मितिः का = $\frac{\text{नी २० पी १६}}{\text{९}}$ ।

एवं द्वितीयतृतीययोरपि का = $\frac{\text{नी ८ पी ५}}{\text{३}}$ ।

अनयोः समच्छेदीकृतयोः साम्यकरणेन लब्धं नीलकोन्मानम् नी = $\frac{\text{पी ३१}}{\text{४}}$ ।

अन्त्योन्मियौ कुट्टविधेर्गुणाप्ती इति कुट्टककरणेन लब्धो गुणकः सक्षेपः = लो ४ रू० एतत् पीतकमानम् । लब्धिः = लो ३१ रू० एतन्नीलकमानम् । कालकोन्मानेन नीलकपीतकौ स्वस्वमानेनोत्थाप्य स्वच्छेदेन विभज्य लब्धं कालकमानम = लो ७६ रू० । अथ यावत्तावन्माने कालकादीन् स्वस्वमानेनोत्थाप्य स्वच्छेदेन विभज्य लब्धं यावत्तावन्मानम् = लो ८५ रू० । लोहिते रूपेणेष्टेनोत्थापिते जातानि यावत्तावदादीनां परिमाणानि ८५, ७६, ३१, ४। द्विकेनेष्टेन १७०, १५२, ६२, ८। त्रिकेण १५५, २२८, ९३, १२। एवमिष्टवशादानन्त्यम् ॥

सुधा—तुल्य धन वाले चार व्यापारियों के पास निम्नांकित पशु थे—

प्रथम के पास पाँच घोड़े, दो ऊँट, आठ खच्चर तथा सात बैल,

दूसरे के पास तीन घोड़े, सात ऊँट, दो खच्चर और एक बैल,

तीसरे के पास छे घोड़े, चार ऊँठ, एक खच्चर और दो बैल,

और चौथे के पास आठ घोड़े, एक ऊँट, तीन खच्चर और एक बैल ।

यहाँ पशुओं का मूल्य वताइये—

एक एक अश्वादि का क्रमशः मूल्य=य, क, न, प,

प्रश्नानुसार—

प्रथम का धन = ५ य+२ क + ८ न+७ प

दूसरे का धन = ३ य+७ क + २ न+१ प

तीसरे का धन = ६ य+४ क+१ न+२ प

चौथे का धन = ८ य+१ क + ३ न +१ प

प्रश्नानुसार चारों बराबर हैं, अतः प्रथम द्वितीय का समीकरण—

५ य+२ क+८ न+७ प=३ य+७ क+२ न+प

∴ २ य=५ क − ६ न − ६ प

$$∴ य = \frac{५ क − ६ न − ६ प}{२} \quad (१)$$

द्वितीय, तृतीय का समीकरण—

३ य+७ क+२ न+१ प=६ य+४ क+१ न+२ प

∴ ३ य=३क+१ न − प

$$∴ य = \frac{३ क+ १ न − प}{३} \quad (२)$$

एवं तृतीय का चतुर्थ के साथ समीकरण—

६ य+४ क+१ न+२ प=८ य+क+३ न+प

पक्षान्तर नयन से

२ य=३ क − २ न+प

$$∴ य = \frac{३ क − २ न+प}{२} \quad (३)$$

यहाँ त्रिविध 'य' का मान आया।

अतः प्रथम द्वितीय 'य' मानों का समीकरण—

$$\frac{५ क − ६ न − ६ प}{२} = \frac{३ क+न − प}{३}$$

पक्षों को षड्गुणित करने पर

१५ क − १८ न − १८ प=६ क+२ न − २ प

पक्षान्तर नयन से

९ क=२० न+१६ प

$$∴ क = \frac{२० न + १६ प}{९} \quad (१)$$

द्वितीय तृतीय 'य' मानों का समीकरण—

$$\frac{३ क+न − प}{३} = \frac{३ क − २ न+प}{२}$$

यहाँ भी पक्षों को षड्गुणित करने से

६ क+२ न − २ प=९ क − ६ न+३ प

∴ ३ क=८ न − ५ प

$$∴ क = \frac{८ न − ५ प}{३} \quad (२)$$

दोनों 'क' मानों का समीकरण—

$$\frac{२० न+१६ प}{९} = \frac{८ न - ५ प}{३}$$

∴ २० न+१६ प = २४ न − १५ प

वा ४ न=३१ प

$$∴ न=\frac{३१ प}{४} ।$$

यहाँ कुट्टक की प्रवृत्ति हुई किन्तु क्षेपाभाव है, अत: गुण = ० ल=०

"इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्त" इत्यादि के अनुसार यदि इष्ठ = ल

तदा ३१ ल+०=न
४ ल+०=प

इन दोनों मानों से 'क' के मान में उत्थापन से

$$क=\frac{२०×३१ ल+१६×४ ल}{९} = \frac{(६२० + ६४) ल}{९} = \frac{६८४ ल}{९} =$$

७६ ल = क

अब क, न, प मानों से य मान में उत्थापन से

$$य=\frac{५ क - ६ न - ६ प}{२} = \frac{७६×५×ल - ३१ ल×६ - ६×४ ल}{२}$$

$$= \frac{३८० ल - १८६ ल - २४ ल}{२} = \frac{१७० ल}{२} = ८५ ल$$

क, न, प मानों से किसी 'य' मान में उत्थापन से यही उपलब्धि होगी।

अत: य=८५ ल, क=७६ ल
न=३१ ल, प = ४ ल

यदि ल=१ तो प्रति घोटकादि का क्रमशः मूल्य=८५, ७६, ३१, ४।

यदि ल=२ तो उपर्युक्त प्रति घोड़े आदि का मूल्य=१७०, १५२, ६२, ८ आदि इस तरह इष्टों के वश अनेक मान होंगे।

आलाप —

प्रथम का धन ५य + २क + ८न + ७प =
= ८५×५+७६×२ + ३१ × ८+४ × ७=८५३

द्वितीय का धन=३ य+७ क+२ न + प=८५×३+७६ × ७+३१×२+४
= २५५+५३२+६२+४ = ८५३

तृतीय का धन = ६ य + ४ क + न+२ प=८५×६+७६×४+३१+४×२
= ५१०+३०४+३१+८=८५३

एवं चतुर्थ का धन=८य+क+३ न+प = ८५×८+७६+९३+४ =
६८० + ७६+९३ + ४=८५३

उदाहरणम्

त्रिभिः पारावताः पञ्च पञ्चभिः सप्त सारसाः ।
सप्तभिर्नव हंसाश्च नवभिर्बर्हिणां त्रयम् ॥ ४ ॥
द्रम्मैरवाप्यते द्रम्मशतेन शतमानय ।
एषां पारावतादीनां विनोदार्थं महीपतेः ॥ ५ ॥

अत्र पारावतादीनां मौल्यानि मूल्यगुणितयावत्तावदादीनि प्रकल्प्य ततोऽनुपातेन समक्रिया कार्या । तद्यथा या ३ का ५ नी ७ पी ९ एतानि मौल्यानि शतसमानि कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम्—

$$या = \frac{का\ ५ˊ\ नी\ ७ˊ\ पी\ ९ˊ\ रू\ १००}{३} ।$$

पुनः या ५ का ७ नी ९ पी ३ एतान् जीवान् शतसमान् कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम्—

$$या = \frac{का\ ७ˊ\ नी\ ९ˊ\ पी\ ३ˊ\ रू\ १००}{५} ।$$

अनयोः कृतसमच्छेदयोश्छेदगमे लब्धं कालकमानम्—

का = नी २ˊ पी ९ˊ रू ५० ।

अत्र भाज्ये वर्णद्वयं वर्त्तते इति पीतकमानमिष्टं रूपचतुष्टयं कल्पितम् । अनेन पीतकमुत्थाप्य रूपेषु प्रक्षिप्य जातम् का = नी २ˊ रू १४ अतः कुट्टकविधिना लब्धिगुणौ सक्षेपौ

लो २ˊ रू १४ = ल०
लो १ रू ० = गु०

यावत्तावदुन्माने स्वस्वमानेन कालकादीनुत्थाप्य स्वस्वच्छेदेन विभज्य लब्धं यावत्तावन्मानम् या = लो १ˊ रू २ˊ । लोहितकमिष्टेन रूपत्रयेणोत्थाप्य जातनि यावत्तापदादीनां मानानि १,८,३,४ । एभिर्मौल्यानि जीवाश्चोत्थापिताः (पारावतादयः शतान्तर्वर्तिनः)

पक्षिणः ५, ५६, २७, १२ ।
मौल्यानि ३, ४०, २१, ३६ ।

अथवा चतुष्केणेष्टेन मानानि २, ६, ४, ४ । उत्थापिते जाताः पक्षिणः शयान्तर्वत्तिनः १०, ४२, ३६, १२ ।

मौल्यानि ६, ३०, २८, ३६ ।

अथवा पञ्चकेन मानानि ३, ४, ५, ४ । एभिरुत्थापने कृते जाताः
प १५ २८, ४५, १२ ।
मौ ९ २०: १५, ३६ । एवमिष्टवशादनेकधा ॥

सुधा:—तीन द्रम्मों में पाँच पारावत (कबूतर) पाँच द्रम्मों में सात सारस, सात द्रम्मों में नौ हंस, नौ द्रम्मों में तीन मयूर यदि मिलते हैं तो इन सौ द्रुम्मों में सौ पारावतादि राजा के विदोन के लिए मुझे लादो।

उदाहरण:—

यहाँ पारावतादि का मौल्य मूल्यगुणित यावत्तावत् आदि माना गया अर्थात् कबूत्तर का मौल्य = ३ × य, सारस का मौल्य = ५ × क = ५क, हंस का मौल्य = न × ७ = ७न, एवं मयूर का मौल्य = ९ × प = ९प

अत: पारावतादि के मौल्य = ३य, ५क, ७न, ९प, प्रश्नानुसार सभी मौल्यों का योग = १००

$\therefore$ ३ य + ५क + ७ न + ९ प = १००

पक्षान्तरनयन से,

३य = १०० − ५क − ७न − ९प

$\therefore$ य = $\dfrac{१००-५क-७न-९प}{३}$

अनुपात से पारावतादि के मान = तीन में यदि पाँच तो ३य में क्या ? =

पारावत की संख्या = $\dfrac{५ \times ३य}{३}$ = ५य,

एवं सारससंख्या = $\dfrac{७ \times ५क}{५}$ = ७क,

हंस की संख्या = $\dfrac{९ \times ७न}{७}$ = ९ न।

तथा मयूर की संख्या = $\dfrac{३ \times ९प}{९}$ = ३प

अत: पारावतादि की संख्याएँ क्रमश:

५य, ७क, ९न, ३प, ये हुई।

इनका योग भी प्रश्नानुसार १०० के बराबर।

$\therefore$ ५य + ७क + ९न + ३प = १००

$\therefore$ य = $\dfrac{१००-७क-९न-३प}{५}$

इस प्रकार य के दो मान आए।

दोनों य मानों के समीकरण से

$$\dfrac{१००-५क-७न-९प}{३} = \dfrac{१००-७क-९न-३प}{५}$$

$\therefore$ ५०० − २५क − ३५न − ४५प = ३०० − २१क − २७न − ९प

२०० = ४क + ८न + ३६प

वा २०० − ८न − ३६प = ४क

$\therefore$ क = $\frac{२०० - ८न - ३६प}{४} = \frac{५० - २न - ९प}{१}$

यहाँ भाज्य में वर्ण द्वय है अतः प का मान इष्ट चार मानने से

क = $\frac{-२न + १४}{१}$ यहाँ कुट्टक की प्राप्ति हुई।

चूँकि यहाँ हरोद्धृतक्षेप शुद्ध हो जाता है अतः गुण =० लब्धि=१४। इष्टाहृत स्वस्वहरेण युक्त इत्याद्यनुसार यदि इष्ट = ल तदा − २ल + १४ = लब्धि = क, ल + ० = गुण = न

अतः य = $\frac{१०० - ५क - ७न - ९प}{३}$ =

$\frac{१०० - (-२ल + १४) ५ - ७ल - ३६}{३}$ =

$\frac{१०० + १०ल - ७० - ७ल - ३६}{३}$ =

$\frac{-६ + ३ल}{३}$ = − २ + ल = य।

यदि ल = ३ तो य, क, न, प का क्रमशः मान = १, ८, ३, ४,

'य' आदि वर्णों के इन मानों से मूल्य एवं पारावतादि मानों में उत्थापन से

पारावत मूल्य = ३;

सारस मूल्य = ४०

हंस मूल्य = २१

मयूर मूल्य = ३६

इसी तरह पारावत की संख्या = ५

सारस की संख्या = ५६

हंस की संख्या = २७

मयूर की संख्या = १२

इसी तरह यदि ल = ४ तो य = २, क = ६, न = ४, प = ४

उत्थापन से पक्षियों की संख्या क्रमशः १०, ४२, ३६, १२।

मौल्य = ६, ३०, २८, ३६

अथवा ल = ५ तो य = ३, क = ४, न = ५: प = ४

इनसे उत्थापन देने पर पक्षि संख्याएँ १५, २८, ४५, १२

मौल्य = ९, २०, १५, ३६

इस तरह इष्ट के अनुसार अनेक विध उत्तर होंगे।

यह मैंने ग्रन्थकार की पद्धति के अवलम्बन से उत्तर लिखा है।

यदि पारावतादि मूल्य मूल्यगुणित यावत्तावतादि नहीं मानकर केवल य, क, न, प, माने जाँय तो प्रश्नानुसार य + क + न + प = १००

$$\therefore \text{य} = १०० - \text{क} - \text{न} - \text{प} \cdots\cdots\cdots (१)$$

एवम् तीन में पाँच तो 'य' में क्या इत्याद्यनुपात से

$$\text{पारावत संख्या} = \frac{५\text{य}}{३},$$

$$\text{सारस संख्या} = \frac{७\text{क}}{५};$$

$$\text{हंस की संख्या} = \frac{९\text{न}}{७}$$

$$\text{मयूर संख्या} = \frac{३\text{प}}{९} = \frac{\text{प}}{३}$$

सवों का योग =

$$\frac{५}{३}\text{य} + \frac{७}{५}\text{क} + \frac{९}{७}\text{न} + \frac{\text{प}}{३} = १००$$

पक्षद्वय को १०५ से गुणने पर—

$$५ \times ३५\,\text{य} + ७ \times २१\,\text{क} + ९ \times १५\,\text{न} + ३५\,\text{प} = १०५००$$

$$\therefore १७५\,\text{य} + १४७\,\text{क} + १३५\,\text{न} + ३५\,\text{प} = १०५००$$

$$\therefore १७५\,\text{य} = १०५०० - १४७\,\text{क} - १३५\,\text{न} - ३५\,\text{प}$$

$$\text{वा य} = \frac{१०५०० - १४७\,\text{क} - १३५\,\text{न} - ३५\,\text{प}}{१७५} \cdots\cdots (२)$$

दोनों 'य' मानों के समीकरण से

$$\frac{१०५०० - १४७\,\text{क} = १३५\,\text{न} - ३५\,\text{प}}{१७५} = १०० - \text{क} - \text{न} - \text{प}$$

पक्षद्दय को '१७५' से गुणने पर

१०५०० − १४७ क − १३५ न − ३५ प = १७५०० − १७५ क − १७५ न − १७५ प

पक्षान्तर नयन से

२८ क + ४० न + १४० प = ७०००

∴ ७ क + १० न + ३५ प = १७५०

∴ ७ क = १७५० − १० न − ३५ प

वा क = $\frac{१७५०−१० न−३५ प}{७}$

चूंकि भाज्यस्थ दो वर्ण हैं "अन्येऽपि भाज्ये यदि सन्ति वर्णः के अनुसार प = ३३ मानकर उत्थापन देने से

क = $\frac{१७५० − १० न −११५५}{७}$ =

$\frac{−१०न+५९५}{७}$

कुट्टक करने पर चूंकि हरोद्धृत क्षेप शुद्ध हो जाता अत; क्षेपाभावोऽथवा यत्र क्षेपः शुध्येद्धरोद्धृतः

ज्ञेयः शून्यं गुण स्तत्र क्षेपो हारहृतः फलम्"

के अनुसार गुण = ०, लब्धि = ८५ हुई।

'इष्टाहत स्वस्व हरेण युक्ते' के अनुसार 'ल' को इष्ट मानकर

− १० ल + ८५ = क.

७ ल + ० = न.

इन क, न, प, के ज्ञात मानों से उत्थापन देने पर

य = १०० − क − न − प = १०० − (− १० ल + ८५) − ७ ल − ३३ = १०० + १० ल − ८५ − ७ ल − ३३ = ३ ल −१८

अतः य = ३ ल − १८

क = − १० ल + ८५

न = ७ ल + ०

प = ल ० + ३३

यदि ल = ७ तदा

य = ३,

क = १५

न = ४९

प = ३३

सर्व योग = ३ + १५ ४९ + ३३ = १००

अतः कबूतर = ५
सारस = २१
हंस = ६३
मयूर = ११
सर्व योग = ५ + २१ + ६३ + ११ = १००.

इस प्रकार ल के मान की विविधता से अनेक विध उत्तर आ सकते।

उदाहरणम्—

षड्भक्तः पञ्चाग्रः पञ्चविभक्तो भवेच्चतुष्काग्रः ।
चतुरुद्धृतस्त्रिकाग्रो द्वयग्रस्त्रिसमुद्धृतः कः स्यात् ।। ६ ।।

अत्र राशिः या १। अथ षड्भक्तः पञ्चाग्र इति षड्भिर्भागे ह्रियमाणे कालको लभ्यत इति कालकगुणितो हरः स्वाग्रेण पञ्चकेन युतो यावत्तावता सम इति साम्यकरणेन यावत्तावदुन्मितिः—

या = का ६ रू ५।

एवं पञ्चादिहरेषु नीलकादयो लभ्यन्त इयि जाता यावत्तावदुन्मितयः या = नी ५ रू ४=पी ४ रू ३ = लो ३ रू २।

असां प्रथमद्वितीययोः समीकरणेन लब्धा कालकोन्मितिः का = $\frac{\text{नी ५ रू १}^{\cdot}}{६}$

एवं द्वितीयतृतीययोः समीकरणेन लब्धा नीलकोन्मितिः नी = $\frac{\text{पी ४ रू १}^{\cdot}}{५}$

एवं तृतीयचतुर्थयोः समीकणेन लब्धा पीतकोन्मितिः पी = $\frac{\text{लो ३ रू १}^{\cdot}}{४}$

अतः कुट्टकाल्लब्धे लोहितकपीतकयोर्माने सक्षेपे
ह ४ रू ३ = लो।
ह ३ रू २ = पो।

नीलकोन्माने स्वमानेनोत्थाप्य जातम् नी = $\frac{\text{ह १२ रू० ७}}{५}$।

अत्र स्वच्छेदेन हरणे नीलकमानं भिन्नं लभ्यते इति कृत्वाऽभिन्नं कर्त्तुं भूयः कुट्टकः कार्य इति पुनः कुट्टकात् सक्षेपो गुणः = श्वे ५ रू ४।

एतद्धरितकमानम्। अनेन लोहितकपीतजयोर्माने हरितकमुत्थाप्य जाते लोहितकपीतकयोर्माने—

श्वे २० रू १९ = लो।
श्वे १५ रू १४ = पी।

इदानीं नीलकोन्माने पीतकं स्वमानेनोत्थाप्य स्वच्छेदेन विभज्य लब्धं नीलकमानमभिन्नम्=श्वे १२ रू० ११। अनेन कालकमाने नीलकं स्वमानेनोत्थाप्य स्वच्छेदेन विभज्य लब्धं कालकमानम्=श्वे १० रू ९।

एभिर्मानैर्यावत्तावदुन्मितिषु कालकादीनुत्थाप्य लब्धं यावत्तावन्मानम्=श्वे ६० रू ५९।

अथवा षड्भक्तः पञ्चाग्र इति प्राग्वज्जातो राशिः का ६ रू ५।

अयमेव पञ्चापहृतश्चतुरग्र इति लब्धं नीलकं प्रकल्प्य तद्गुणितहरेण स्वाग्रयुतेन नी ५ रू४ समीकरणेन जातं कालकमानम्—

$$का = \frac{नी ५ रू १}{६}।$$

एतत् कालकमानं भिन्नं लभ्यत इति कुट्टकेनाभिन्नं कालकोन्मानम्=पी ५रू४। अनेन पूर्वराशिम् का ६ रू ५ उत्थाप्य जातम्=पी ३० रू२९। पुनरयं चतुर्भक्तस्त्र्यग्र इति प्राग्वत् साम्ये कृते जातम्।

$$पी = \frac{लो ४ रू २६}{३०} = \frac{लो २ रू १३.}{१५}$$

अत्रापि कुट्टकाल्लब्धं पीतकमानम् पी=ह२ रू १। अनेन पूर्वराशौ पी ३० रू २९ उत्थापिते जातो राशिः ह ६० रू५९। पुनरयं त्रिभक्तो द्व्यग्र इति स्वत एव जातः शून्यैकद्व्याद्युत्थापनाद्बहुधा॥

सुधा—कौन सी वह राशि है जिसमें छे से भाग देने पर पाँच शेष, पाँच से भाग देने पर चार शेष, चार से भाग देने पर तीन शेष और तीन से भाग देने पर दो शेष होता है।

उदाहरण

यहाँ कल्पित राशि=य

प्रश्नानुसार $\frac{य}{६} = ल + \frac{शे}{६} = क + \frac{५}{६}$

$\therefore$ य = ६ क+५ .... (१)

पुनः उसी में पाँच से भाग देने पर चार शेष होता है अतः

$$\frac{य}{५} = ल' + \frac{४}{५} = न + \frac{४}{५}$$

$\therefore$ य = ५ न + ४ (२)

पुनः उसी में चार से भाग देने पर तीन शेष रहता अतः

$$\frac{य}{४} = ल'' + \frac{३}{४} = प + \frac{३}{४}$$

$\therefore$ य = ४ प + ३ (३)

पुनः उसी राशि में तीन से भाग देने पर दो शेष रहता

अतः $\frac{य}{३} = ल''' + \frac{२}{३} = ल + \frac{२}{३}$

$\therefore$ य = ३ ल + २ (४)

इस तरह य के चार मान हुए।

प्रथम द्वितीय मानों के समीकरण से

६क + ५ = ५न + ४

$$\therefore क = \frac{५ न - १}{६}$$

एवं द्वितीय तृतीय के समीकरण से

५ न + ४ = ४ प + ३

$$\therefore न = \frac{४ प - १}{५},$$

तृतीय चतुर्थ के समीकरण से

४ प + ३ = ३ ल + २

$$\therefore प = \frac{३ ल - १}{४},$$

कुट्टक रीति से वल्ली = ०
१
१
०० | सम हुई

राशिद्वय = १
१

समवल्ली रहने के कारण तक्षण शुद्ध करने पर—

गुण = ३, लब्धि = २

'इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार—

इष्ट = ह अतः ३ ह + २ = लब्धि = प

४ ह+३ = गुण = ल

'प' के मान से 'न' के मान में उत्थापन से—

$$न = \frac{४ (३ ह+२) - १}{५} = \frac{१२ ह+७}{५}$$

"भूयः कार्यः कुट्कोऽत्रा—न्त्यवर्णं" मित्याद्यनुसार पुन कुट्टक की प्राप्ति हुई।

$$कुट्टकार्थ न्यास \frac{१२ ह + ७}{५} = न.$$

'हरतष्टेधनक्षेपे' के अनुसार शेष = २

अतः वल्ली = | २ सम हुई.।
| २
| २ क्षेप तक्षण लाभाढ्य लब्धि=लब्धि=१०+१=११
| ०० गुण = ४.।

राशिद्वय = १०
४

"इष्टाहतस्वस्त्र हरेण युक्ते" के अनुसान यदि इष्ट = श.

हो तो १२ श + ११ = न.

५ श + ४ = ह.

इस 'ह' के मान से पूर्वानीत 'प' के मान में उत्थापन से

(५ श + ४) ३ + २ = १५ श + १२ + २ = १५ श + १४ = प.

एवं 'ल' के मान में उत्थावन से

ल = (५ श + ४) ४ + ३ = २० श + १६ + ३ = २० श + १९

अतः ह = ५ श + ४

ल = २० श + १९

प = १५ श + १४

न = १२ श + ११

'न' मान से 'क' मान में उत्थापन से

$$क = \frac{५न-१}{६} = \frac{(१२ श + ११)५-१}{६.}$$

$$= \frac{६० श + ५५ - १}{६} = \frac{६० श + ५४}{६} = १० श + ९$$

इस से 'य' मान में उत्थापन से

य = ६ क + ५ = (१० श + ९) ६ + ५ = ६० श + ५९.

इसी तरह 'न' 'प' 'ल' मानों से द्वितीय तृतीय चतुर्थ य मानों में उत्थापन से य का मान सर्वत्र बराबर उपर्युक्त ही आयगा, । यह राशि त्रिभक्त होने पर सुतरां दो शेष वाली होती है ।

अतः क्रमशः वे = य = ६० श +५९

क = १० श + ९

न = १२ श + ११

प = १५ श + १४

ल = २० श + १९

यहां यदि श = ० तो य = ५९	यदि श = १ तो य = ११९
क = ९	क = १९
न = ११	न = २३
प = १४	प = २९
ल = १९	ल = ३९

अतः राशि = ५९ या ११९ हुई जिनमें छे आदि से भाग लेने पर लब्धियाँ क, न, प, ल, के मान होंगे और शेष उदाहरणोक्त ५, ४, ३, २ ये होंगे इष्ट के वश से राशियाँ भी अनेक होंगी—

अथवा:—(ग्रन्थ कारोक्त) उत्तर:—

कल्पित राशि य में ६ से भाग देने पर प्रश्नानुसार

$\frac{य}{६} = क + \frac{५}{६}$ ∴ य = ६ क + ५. । इसी य के मान में पाँच से भाग लेने पर

$\frac{६क+५}{५} = न + \frac{४}{५}$ ∴ ६ क + ५ = ५ न + ४

∵ क = $\frac{५ न - १}{६}$ । यहाँ कुट्टक की प्रवृत्ति हो गई

कुट्टक करने पर वल्ली = $\begin{matrix} ० \\ १ \\ १ \\ ०० \end{matrix}$ सम हुई ।

राशिद्वय = $\begin{matrix} १ \\ १ \end{matrix}$ ।

समवल्ली होने के कारण धन क्षेपज गुण लब्धि हैं अतः इन्हें स्व स्व तक्षण-शुद्ध करने पर = ४ = लब्धि गुण=५

"इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते" के अनुसार यदि इष्ट = प हो तो

५ प + ४ = लब्धि = क

६ प + ५ = गुण = न.

क मान से य मान में उत्थापन देने पर

य = (५ प + ४) ६ + ५ = ३० प + २९ = राशि।

इस में पुनः ४ से भाग देने पर प्रश्नानुसार तीन शेष।

अतः $\frac{३०प+२९}{४} = ल + \frac{३}{४}$

∴ ३० प + २९ = ४ ल + ३

∴ प = $\frac{४ल-२६}{३०} = \frac{२ल-१३}{१५}$

पुनः कुट्टकावसर हुआ।

कुट्टक रीति से वल्ली	० ७ १३ ००	सम हुई.

अतः राशिद्वय = १३ | ९१ | अतः १३ में २ से भाग देने पर

शेष = १ एवं ९१ में १५ से भाग देने पर भी शेष = १। ये लब्धिगुण धन-क्षेपज हुए। अतः इन्हें तक्षण शुद्ध करने पर $\frac{१}{१४}$ लब्धि गुण हुए।

'इष्टाहत स्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार इष्ट यदि = ह है तो

२ ह + १ = लब्धि = प.

१५ ह + १४ = गुण=ल

इस 'प' मान से य मान में उत्थापन देने पर

य = ३०प + २९ = (२ह + १) ३० + २९ = ६०ह + ५९

एवम् क = ५प + ४ = (२ह + १) ५ + ४ = १०ह + ९

न = ६प + ५ = (२ह + १) ६ + ५ = १२ह + ११

ल का मान पूर्वागत = १५ह + १४

इन सभी मानों में यदि ह = ०

तो य = ५९	यदि ह = १ तो	यदि ह = २ है तो
क = ९	य = ११९	य = १७९
न = ११	क = १९	क = २९
ल = १४	न = २३	न = ३५
	ल = २९	ल = ४४

अतः अभीष्ट राशि = ५९, ११९, वा १७९ आदि इन राशियों में ३ से भाग लेने पर दो शेष सुतरां हो जाते अतः आगे क्रिया करने की आवश्यकता नहीं हुई।

उदाहरणम्

स्युः पञ्चसप्तनवभिः क्षुण्णेषु हृतेषु केषु विंशत्या।
रूपोत्तराणि शेषाण्यवाप्तयश्चापि शेषसमाः ॥ ७ ॥

अत्र शेषाणि या १, या रू १, या १ रू २। एता एव लब्धयः। प्रथमो राशिः = का १। अस्मात् पञ्चगुणिताद्राशेर्लब्धिगुणं हरमपास्य जातं शेषम् का ५ या २०̇ एतद्यावत्तावत्समं कृत्वा लब्धा यावत्तावदुन्मितिः या = $\frac{\text{का ५}}{\text{२१}}$,

अथ द्वितीयो राशिः नी १। अस्मात् सप्तगुणाद्रूपाधिकयावत्तावद्गुणहरमपास्य जातम् नी ७ या २०̇ रू २०̇। एतदस्य या १ रू १ समं कृत्वा लब्धा यावत्तावदुन्मितिः या = $\frac{\text{नी ७ रू २१̇}}{\text{२१}}$

एवं तृतीयः=पी १। अस्मान्नवगुणाल्लब्धि–या १ रू २ गुणहरमपास्य शेषम् पी ९ या २०̇ रू ४०̇। इदमस्य या १ रू २ समं कृत्वा लब्धा यावत्तावदुन्मितिः या = $\frac{\text{पी ९ रू ४२̇}}{\text{२१}}$

आसां प्रथमद्वितीययोर्द्वितीयतृतीयोः साम्यकरणेन लब्धे कालकनीलकयोरुन्मिती—

$$\text{का} = \frac{\text{नी ७ रू २१̇}}{\text{५}}, \text{नी} = \frac{\text{पी ९ रू २१̇}}{\text{७}}$$

अत्र नीलकोन्मितौ कुट्टकेन नीलकपीतकयोर्माने कृत्वा कालकोन्मितौ नीलके स्वमानेनोत्थापिते कालकमानं भिन्नं लभ्यत इति कुट्टकेनाभिन्ने कालकलोहितकयोर्माने—

का = हृ ६३ रू ४२।
लो = हृ ५ रू ३।

अत्र नीलकपीतकयोर्लोहितके स्वमानेनोत्थापिते जाते तन्माने—

नी = हृ ४५ रू ३३।
पी = हृ ३५ रू २८।

यथा क्रमेण न्यासः—

का = ह ६३ रू ४२ ।
नी = ह ४५ रू ३३ ।
पी = ह ३५ रू २८ ।

अथ यावत्तावदुन्मितिषु कालकादीन् स्वस्वमानेमोत्थाप्य स्वच्छेदेन विभज्य लब्धं यावत्तावन्मानम् या = ह १५ रू १० । अत्र शेषसमे फले न हि शेषं भागहाराधिकं भवितुमर्हति । अतो हरितकं शून्येनैवोत्थाप्य जाता राशयः ४२, ३३, २८ । अग्राणि च १०, ११, १२ । एता एव लब्धयः ।।

सुधा :— वे कौन सी तीन राशियाँ हैं जिन्हें क्रमशः पाँच सात, नौ से गुणकर बीस से भाग देते हैं तो शेष एवं लब्धियाँ बराबर तथा रूपोत्तर होतीं है ।

उदाहरण

यहाँ कल्पित राशियाँ = क, न, प,

कल्पित शेष = य, य + १, य + २, ये ही तीनों लब्धियाँ भी हैं ।

प्रश्नानुसार $\frac{५ \times क}{२०} = य + \frac{य}{२०}$

$\therefore$ ५क = २१य

$\therefore \frac{५क}{२१} = य$ ········ (१)

एवं प्रश्नानुसार ही $\frac{न \times ७}{२०} = य + १ + \frac{य + १}{२०}$

$\therefore$ ७न = २०य + २० + य + १ = २१य + २१

$\therefore$ ७न − २१ = २१य

$\therefore य = \frac{७न - २१}{२१} = \frac{न - ३}{३}$ .... (२)

पुनः प्रश्नानुसार ही

$\frac{प \times ९}{२०} = य + २ + \frac{य + २}{२०}$

$\therefore$ ९प = २०य + ४० + य + २ = २१य + ४२

$\therefore \frac{९प - ४२}{२१} = य = \frac{३प - १४}{७}$ ......(३)

इस प्रकार आवात त्रिविध 'य' मानों में प्रथम द्वितीय 'य' मानों का समीकरण :—

$$\frac{५क}{२१} = \frac{न - ३}{३}$$

$$\therefore ५क = ७न - २१$$

$$\text{वा } क = \frac{७न - २१}{५}$$

एवं द्वितीय तृतीय 'य' मानों का समीकरण :—

$$\frac{न - ३}{३} = \frac{३प - १४}{७}$$

$$\therefore ७न - २१ = ९प - ४२$$

$$\therefore न = \frac{९प - २१}{७}$$, यहाँ कुट्टक की प्रवृत्ति हुई

चूंकि यहाँ हर भक्त क्षेप शुद्ध हो जाता अतः 'क्षेपाभावोऽथवा यत्र क्षेपः शुद्धेद् हरोद्धृतः' आदि के अनुसार गुण = ० लब्धि = ३. परञ्च ये गुण लब्धि धन क्षेपज हैं, यहाँ ऋण क्षेपज वे अपेक्षित हैं, अतः इन्हें स्वस्वतक्षण शुद्ध करने पर ६ = लब्धि, ७ = गुण।

'इष्टाहृत स्वस्तहरेण युक्ते' के अनुसार यदि इष्ट = ल

तो $९ल + ६ = न$

$७ल + ७ = प$

'न' के मान से 'क' मान में उत्थापन देने से

$$क = \frac{७न - २१}{५} = \frac{(९ल + ६) \times ७ - २१}{५} = \frac{६९ल + ४२ - २१}{५}$$

$$= \frac{६३ल + २१}{५}$$, पुनः कुट्टक का अवसर

हरतष्टे धनक्षेपे के अनुसार क्षेप = तक्षण लाभ = ४, शेष = १

अतः कुट्टकार्थं न्यास $\frac{६३ ल + १}{५} = क$

कुट्टक रीति से वल्ली
१२
१
१
२
००

विषम वल्ली हुई।

'स्वोर्ध्वे हृतेऽन्त्येनयुते' आदि के अनुसार राशिद्वय = $\left.\begin{matrix}२५\\२\end{matrix}\right\}$

विषम वल्ली रहने के कारण तक्षण शुद्ध करने पर = $\left.\begin{matrix}३८\\३\end{matrix}\right|$

क्षेपतक्षणलाभाढ्य=३८+४=४२=वास्तविक लब्धि

अतः लब्धि=४२

गुण= ३

'इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते' इत्यादि के अनुसार यदि इष्ट=ह

तो ६३ ह+४२=लब्धि=क

५ ह+३ = गुण = ल

'ल' मान से पूर्वानीत 'न' 'प' मानों में उत्थापन से—

न=९ ल+६= (५ ह+ ३) ९+६=४५ ह+३३=न

एवम् प=७ ल+७ = (५ ह+३) × ७+७ = ३५ ह+२८=प

'क' मान से 'य' मान में उत्थापन से—

$$य=\frac{५ क}{२१}=\frac{(६३ ह+४२) \times ५}{२१}=$$

(३ ह+२) ५=१५ ह+१०=य

इसी तरह 'न' 'प' मानों से 'य' मान में उत्थापन देने पर य का मान सर्वत्र बराबर १५ ह+१० ही होगा।

अतः य=१५ ह+१०

क=६३ ह+४२

न=४५ ह+३३

प=३५ ह+२८

यदि ह=० तो राशियाँ = ४२, ३३, २८ लब्धि एवं शेष=१०, ११, १२

ह का मान शून्यातिरिक्त १, २ आदि नहीं माना जा सकता क्योंकि वैसे करने पर 'य' का मान बीस से अधिक हो जायेगा जो प्रश्न तथा कल्पनानुसार असंगत है। यहाँ शेष का मान 'य' माना गया है। शेष सदैव हार से अल्प ही होता; अतः 'ह' का मान शून्य ही उपयुक्त। उपर्युक्त राशियों से आलाप—आसानी से घट जाते जैसा कि—

$$\frac{४२ \times ५}{२०}=\frac{२१०}{२०}=१० + \frac{१०}{२०}$$

$$\frac{३३ \times ७}{२०}=\frac{२३१}{२०}=११+\frac{११}{२०}$$

$$\frac{२८ \times ९}{२०}=\frac{२५२}{२०}=१२+\frac{१२}{२०}$$

एकाग्रो द्विहृतः कः स्याद् द्विकाग्रस्त्रिसमुद्धृतः ।
त्रिकाग्रः पञ्चभिर्भक्तस्तद्वदेव हि लब्धयः ॥८॥

अत्र राशिः या १ । अयं द्विहृत एकाग्र इति तत्फलं च द्विहृतमेकाग्रमिति फ़लप्रमाणम् का २ रू १ ।

एतद्गुणं हरं स्वाग्रेण युतं तस्य या १ समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम् = का ४ रू ३ ।

अस्यैकालापो घटते पुनरपि त्रिहृतो द्व्यग्र इति तत्फलं च नी ३ रू२ । एतद्गुणहरमग्रयुतं च नी ९ रू ८ इदमस्य का ४ रू३ समं कृत्वा कालकमानं भिन्नं कुट्टकेनाभिन्नं जातम् पी ९ रू ८ अनेन कालकमुत्थाप्य जातो राशिः पी ३६ रू ३५ ।

अस्यालापद्वयं घटते । पुनरयं पञ्चभक्तस्त्र्यग्र इति तत्फलं च लो ५ रू ३ । इदं हरगुणमग्रयुतमस्य पी ३६ रू ३५ समं कृत्वा पीतकमानं कुट्टकेनाभिन्नं कृत्वा जातम् = हृ २५ रू ३ । अनेन पीतकमुत्थाप्य जातो राशिः हृ ९०० रू १४३ । हृरितकस्य शून्यादिनोत्थापनेनानेकविधाः ॥

सुधा—कौन सी राशि है जिसमें दो से भाग लेने पर एक शेष, तीन से भाग लेने पर दो शेष और पाँच से भाग लेने पर तीन शेष रहता है, और तीनों लब्धियों में भी द्वादि से भाग देने पर क्रमशः दो, एक तथा तीन शेष होते हैं ?

उदाहरण :—

कल्पित राशि = य

आलाप घटित तीनों कल्पित लब्धियाँ—क्रमशः २क+१, ३न+२, ५ल+३

अतः प्रश्नानुसार

$$\frac{य}{२} = २क+१ + \frac{१}{२}$$

$$\therefore य = ४क + ३$$

इस 'य' के मान में दो से भाग देने पर एक शेष रहता है, अतः प्रथमालाप घटित हो जाता है ।

'द्विकाग्र स्त्रिसमुद्धृतः' के अनुसार

$$\frac{य}{३} = \frac{४क+३}{३} = ३न+२ \frac{२}{३}$$

$$\therefore ४क + ३ = ९न + ८$$

$$\therefore क = \frac{९न + ८ - ३}{४} = \frac{९न+५}{४}$$

कुट्टक रीति से वल्ली विषम हुई।

२
५
०

राशियुग्म = $\frac{१०}{५}$ इन्हें भाज्य हार से तष्टित करने पर = $\frac{१}{१}$। विषम वल्ली के कारण तक्षण शुद्ध करने पर = $\frac{८}{३}$। इष्ट यदि = प हो तो

९प + ८ = लब्धि, = क

एवम् ४प + ३ = गुण = न

अत: 'क' मान से 'य' मान में उत्थापन से

य=४ क + ३ = (९ प + ८) × ४ + ३ = ३६ प + ३५ = य।

इस 'य' मान में प्रथम द्वितीय आलाप घटित हो जाते।

"त्रिकाग्र: पञ्चभिर्भक्त:' के अनुसार

$\frac{३६प+३५}{५} = ५ल+३+\frac{३}{५}$

अत: ३६प + ३५ = २५ ल + १५ + ३

अथवा ३६प = २५ ल + १८ − ३५ = २५ ल − १७

$\therefore$ प = $\frac{२५ल − १७}{३६}$. पुन: कुट्टकावसर हुआ।

कुट्टक रीति से वल्ली $\frac{०}{१}$ विषम वल्ली हुई।

यह ऋण क्षेप के कारण $\frac{२}{३}$ उपयुक्त है

१७
००

अत: 'स्वोर्ध्वे हतेऽन्त्येन युते' आदि के अनुसार

राशि द्वय = १५३
            २२१

स्व स्व भाज्यहार से तष्टित करने पर = $\frac{३}{५}$।

'इष्टाहत स्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार यदि इष्ट = ह

तो २५ ह + ३ = प

   ३६ ह + ५ = ल

इस 'प' मान से 'य' मान में उत्थापन देने से

य = ३६प + ३५ = (२५ह+३) ३६ + ३५

= ९००ह+१०८ + ३५ = ९००ह+१४३

यदि ह = ० तो य = राशि = १४३

यदि ह = १ तो य = १०४३ आदि।

इन राशियों से समस्त आलाप घट जायेंगे।

उदाहरणम् :—

कौ राशी वद पञ्चषट्कविहृतावेकद्विकाग्रौ ययो-
र्द्व्यग्रं त्र्युद्धृतमन्तरं नवहृता पञ्चाग्रका स्याद्युतिः ।
घातः सप्तहृतः षडग्र इति तौ षट्काष्टकाभ्यां विना
विद्वन् कुट्टकवेदिकुञ्जरघटासंघट्टसिंहोऽसि चेत् ।।९।।

अत्र कल्पितौ राशी पञ्चषट्कविहृतावेकद्विकाग्रौ या ५ रू १, या ६ रू २ । अनयोरन्तरं त्रिहृतं द्व्यग्रमिति लब्धं कालकस्तद्गुणहरमग्रयुतमन्तरेणानेन या १ रू १ समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम् का ३ रू १ ।

अनेनोत्थापितौ जातौ राशी का १५ रू ६, का १८ रू ८ । पुनरनयोर्युतिर्नवहृता पञ्चाग्रेति लब्धं नीलकस्तद्गुणं हरमग्रयुतं योगस्यास्य का ३३ रू १४ समं कृत्वा कालकमानं भिन्नं का= $\frac{\text{नी ९ रू ९}}{\text{३३}}$,

कुठ्टकेनाभिन्नं जातम् पी ३ रू ० । अनेनोत्थापितौ जातौ राशी पी ४५ रू ६, पी ५४ रु ८ । पुनरनयोर्घाते वर्गत्वान्महती क्रिया भवतीति पीतकमेकेनोत्थाप्य प्रथमो राशिर्व्यक्त एव कृतः ५१ । पुनरनयोः सप्ततष्टयोर्घातः सप्ततष्टः पी ३ रू २ एतस्य समं कृत्वा प्राग्वत् कुट्टकेनाप्तं पीतकमानम् ह ३७८ रू ३३२ । पूर्वराशेः क्षेपः पी ४५ आसीत् स हरितकेनानेन ह ७ गुणितस्तस्य क्षेपः स्यादिति जातः प्रथमः क्षेपः ह ३१५ रू५१ । अथवा प्रथमेक व्यक्तं प्रकल्प्य द्वितीयः साध्यो वा जातौ राशी रू५१, श्वे १२६ रू८० ।

सुधाः—कौन सी वे दो राशियां हैं जिनमें क्रमशः पांच और छे से भाग देने पर क्रमशः एक तथा दो शेष रहते हैं ?

दो राशियों के अन्तर को तीन से भाग देने पर दो शेष, उनके योग को नौ से भाग देने पर पांच शेष, दोनों राशियों के गुणनफल को सात से भाग देने पर छे शेष, होते, छे और आठ के अलावे, उन दोनों राशियों को बतलाइए यदि आप कुट्टकज्ञ रूप हस्तिसमूह के विदारण में सिंह सदृश पराक्रमवान् हों ।

उदाहरणः—

प्रथमालाप घटित दो राशियां = ५ य + १, ६ य + २, कल्पित की गयीं जिनमें प्रथम में पांच से भाग देने पर एक शेष और दूसरे में छे से भाग देने पर दो शेष स्पष्ट परिलक्षित होता है ।

प्रश्नानुसार दोनों राशियों के अन्तर में तीन से भाग देने पर दो शेष रहता है।

$$\text{अतः} \frac{\text{राशिद्वयान्तर}}{३} = \frac{(६य+२)-(५य+१)}{३} = क + \frac{२}{३}$$

$\therefore$ य + १ = ३ क + २ $\therefore$ य = ३क + १

अतः प्रथमराशि = (५य + १) = (३क + १) × ५ + १ = १५ क + ६।

द्वितीयराशि = (३ क + १) × ६ + २ = १८ क + ८

पुनः प्रश्नानुसार, दोनों राशियों की युति में नौ से भाग देने पर पांच शेष रहता है।

$$\text{अतः} \frac{\text{राशिद्वय योग}}{९} = \frac{(१५ क + ६) + (१८ क + ८)}{९} =$$

$$\frac{३३ क + १४}{९} = न + \frac{५}{९}$$

$\therefore$ ३३ क + १४ = ९ न + ५

वा ३३ क = ९ न − ९ $\therefore$ क = $\frac{९ न - ९}{३३} = \frac{३ न - ३}{११}$

कुट्टकावसर होगया।

कुट्टकरीति से बल्ली		
	०	
	३	विषम हुई।
	१	
	३	
	००	

'स्वोर्ध्वेहतेऽन्त्येनयुते' के अनुसार राशिद्वय = ३ / १२

स्वस्वहार तष्टित करने पर = ० / १

'इष्टाहत स्वस्वहरेणयुक्ते' के अनुसार यदि इ = प तो

३ प + ० = क
११ प + १ = न | क मान से उत्थापन देने से

प्रथम राशि = (३ प + ०) १५ + ६ = ४५ प + ६

द्वितीय राशि = (३ प + ०) १८ + ८ = ५४ प + ८

प्रश्न के अन्तिम भाग के अनुसार $\frac{\text{राशिद्वयघात}}{७} = ल + \frac{६}{७}$

$$\frac{(४५ प + ६)(५४ प + ८)}{७} = ल + \frac{६}{७}$$

यहाँ दोनों राशियों के घात करने पर प^{२} होने के कारण क्रिया का प्रसार हो जाता है अर्थात् अनेक वर्णमध्यमाहरण की स्थिति उत्पन्न हो जायगी। अतः प्रथम राशिस्थ 'प' को एक मानने से प्रथम राशि = ४५ + ६ = ५१, द्वितीय राशि = यथावत्। ∴ दोनों का घात सप्ततष्ट

$$= \frac{५१ \times (५४ प + ८)}{७} = ल + \frac{६}{७}$$

सप्ततष्टित प्रथम राशि = २

सप्ततष्टित द्वितीय राशि = ५ प + १

इन दोनों के घात = १० प + २ में सात से भाग देने पर शेष = ३ प + २।

इसमें सात से भाग दिया $\frac{३ प + २}{७} = ल + \frac{६}{७}$

∴ ३ प = ७ ल + ४

∴ प $= \frac{७ ल + ४}{३}$।

कुट्टक रीति से वल्ली = | २ ४ ० विषम हुई

स्वोर्ध्वेहतेऽन्त्येन के अनुसार राशिद्वय ८ ४

भाज्य हार से तष्टित करने पर = १ १

विषम वल्ली होने के अपने अपने तक्षण में घटाने पर = ६ २

'इष्टाहत स्वस्वहरेण' के अनुसार यदि इष्ट=ह तदा

७ ह+६=प=लब्धि

३ ह+२=ल=गुण

'प' के मान से द्वितीय राशि में उत्थापन देने पर—

द्वितीय राशि=५४ प+८=(७ ह+६) ५४+८=३७८ ह+३२४+८ = ३७८ ह+३३२=द्वितीय राशि

प्रथम राशिक्षेप=४५ प, अतः व्यक्त प्रथम राशि ५१ में क्षेप=४५×७ ह= ३१५ ह। अर्थात् प्रथम राशि=ह ३१५+५१।

द्वितीय राशि=३७८ ह+३३२

यदि ह=० तो राशिद्वय=५१। ३३२

इन दोनों राशियों से उदाहरणोक्त सभी आलाप घट जायेंगे।

ग्रंथकारोक्त ही द्वितीय प्रकार

आरम्भ में ही प्रथम राशि व्यक्त=५१,

द्वितीय राशि=य मानकर प्रश्नानुसार—

$$\frac{य}{६}=क+\frac{२}{६}$$

∴ य= ६ क+२, प्रथम राशि आलाप घटित है, अतः उसे अविकृत रखना है।

प्रश्नानुसार ही दोनों राशियों के अन्तर में तीन से भाग देने पर दो क्षेप,

$$अतः \frac{६ क+२ - ५१}{३}= न+\frac{२}{३}$$

∴ ६ क − ४९=३ न+२ वा ६ क=३ न+५१

$$∴ क=\frac{३ न+५१}{६}=\frac{न+१७}{२}$$, कुट्टक के द्वारा

लब्धि = ९, गुण = १

'इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार यदि इष्ट=प तो

प+९ = ल=क

२ प+१=गुण=न

क मान से य मान में उत्थापन से −

य=६ क+२=६ (प+९)+२=६ प+५६=द्वि. रा.

'नवहृता पञ्चागुकास्याद्युतिः' के अनुसार दोनों राशियों का योग में नौ से भाग देने पर पाँच शेष, अतः

$$\frac{५१+६ प+५६}{९}=ल+\frac{५}{९}$$

∴ ६ प+१०७=९ ल+५

$$∴ प=\frac{९ल - १०२}{६}=\frac{३ ल - ३४}{२},$$

यहाँ भी कुट्टकावसर हुआ किन्तु हरभक्त शेष विशुद्ध हो जाता अतः गुण=०, लब्धि= − १७

'इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार यदि इ=ह तो

३ ह − १७=लब्धि=प

२ ल + ० =गुण=ल।

'प' मान से द्वितीय राशि में उत्थापन देने पर −

द्वितीय राशि=६ प+५६=(३ ह − १७) ६ + ५६=१८ ह − १०२+५६

=१८ ह − ४६=द्वि. रा.

पुनः 'घातः सप्तहृतः षडग्रः' प्रश्नांश के अनुसार—

$$\frac{५१\times(१८ह-४६)}{७}=ल_१+\frac{२\times(४ह-४)}{७}$$

$$ल_१+\frac{८ह-८}{७}=ल_१+ल_२+\frac{ह-१}{७}$$

यहा लब्धि अप्रयोजनीय है अतः प्रश्नानुसार—

$$\frac{ह-१}{७}=श+\frac{६}{७}$$

$\therefore$ ह − १=७ श+६ $\therefore$ ह=७ श+७

'ह' के मान से द्वितीय राशि में उत्थापन से–

द्वितीय राशि=१८ ह - ४६=(७ श+७) १८ - ४६

=१२६ ह+१२६ − ४६=१२६ ह+८०=द्वितीय राशि।

यदि ह=० तो दोनों राशि ५१, ८० हुए। सभी प्रश्नोक्त आलाप इन दोनों राशियों पर से मिल जायेंगे। जैसे—

(१) $\frac{५१}{५}=१०+\frac{१}{५}$, $\frac{८०}{६}=१३=\frac{२}{६}$

(२) $\frac{अन्तर}{३}=\frac{८०-५१}{३}=\frac{२९}{३}=९+\frac{२}{३}$,

(३) $\frac{यग}{९}=\frac{८०+५१}{९}=\frac{१३१}{९}=१४+\frac{५}{९}$

(४) $\frac{घात}{७}=\frac{५१\times८०}{७}=\frac{४०८०}{७}=५८२+\frac{६}{७}$

इस तरह सभी आलाप मिल गए ह के मान को एक आदि मानने पर दूसरी राशि अन्य भी होगी।

उदाहरणम्

नवभिः सप्तभिः क्षुण्णः को राशिस्त्रिंशता हृतः।
यदग्रैक्यं फलैक्याढ्यं भवेत् षड्‌विंशतेर्मितम् ।।१०।।

अत्रैकहरत्वाच्छेषयोः फलयोर्युतिदर्शनाच्च गुणयोगो गुणकः कल्पितः रू १६। राशिः=या १। लब्धैक्यप्रमाणं कालकस्तद्‌गुणितं हरं गुणगुणिताद्राशेरपास्य जातं शेषम् या १६ का ३०।

एतत् फलेन कालकेन युतं या १६ का २९ षड्‌विंशतिसमं कृत्वा कुट्टकेन प्राग्वज्जातं यावत्तावन्मानम् नी २९ रू २७। अत्र लब्ध्यग्रयोगस्यैकतानिर्देशात् क्षेपो न देयः।।

सुधा—कौन राशि है जिसे एक जगह नौ से, दूसरी जगह सात से गुणा कर तीस से भाग देते हैं, तो दोनों शेषों के योग में दोनों लब्धियों के योग को जोड़ने पर छब्बीस के बराबर होता है।

उदाहरण :—

यहाँ राशि = य,

प्रश्नानुसार राशि को पृथक्-पृथक् नौ, सात से गुणा कर ३० से भाग लेकर शेषैक्य एवं फलैक्य लाना है लाघवार्थ गुण योग (९+७) को गुणक मान कर क्रिया, प्रश्नानुसार—

$$\frac{य \times १६}{३०} = क + \frac{शे}{३०}$$

ऐसा करने पर शेष = शेषैक्य, और = क = फलैक्य

$\therefore$ १६ य = ३० क + शे

$\therefore$ १६ य − ३० क = शे

प्रश्नानुसार ही

शेषैक्य + फलैक्य = २६

अर्थात् १६ य − ३० क + क = २६

$$\therefore य = \frac{२९क + २६}{१६}$$

कुट्टक रीति से वल्ली १ विषम हुई।

१
४
२६
०
०

राशि द्वय = २३४
१३०

भाज्य हरतष्टित ये = $\frac{२}{२}$। विषम वल्ली के कारण तक्षण शुद्ध करने पर $\frac{२७}{१४}$। 'इष्टाहत स्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार यदि इष्ट=न तो २९न+२७= लब्धि=य, १६न+१४=गुण = क

यदि न = ० तो य = २७ क = १४,

अतः २७ राशि है जिसे ९ से गुण कर ३० से भाग देने

$$\frac{२७ \times ९}{३०} = \frac{२४३}{३०} = ८ + \frac{३}{३०}$$

$$\frac{२७ \times ७}{३०} = \frac{१८९}{३०} = ६ + \frac{९}{३०}$$

फलैक्य = ८ + ६ = १४ = क

शेषैक्य = ३ + ९ = १२

शेषैक्य + फलैक्य = १४ + १२ = २६। सभी आलाप घटित हो गए यहाँ फलैक्य + शेषैक्य = २६ निश्चित है, अतः न मान को एकादि मानकर अनेक राशि नहीं हो सकते।

विमर्श—चूँकि यहाँ गुणक भिन्न-भिन्न है और हर एक है अतः गुणैक्य को गुण कल्पना करने पर कोई भी विकार नहीं हो सकता—

जैसे—$\frac{य \times ९}{३०} = क + \frac{शे}{३०}$

पुनः $\frac{य \times ७}{३०} = न + \frac{शे'}{३०}$

$\therefore \frac{९य}{३०} + \frac{७य}{३०} = क + \frac{शे}{३०} + न + \frac{शे'}{३०}$

$\therefore \frac{१६य}{३०} = क + न + \frac{शे + शे'}{३०}$

अतः सिद्ध हो गया कि गुण योग को गुणक मानकर क्रिया करने पर लब्धि फलैक्य और शेष शेषैक्य हो जाता है।

उदाहरणम्—

कस्त्रिसप्तनवक्षुण्णो राशिस्त्रिंशद्विभाजितः।
यदग्रैक्यमपि त्रिंशद्धृतमेकादशाग्रकम् ॥ ११ ॥

अत्रापि गुणयोगो गुणः प्राग्वत् रू १९। राशिः या १ लब्धं कालकः। एतद्गुणं हरं गुणगुणिताद्राशेरपास्य शेषम् या १९ का ३० । एतदग्रैक्यं त्रिंशत्तष्टमेव ततः प्रथमालापे द्वितीयालापस्यान्तर्भूतत्वादिदमेवैकादशसमं कृत्वा प्राग्वज्जातो राशिः = नी ३० रू २९।

सुधा:—वह कौन सी राशि है जिसे तीन और सात और नौ से अलग अलग गुणकर तीस से भाग देते हैं, तो शेषैक्य जो होता उसमें तीस से भाग देने पर एगारह शेष रहता है ?

उदाहरण

कल्पित राशि = य। ३ + ७ + ९ = १९ = गुणयोग.

गुणयोग को गुणक मानकर प्रश्नानुसार

$$\frac{य \times १९}{३०} = क + \frac{शे}{३०}$$

$\therefore$ १९ य = ३० क + शे $\therefore$ १९ य − ३० क = शे. = ११

$\therefore$ १९ य = ३० क + ११

वा य = $\frac{\text{३० क + ११}}{\text{१९}}$ कुट्टक रीति से

बल्ली:— १ विषम हुई.।
१
१
२
१
११
००

अतः राशियुग्म = १२१ / ७७ | भाज्य हार से तष्टित करने

पर = १ / १ | विषम वल्ली के कारण यह ऋणक्षेपज लब्धि गुण हुए।

इन्हे अपने अपने तक्षण से विशोधित करने पर = २९ / १८ | 'इष्टाहतस्व-स्वहरेण युक्ते' के अनुसार यदि इष्ट = न तो

लब्धि = ३० न + २९ = य	यदि न = ० तो.
गुण = १९ न + १८ = क	य = २९
	क = १८.

अतः २९ राशि है जिसे ३, ७, ९, से अलग अलग गुणंकर ३० भाग देते तो प्राप्त शेषैक्य में ३० से भाग देने पर एगारह शेष होता है :—

जैसे :— $\frac{\text{२९×३}}{\text{३०}} = \text{२} + \frac{\text{२७}}{\text{३०}}$

$\frac{\text{२९ × ७}}{\text{३०}} = \text{६} + \frac{\text{२३}}{\text{३०}}$

$\frac{\text{२९×९}}{\text{३०}} = \text{८} + \frac{\text{२१}}{\text{३०}}$

अतः शेषैक्य = २७ + २३ + २१ = ७१

$\frac{\text{शेषैक्य}}{\text{३०}} = \text{२} + \frac{\text{११}}{\text{३}}$ अर्थात् शेषैक्य में ३० से भाग लेने पर ११ शेष बचा.।

राशि को गुणयोग से गुणाकर ३० से भाग लेने पर भी यही स्थिति होती है

जैसे $\frac{२९ \times \text{गुणयोग}}{३०} = \frac{२९\times१९}{३०} = १८ + \frac{११}{३०}$

यहाँ भी शेष = ११, लब्धि भी = १८ = २ + ६ + ८ + २ = १८
इसी मार्ग को ग्रन्थकार ने अपनाया है

उदाहरणम्—

कस्त्रयोविंशतिक्षुण्णः षष्ट्याऽशीत्या हृतःपृथक् ।
यदग्रैक्यं शतं दृष्टं कुट्टकज्ञ वदाशु तम् ।। १२ ।।

अत्र सूत्रं वृत्तम् ।

यत्रैकाधिकवर्णस्य भाज्यस्थस्येप्सिता मितिः ।
भागलब्धस्य नो कल्प्या क्रिया व्यभिचरेत् तथा ।।

अतोऽन्यथा यतितव्यम् ।

अत्र स्वस्वभागहारान्न्यूने शेषे यथा भवतो यथा चाखिलं स्यात् तथा शेषयोगं विभज्य क्रिया कार्या । तथा कल्पिते शेषे ४०, ६० । राशिः या १ । एष त्रयोविंशतिगुणः षष्टिहृतः फलं कालकस्तद्गुणं हरं शेषयुतमस्य या २३ समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम्

या = $\frac{\text{का ६० रू ४०}}{२३}$ ।

एव मन्यत् या= $\frac{\text{नी ८० रू ६०}}{२३}$ ।

अनयोः समीकरणे कुट्टकेन लब्धे कालकनीलकमाने--

का = पी ४ रू ३ ।
नी = पी ३ रू २ ।

आभ्यामुत्थापने यावत्तावन्मानं भिन्नं स्यादिति कुट्टकेनाभिन्नं जातम् लो २४० रू २० । अथ वा शेषे ३०, ७० । आभ्यां राशिः = लो २४० रू ९० ।।

सुधाः—कौन सी वह राशि है जिसे अलग-अलग साठ एवं अस्सी से भाग लेते हैं, तो दोनों शेषों का योग एक सौ के बराबर होता है ? हे कुट्टकज्ञ उस राशिको बतलाइए ।

उदाहरण :—

यहाँ भी कल्पित राशि = य।

प्रश्नानुसार —

$$\frac{य \times २३}{६०} = क + \frac{शे}{६०}$$

$$२३य - ६०क = शे ।$$

$$एवम् \quad \frac{२३य}{८०} = न + \frac{शे'}{८०}$$

$$\therefore २३य - ८०न = शे'$$

$$अतः\ शेषैक्य = शे + शे' = २३य - ६०क + २३य - ८०न$$
$$= ४६य - ६०क - ८०न$$

यह प्रश्नानुसार सौ के बराबर है

$$अतः\ ४६य - ६०क - ८०न = १००$$

$$\therefore ४६य = १०० + ६०क + ८०न$$

$$\therefore य = \frac{१०० + ६०क + ८०न}{४६} = \frac{५० + ३०क + ४०न}{२३}$$

यहाँ कुट्टक की प्रवृत्ति हुई किन्तु भाज्य स्थ एकाधिक वर्ण है अतः "अन्येऽपि भाज्ये यदि सन्ति वर्णाः" के अनुसार एक वर्ण का इष्टमान कल्पना कर कुट्टक करना चाहिए किन्तु वैसा करने पर क्रिया व्यभिचरित होती है अतः भास्कराचार्य ने 'यत्रैकाधिकवर्णस्ये'त्यादि सूत्र कहा है।

सूत्र का आशय यह हैं :—

जहाँ भागलब्ध भाज्यस्थ एकाधिक वर्ण हो वहाँ किसी वर्ण का अभीप्सित मान नहीं मानना चाहिए, वैसा करने पर क्रिया व्यभिचरित होती है।

अतः दूसरी पद्धति से राशि मान लाना चाहिए—

माना कि राशि = य, चूँकि हार से शेष सर्वत्र अल्प होता है अतः दोनों शेष, क्रमशः ४०, ६० मान लिए।

अतः प्रश्नानुसार :—

$$\frac{२३य}{६०} = क + \frac{४०}{६०}$$

$$\therefore २३य = ६०क + ४०$$

$$\therefore य = \frac{६०क + ४०}{२३},$$

एवम् $\frac{२३य}{८०} = + \frac{६०}{८०}$

$\therefore$ २३य = ८०न + ६०

$\therefore$ य = $\frac{८०न + ६०}{२३}$

दोनों 'य' मानों के समीकरम से

$$\frac{६०क + ४०}{२३} = \frac{८०न + ६०}{२३}$$

$\therefore$ ६०क + ४० = ८०न + ६०

वा ६०क = ८०न + २०

क = $\frac{८०न + २०}{६०} = \frac{४न + १}{३}$

कुट्टक रीति से वल्ली = | १ विषम हुई
१
०

'स्वोर्ध्वेहतेऽन्त्येन युते' आदि के अनुसार राशिद्वय = १
१

विषमवल्ली होने के कारण स्वतक्षण शुद्ध करने पर

= ३ | 'इष्टाहतस्वस्वहरणे युक्ते' के अनुसार यदि
२ | इष्ट = प तो ४प + ३ = लब्धि = क

३प + २ = गुण = न

'क' मान से 'य' मान मे उत्थापन से

$$य = \frac{६०क + ४०}{२३} = \frac{(४प + ३)\ ६० + ४०}{२३} = \frac{२४०प + २२०}{२३}$$

अथवा

$$य = \frac{८०न + ६०}{२३} = \frac{(३प + २)\ ८० + ६०}{२३} = \frac{२४०प + २२०}{२३}$$

अभिन्नार्थ कुट्टक :– $\frac{२४०प + २२०}{२३}$ = य

'हर तष्टे धनक्षेपे' के अनुसार हर तष्टित क्षेप = १३ लब्धि = ९

कुट्टकार्थ न्यास $\frac{२४०प + १३}{२३}$

वल्ली = | १० विषम हुई
२
३
१३
०

'स्वोर्ध्वे हतेऽन्त्येनयुते' के अनुसार राशिद्वय = $\frac{९४९}{९१}$

भाज्य हार से तष्टित करने = $\frac{२२९}{२२}$

चूँकि विषम वल्ली है अतः अपने-अपने लक्षण में घटाने पर

$\frac{११}{१}$ शेष तक्षण लाभाढ्य लब्धि = लब्धि अतः ११ + ९ = २० = ल

'इष्टाहत स्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार यदि इष्ट = ल,

तो २४०ल + २० = लब्धि = य

२३ल + १ = गुण = प

यदि ल = ० तो य = २० = राशि

अथवा काल्पित शेष द्वय = ३०, ७० तो पूर्वोक्तरीति से राशि २४० + ९० आती है। यहाँ भी ल = ० तो राशि = ९०।

इन राशियों पर से सभी आलाप आसानी से घटते हैं।

जैसे राशि = २०

$$\text{प्रश्नानुसार } \frac{२० \times २३}{६०} = \frac{४६०}{६०} = ७ + \frac{४०}{६०}$$

$$\frac{२० \times २३}{८०} = \frac{४६०}{८०} = ५ + \frac{६०}{८०}$$

यहाँ शेषद्वय योग = ४० + ६० = १००।

अथ यत्रैकाधिकवर्णस्येत्यादे :—

विशेषकृता वासना :—

अत्र राशिः = या, १। प्रश्नानुसारमेकत्र त्रयोविंशत्या गुणितः षष्ट्या विहृतोऽन्यत्रचाऽशीत्याहृतः।

अत्र क्रमेण लब्धी का १, नी १।

ततः शेष माने २३ या − ६०क, २३ या − ८० नी।

अनयो र्योगः = ४६ या − ६० का − ८०नी = १००

$$\text{अतः या} = \frac{६०\text{का} + ८०\text{नी} + १००}{४६} = \frac{३०\text{का} + ४०\text{नी} + ५०}{२३}$$

अथाऽत्र कालकमानमिष्टं कल्प्यते तदा प्रथमशेषमानम् = २३य – ६० इ धनात्मकम् ।

$$\therefore \text{या} > \frac{\text{६०इ}}{\text{२३}}$$

तथेदं २३ या – ६०, या – ६० इ षष्टितोऽल्पमतः २३या – ६०इ < ६०

$$\text{अतः या} < \frac{\text{६०(इ + १)}}{\text{२३}} \text{ तेन } \frac{\text{६० (इ + १)}}{\text{२३}} > \text{या} > \frac{\text{६०इ}}{\text{२३}}$$

एतेत यावन्तावन्मानं नानेकधेति सिद्ध्यति । परन्तु कालकस्येष्टेनोत्थापने कृते यावत्तावदुन्मित्या—

$\frac{\text{३०का + ४०नी + ५०}}{\text{या २३}}$ ऽनया कुट्टकेन यावत्तावन्मानमनेकधा सिद्ध्यतीति परस्परमसम्भवं तेन कालकस्येष्टमानं न समुचितमेवं नीलकस्येष्टमानेन क्रिया व्यभिचरतीति आचार्योक्तं युक्तियुक्तम्

उदाहरणम्

कः पञ्चगुणितो राशिस्त्रयोदशविभाजितः ।
यल्लब्धं राशिना युक्तं त्रिंशज्जातं वदाशु तम् ।। १३ ।।

अत्र राशिः या १ । एष पञ्चगुणस्त्रयोदशहृतः फलं कालकः १ । एतत् फलं राशियुतं या १ का १ त्रिंशत्समं क्रियत इत्युक्तं यत इयं क्रिया निराधारा नात्र गुणो न च हर उपलभ्यते ।

तथा चोक्तम्--

निराधारा क्रिया यत्र नियताधारिकाऽपि वा ।
न तत्र योजयेत् तां तु कथं सा वा प्रवर्त्तते ।।

अतोऽत्रान्यथा यतितव्यम् अत्र किल हरतुल्ये राशौ कल्पिते १३ । राशिफलयोगेनानेन १८ । यदि इदं ५ फलं तदा त्रिंशता किमिति लब्धं फलम् $\frac{\text{२५}}{\text{३}}$ । एतत्त्रिंशतोऽपास्य शेषं जातो राशिः $\frac{\text{६५}}{\text{३}}$ ।

सुधा—कौन सी राशि है जिसे पाँच से गुणा कर तेरह से भाग देते और प्राप्त लब्धि को राशि में जोड़ देते हैं तो बीस अंक प्राप्त होता है ?

यहाँ राशि=य. प्रश्नानुसार—

$$\frac{\text{५} \times \text{य}}{\text{१३}} = \text{क} + \frac{\text{शे}}{\text{१३}}$$

अतः लब्धियुत राशि=य + क = ३०

इस समीकरण में 'य' 'क' का मान लाना कठिन है क्योंकि इसमें न तो कोई गुण है या न कोई हर अतः निराधार क्रिया होने के कारण अन्यथा प्रयत्न करना है।

अतः हरतुल्य राशि मान ली गई तो प्रश्नानुसार—

$$\frac{१३\times५}{१३}=५=\text{लब्धि}$$

राशियुक्त लब्धि = १३+५ = १८

यह अनुपात कि लब्धियुक्त राशि १८ में यदि ५ लब्धि तो ३० में क्या ?

आगत फल $= \frac{५\times३०}{१८} = \frac{५\times१०}{६} = \frac{५०}{६} = \frac{२५}{३}$ ।

इसे ३० में घटाने से—

$$३० - \frac{२५}{३} = \frac{९० - २५}{३} = \frac{६५}{३} = \text{राशिः}$$

इस राशि से आलाप घटित हो जाता है।

विमर्श—क्या यहां वस्तुतः निराधार क्रिया होती है जिसके कारण ग्रंथकार ने अन्यविध मार्ग अपनाया ?

यदि राशि = य तो प्रश्नानुसार

$$\frac{५\times\text{य}}{१३} = \text{क}।$$

$\therefore$ ५य = १३ क $\therefore$ य $= \frac{१३\text{क}}{५}$

एवम् राशि + लब्धि = ३०

अर्थात् य + क = ३० $\therefore$ य = ३० − क

दोनों 'य' मानों के समीकरण से—

$\frac{१३\text{क}}{५} = ३० - \text{क}$ $\therefore$ १३ क = १५० − ५क

$\therefore$ १८ क = १५०

$$\therefore \text{क} = \frac{१५०}{१८} = \frac{२५}{३}$$

$\therefore$ य $\frac{२५}{३}\times\frac{१३}{५} = \frac{६५}{३}$ = राशिः

अतः उपर्युक्त उदाहरण 'निराधारक्रिया यत्र' के योग्य नहीं है।

अथान्योदाहरणम्—

षडष्टशतकाः क्रीत्वा समार्घेण फलानि ये ।
विक्रीय च पुनः शेषमेकैकं पंचभिः पणैः ।
जाताः समपणास्तेषां कः क्रयो विक्रयश्च कः ॥ १४ ॥

सुधाः—छे, आठ, सौ धन वाले जिन तीन व्यापारियों ने समानभाव से फलों को खरीद तथा विक्री करके शेष फलों को पाँच २ पण में बेचे। वे सभी यदि तुल्य पण वाले हैं तो बतलाइए कि व्यापारियों का क्रय एवं विक्रय मान क्या है ?

उदाहरण

यहाँ क्रयमान = य, विक्रय मान = ११०, मान लिया गया। प्रश्नानुसार

$$\frac{६ \times य}{११०} = क + \frac{शे}{११०} \quad \therefore शे = ६य - १११ क ।$$

शे × ५ = ३० य − ५५० क। इसमें प्रथम लब्धि जोड़ने पर

$$३० य - ५५० क + क = ३० य - ५४९ क = प्रथम का पण ।$$

इसी तरह द्वितीय के पण जानने के लिए

$$\frac{य \times ८}{११०} = लब्धि + \frac{शे'}{११०} । \quad यहाँ लब्धि = \frac{क \times ८}{६} = \frac{४क}{३} ।$$

$$\therefore \frac{८य}{११०} = \frac{४क}{३} + \frac{शे'}{११०} \quad \therefore ८य = \frac{४४०क}{३} + शे'$$

$$\therefore ८ य - \frac{४४०क}{३} = शे' = \frac{२४ य - ४४०क}{३}.$$

'शेषमेंकैकं पञ्चभिः पणैः' कथनानुसार

$$शे' \times ५ = \frac{१२० य - २२०० क}{३}$$

$$अतः द्वितीय का पण = \frac{१२० य - २२०० क}{३} + \frac{४क}{३} =$$

$$\frac{१२०य - २१९६क}{३} = ४० य - ७३२ क ।$$

$$एवमेव — \frac{य \times १००}{११०} = ल + \frac{शे'}{१००} । यहाँ ल' = \frac{क \times १००}{६} =$$

$$\frac{५० क}{३}$$

$$\therefore \frac{१००\ य}{११०} = \frac{५०\ क}{३} + \frac{शे''}{११०}$$

$$\therefore १००\ य = \frac{५५००\ क}{३} + \frac{शे''}{१}$$

$\therefore १००\ य - \frac{५५००क}{३} =$ शे''। पुनः इसे पूर्ववत् ५ से गुणने

तथा पूर्व लब्धि जोड़ने पर

$$\text{तृतीय का पण} = \left(१००\ य - \frac{५५००\ क}{३}\right)५ + \frac{५०\ क}{३}$$

$$= ५००\ य - \frac{२७५००\ क}{३} + \frac{५०\ क}{३} = ५००\ य - \frac{२७४५०\ क}{३}$$

$= ५००\ य - ९१५०\ क$ ।

प्रश्नानुसार ही सभी के पण तुल्य हैं अतः प्रथम द्वितीय के समीकरण से—

३० य − ५४९ क=४० य − ७३२ क

∴ −५४९ क+७३२ क=४० य − ३० य=१० य

$$\therefore य = \frac{१८३\ क}{१०} = \frac{५४९क}{३०}$$

एवं द्वितीय तृतीय के समीकरण से भी

४० य − ७३२ क=५०० य − ९१५० क=

∴ ५०० य − ४० य=९१५० क − ७३२ क=

१५०० य − १२० य=२७४५० क − २१९६ क=२५२५४ क

∴ १३८० य=२५२५४ क

$$\therefore य = \frac{२५२५४\ क}{१३८०} = \frac{५४९\ क}{३०}$$

इसी तरह प्रथम तृतीय के समीकरण से भी

$$य = \frac{५४९\ क}{३०}$$

य मान लाने के लिए कुट्टकावसर प्राप्त हुआ।

चूंकि क्षेपाभाव है, अतः 'क्षेपाभावोऽथवा यत्र' आदि के अनुसार −

गुण=० ल=०।

'इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार यदि इष्ट = न तो

५४९ न+०=ल=य

३० न+०=गुण=क

यदि न=० तो य, क दोनों शून्य हो जायेंगे। यदि न=१ तो य=५४९ क=३०

अत: एक पण में=५४९ फल थे। अत:

प्रथम का फल = $\frac{५४९\times६}{१}$=३२९४।

दूसरे का फल = $\frac{५४९\times८}{१}$=४३९२।

तीसरे का फल= $\frac{५४९\times१००}{१}$=५४९०० ।

पहली बार ११० फल में एक पण की दर से तीनों को क्रमशः २९, ३९, ४९९ पण मिल गये।

तीनों के पास फल शेष क्रमशः १०४, १०२; १० रह गए। पाँच पांच पण में एक एक के भाव से दूसरी बार तीनों को ५२०, ५१०, ५० पण मिलने के कारण— प्रथम के पास पण=२९+५२० = ५४९

द्वितीय के पास पण=३९+५१०=५४९

तृतीय के पास पण=४९९+५०=५४९

अत: सभी समपण वाले हो गए।

विमर्श—प्रस्तुत प्रश्नोत्तर में विक्रय मान ११० कल्पना करना, प्रथम लब्धि=क पुन: छे में यदि 'क' तो आठ में क्या इस तरह का अप्रमाणिक त्रैराशिक के द्वारा समीकरण से—

$$य=\frac{५४९ क}{३०}$$

सिद्ध करना, कुट्टक के अवसर पर हर भाज्य को तीन से अपवर्तित नहीं करना क्योंकि वैसा करने पर इष्ट राशि की प्राप्ति नहीं हो सकती आदि सभी त्रुटियों को जानकर ही भास्कराचार्य ने "एवंविधकल्पनात् क्रियासंकोचा यत्र व्यभिचरति तत्र बुद्धिमद्भिर्बुद्ध्या सन्धेयम्" कह कर अपनी त्रुटि स्वयमेव स्वीकार कर ली है। फिर भी म. म. सुधाकर द्विवेदी ने भास्करीय कल्पना को मन्दानन्दकरी कहा है।

अत: क्रय-विक्रय-मान ज्ञानार्थ प्रयास—

माना कि क्रय=य, विक्रय=क। शेष क्रमशः अ, ग, न

प्रश्न के आलापानुसार—

$$\frac{६ य - अ}{क} + ५ अ = \frac{८ य - ग}{क} + ५ ग = \frac{१०० य - न}{क} + ५ न.$$

(अ) (क) (ग)

∴ ६ य − अ + ५ अ. क = ८ य − ग + ५ ग. क = १०० य − न + ५ न क.

प्रथम द्वितीय समीकरण से—

२ य = ग − ५ग क − अ + ५ अ क = ग − अ + ५ क (अ − ग) ५क (अ − ग) − (अ − ग) = (अ − ग) (५क − १) ...... (१)

एवम् द्वितीय तृतीय समीकरण द्वारा.

८ य − ग + ५ ग क = १०० य − न + ५ न क

पक्षान्तरनयन से

९२ य = न − ५ न क − ग + ५ ग. क = न − ग + ५ क (ग − न)

= ५क (ग − न) − (ग − न) = (ग − न) (५ क − १) ...... (२.)

एवमेव—प्रथम तृतीय संमीकरण से

६ य − अ + ५ अ क = १०० य − न + ५ न क

पक्षान्तरनयन से

९४ य = न − ५ न क − अ + ५ अ क = (न − अ) + ५ क (अ − न) = (अ − न) (५ क − १) ...... (३)

अतः प्रथम स्वरूप से द्वितीय स्वरूप में भाग देने पर

$$\frac{९२ य}{२ य} = ४६ = \frac{(ग - न)(५ क - १)}{(अ - ग)(५ क - १)} = \frac{ग - न}{अ - ग}$$

एवम् प्रथम स्वरूप से तीसरे स्वरूप में भाग देने पर

$$\frac{९४ य}{२ य} = ४७ = \frac{(अ - न)(५ क - १)}{(अ - ग)(५ क - १)} = \frac{अ - न}{अ - ग}$$

१, २, ३ स्वरूपों में २ य = (अ − ग) (५ क − १)

९२ य = (ग − न) (५ क − १)

९४ य = (अ − न) (५ क − १)

अत. यदि ५ क − १ = य तो अ − ग = २.।

ग − न = ९२.।

अ − न = ९४.।

अतः (५ क − १) = य से

अ, क, ग समीकरणों में उत्थापन से

(५ क − १) ६ − अ + ५ अ क = ८ (५ क − १) − ग + ५ ग क = १०० (५ क − १) − न + ५ न क

∴ ३० क – ६ – अ + ५ अ क = ४० क – ८ – ग + ५ ग क =
५०० क – १०० – न + ५ न क

∴ ५ क (अ + ६) – (अ + ६) = ५ क (ग + ८) – (ग + ८)
= ५ क (न + १००) – (न + १००)

∴ (५ क – १) (अ + ६) = (५ क – १) (ग + ८) =
(५ क – १) (न + १००)

(५ क – १) से समीपक्षों में भाग देने पर

अ + ६ = ग + ८ = न + १००

∴ ग – न = ९२

अ – न = ९४

अतः अ का मान ९४ से अल्प नहीं हो सकता, क्यों कि 'न' का कुछ आस्तित्व है। अतः अ का मान यदि इष्ट माना जाय तो क्रय विक्रय मान ज्ञात हो सकते अतः अ + ६ = क माना जा सकता।

अतः यदि अ = १०४ तो विक्रय = ११०, क्रय = ५४९

यदि अ = १०० तो विक्रय = १०६, क्रय = ५२९

यदि अ = १२० तो विक्रय = १२६ क्रय = ६२९

इस तरह अनेक क्रय विक्रय होंगें

आधुनिक बीजगणित की तरह छात्रों के बुद्धिवैशद्य के लिए अनेकवर्ण सम्बद्ध कुछ उदाहरण एवं सोत्तर प्रश्न दे रहा हूँ।

उदा० (१) ३ अ + ४ क = २९
५ अ – २ क = ५ इसमें 'अ' 'क' का मान बतलाइए

प्रथम समीकरण से ३ अ = २९ – ४ क

$$\therefore अ = \frac{२९ - ४ क}{३}$$

द्वितीय समीकरण से ५ अ = ५ + २ क

$$\therefore अ = \frac{५ + २ क}{५}$$

दोनों 'अ' मानों के समीकरण से :—

$$\frac{\text{२९ − ४क}}{\text{३}} = \frac{\text{५+२क}}{\text{५}} \therefore \text{१४५ − २ क = १५ + ६ क}$$

$$\therefore \text{१३० = २६ क} \therefore \text{क} = \frac{\text{१३०}}{\text{२६}} = \text{५}$$

क मान से अ मान में उत्थापन देने पर

$$\text{अ} = \frac{\text{५+२क}}{\text{५}} = \frac{\text{५क+१०}}{\text{५}} = \frac{\text{१५}}{\text{५}} = \text{३.}$$

अतः अ = ३, क = ५.

उदा०(२) $\text{५ अ} + \frac{\text{३ अ−२ क}}{\text{७}} = \text{१६}$

$\frac{\text{५अ−२क}}{\text{२}} - \frac{\text{३अ+१६}}{\text{५}} = \frac{\text{३}}{\text{२}}$ | अ, क, मान बतलाइए

प्रश्नानुसार ३५ अ+३ अ−२ क=११२. ∴ ३८ अ−२क=११२

$$\therefore \text{अ} = \frac{\text{११२+२क}}{\text{३८}}$$

$$\text{एवम्} \ \frac{\text{२५ अ − १० क − ६ अ − ३२}}{\text{१०}} = \frac{\text{३}}{\text{२}}$$

$$\therefore \text{१९ अ − १० क − ३२ = १५}$$

$$\therefore \text{१९ − १० क = ४७}$$

$$\text{१९ अ = ४७ + १० क}$$

$$\therefore \text{अ} = \frac{\text{४७ + १० क}}{\text{१९}}$$

दोनों 'अ' मानों के समीकरण से

$$\frac{\text{११२ + २ क}}{\text{३८}} = \frac{\text{४७ + १०क}}{\text{१९}}$$

$$\therefore \text{११२ + २ क = ९४ + २० क}$$

$$\therefore \text{११२ − ९४ = १८ क}$$

$$\therefore \text{१८ = १८ क} \therefore \text{क = १}$$

इससे अ मान में उत्थापन से

$$\text{अ} = \frac{\text{११२ + २ क}}{\text{३८}} = \frac{\text{११४}}{\text{३८}} = \text{३ ।}$$

अतः उपर्युक्त प्रश्न में अ = ३ क = १।

उदाहरण (३)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{अ.क}}{\text{अ}+\text{क}} &= ६\\ \frac{\text{अ.क}}{\text{अ}-\text{क}} &= ३०\end{aligned}\right|$$ अ, क, का मान बतलाइए :—

प्रथम समीकरणानुसार

$$\text{अ.क} = ६\text{अ} + ६\text{क}$$

$$\therefore \text{अ.क} - ६\text{अ} = ६\text{क}$$

$$\therefore \text{अ}(\text{क} - ६) = ६\text{क}$$

$$\therefore \text{अ} = \frac{६\text{क}}{\text{क}-६}$$

इसी तरह २य समीकरण से

$$\text{अ.क} = ३०\text{अ} - ३०\text{क}$$

$$\therefore ३०\text{अ} - \text{अक} = ३०\text{क}$$

$$\therefore \text{अ}(३० - \text{क}) = ३०\text{क}$$

$$\therefore \text{अ} = \frac{३०\text{क}}{३०-\text{क}}$$

दोनों 'अ' मानों के समीकरण से

$$\frac{६\text{क}}{\text{क}-६} = \frac{३०\text{क}}{३०-\text{क}}$$

$$\therefore \frac{६}{\text{क}-६} = \frac{३०}{३०-\text{क}}$$

$$\therefore १८० - ६\text{क} = ३०\text{क} - १८०$$

$$\therefore ३६० = ३६\text{क}$$

$$\therefore \text{क} = \frac{३६०}{३६} = १०$$

$$\text{अतः अ} = \frac{६\text{क}}{\text{क}-६} = \frac{६०}{१०-६} = \frac{६०}{४} = १५$$

अतः अ = १५, क = १०

उदाहरण (४)

$$अ + \frac{क + २}{३} = ९$$
$$\frac{३अ \;\; १}{४} + २क = १३$$

अ, क, मान क्या है ?

प्रथम समीकरण से ३अ + क + २ = २७

$$\therefore अ = \frac{२५ - क}{३}$$

द्वितीय समीकरण से

$$\therefore अ = \frac{५३ - ८क}{३}$$

दोनों समीकरण से

$$\frac{२५-क}{३} = \frac{५३-८क}{३}$$

$$\therefore २५ - क = ५३ - ८क$$

$$\therefore ७क = ५३ - २५ = २८$$

$$\therefore क = ४$$

$$\therefore अ = \frac{२५ - ४}{७} = ७$$

अतः अ = ७ क = ४

उदाहरण (५)

$\frac{अक}{अ+क} = २,\ \frac{१}{अ} - \frac{१}{क} = \frac{१}{६}$ तो अ, क, का मान बतलाइए

प्रथम समीकरण से

$$\therefore अ.क = २अ + २क$$

$$\therefore अ क - २अ = २क$$

$$\therefore अ(क - २) = २क$$

$$\therefore अ = \frac{२क}{क-२} ।$$

एवम् $\frac{१}{अ} - \frac{१}{क} = \frac{१}{६}$

$$\therefore \frac{\text{क} - \text{अ}}{\text{अ.क}} = \frac{\text{१}}{\text{६}}$$

वा $\text{६क} - \text{६ अ} = \text{अ.क}$

$\therefore \text{६क} = \text{६अ} + \text{अ.क}$

$= \text{अ} (\text{६} + \text{क})$

अत: $\text{अ} = \frac{\text{६क}}{\text{६+क}}$

दोनों अ मानों के समकीकरण से

$$\therefore \frac{\text{२क}}{\text{क} - \text{२}} = \frac{\text{६क}}{\text{६+क}}$$

$$\therefore \frac{\text{२}}{\text{क} - \text{२}} = \frac{\text{६}}{\text{६+क}}$$

$\text{२} (\text{६+क}) = (\text{क} - \text{२})\ \text{६} = \text{६क} - \text{१२}$

$\therefore \text{१२+२क} = \text{६क} - \text{१२}$

$\therefore \text{२४} = \text{`क} \quad \therefore \text{क} = \text{६}$

अत: $\text{अ} = \frac{\text{६क}}{\text{६+क}} = \frac{\text{३६}}{\text{१२}} = \text{३}$

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) ४अ − ५क = ३५, ३अ + ७क = ३७ — इसमें अ = १०, क = १

(२) २अ + ३क = १७, ७क − ९अ = २६ — इसमें अ = १, क = ५

(३) २अ + ३क = ८, ३अ − ४क = −५ — इसमें अ = १, क = २

(४) ७अ − ८क = − १४, ५अ − ३क = ९ — इसमें अ = ६, क = ७

(५) ४अ − ५क = −८, २अ − ३क = −६ — इसमें अ = ३, क = ४

(६) २अ + ३क = १७, ७क − ९अ = २६ — इसमें अ = १, क = ५

(७) $\frac{\text{अ}}{\text{३}} + \frac{\text{क}}{\text{५}} = \text{७}$, $\frac{\text{अ}}{\text{४}} + \frac{\text{क}}{\text{३}} = \text{८}$ — इसमें अ = १२, क = १५

(८) $३अ + ५क = ३१$ इसमें $अ = ७$
$७अ - २क = ४५$ $क = २$

(९) $२अ + ३क = १२$ इसमें $अ = ३$
$३अ + ४क = १$ $क = २$

(१०) $-६अ + ५क = -२$ इसमें $अ = ७$
$१३अ - ९क = १९$ $क = ८$

(११) $५अ - ३क = ५$ इसमें $अ = ४$
$२क - ३अ = -२$ $क = ५$

दूसरी रीति—पहले प्रत्येक समीकरण में छेदगम आदि करने के बाद दोनों समीकरणों के एक ही अव्यक्त के दो गुणकाङ्कों से परस्पर समीकरणों के गुणने पर दोनों समीकरणों में तुल्य गुण गुणित एक-एक अव्यक्त हो जायेंगे। फिर दोनों समीकरणों के अन्तर या योग करने पर प्रथम पक्ष में अव्यक्ताङ्क और दूसरे पक्ष में व्यक्ताङ्क हो जायेंगे। अतः द्वितीय अव्यक्ताङ्क का मान व्यक्त हो जायगा। पुनः उत्थापन से प्रथम अव्यक्त का मान भी व्यक्त हो जाता है—

उदाहरण (१) $३अ + ४क = ३२$, $५अ - ६क = २८$ | इसमें अ, क, का माम ज्ञातव्य है।

प्रथम समीकरण के अव्यक्ताङ्क के गुणकांक ३ से द्वितीय समीकरण को और द्वितीय समीकरण के अव्यक्ताङ्क के गुणकांक ५ से प्रथम समीकरण को गुणने पर।

$१५अ + २०क = १६०$

$१५अ - १८क = ८४$

दोनों के अन्तर करने पर

$३८क = ७६$

$\therefore क = २$

क मान से किसी समीकरण में उत्थापन से

$३अ + ८ = ३२$

$\therefore ३अ = २४$

$अ = \frac{२४}{३} = ८$

अतः $अ = ८$, $क = २$

उदाहरण (२) $२अ + ३क = ८$, $३अ - ४क = -५$ | इसमे अ, क मान क्या है?

प्रथम समीकरण के अव्यक्ताङ्क अ के गुणनांक २ से द्वितीय समीकरण को एवं द्वितीय समीकरण के अव्यक्तांक 'अ' के गुणनांक ३ से प्रथम समीकरण को गुणने पर

६अ + ९क = २४

६अ − ८क = −१०

पुनः दोनों समीकरणों के अन्तर करने पर

१७क = ३४

∴ क = २

अतः अ = $\frac{८-३क}{२} = \frac{८-६}{२}$ = १ = अ

उदा० (३) अ क + ४० = (अ+२) (क+३) | अ, क, मान बतलाइये।
अ क − ७ = (अ+३) (क−२) |

अ क + ४० = अ क + २क + ३अ + ६ (१)

अ क − ७ = अ क + ३क − २अ − ६ (२)

प्रथम मे द्वितीय को घटाने पर

४० − (− ७) = अ क + २क + ३ अ + ६ − अ क − ३क + २अ + ६

∴ ४७ =

४७ = १२+५अ − क

∴ ३५ = ५अ − क

∴ ३५ + क = ५अ

∴ $\frac{३५+क}{५}$ = अ

४० = २क + ३अ + ६

∴ अ = $\frac{३४ - २क}{३}$

दोनों 'अ' मानों के समीकरण से

∴ $\frac{३५+क}{५} = \frac{३४ - २क}{३}$

∴ १०५ + ३क = १७० − १० क

∴ १३क = ६५

∴ क = ५

इसलिए 'अ' मान में उत्थापन से अ = ८।

उदाहरण (४)

$५ अ + \frac{क+४}{५} = ८३$

$३ क - \frac{अ - ७}{९} = ३२$ अ, क का माग बतलाइए

प्रथम समीकरण=२५ अ+क+४=४१५

द्वितीय समीकरण=२७ क − अ+७ = २८८

∴ २५ अ+क=४११

$∴ \frac{४११ - क}{२५} = अ$

एवम्− अ + २७ क=२८१

∴ २५ अ + क=४११

तथा द्वि. समी. को २५ से गुणने पर

− २५ अ + ६७५ क=७०२५

अत: दोनों के योग करने से—

६७६ क=७४३६

$∴ क = \frac{७४३६}{६७६} = ११$

$अत: अ = \frac{४११ - क}{२५} = \frac{४००}{२५} = १६$

अत: अ=१६, क = ११

उदाहरण (५)

१५ अ+२८ क=२८७ | अ, क का मान बतलाइए।
१८ अ − ३५ क=२२ |

प्रथम समीकरणस्थ अव्यक्तांक 'क' के गुणकांक २८ से दूसरे समीकरण को, और अव्यक्तांक क के गुणकांक ३५ से प्रथम समीकरण को गुणने पर

५२५अ + ९८०क = ८६४५

५०४अ − ९८०क = ६१६

दोनों समीकरणों के योग करने पर

१०२९ अ=९२६१

$∴ \frac{९२६१}{१०२९} = अ = ९$

$∴ क = \frac{२८७ - १३५}{२८} = ४$

अभ्यासार्थं कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) ८ अ − ९ क = २०
 ७ अ − १० क = ९ इसमें अ = ७, क = ४

(२) १२ अ + ११ क = ७०
 ८ अ − ७ क = १८ इसमें अ = ४, क = २

(३) १३ अ + ६ क = ५८
 ५ अ − ११ क = ९ इसमें अ = ४, क = १

(४) २५ अ − १४ क = ८
 १२ अ + ७ क = ४५ इसमें अ = २, क = ३

(५) $\frac{\text{अ}}{\text{५}} + \frac{\text{क}}{\text{८}} = \text{१४}$ इसमें अ = ३५
 $\frac{\text{अ}}{\text{७}} + \frac{\text{क}}{\text{७}} = \text{१३}$ क = ५६

(६) ४ अ − ३ क = ०
 ७ अ − ११ क = − ९२ इसमें अ = १२, क = १६

(७) ५ अ + ११ क = १४६
 ११ अ + ५ क = ११० इसमें अ = ५, क = ११

(८) $\frac{\text{अ+क}}{\text{२}} + \frac{\text{३ अ − ५ क}}{\text{४}} = \text{२}$ इसमें अ = ७
 $\frac{\text{अ}}{\text{१४}} + \frac{\text{क}}{\text{१८}} = \text{१}$ क = ९

(९) $\frac{\text{४}}{\text{अ}} + \frac{\text{१०}}{\text{क}} = \text{२}$ इसमें अ = ४
 $\frac{\text{३}}{\text{अ}} + \frac{\text{२}}{\text{क}} = \frac{\text{१९}}{\text{२०}}$ क = १०

(१०) $\frac{\text{१४}}{\text{अ+क}} + \frac{\text{३}}{\text{अ − क}} = \text{५}$ इसमें अ = ४
 $\frac{\text{२१}}{\text{अ+क}} - \frac{\text{१}}{\text{अ − क}} = \text{२}$ क = ३

तीसरी रीति

जिन दो समीकरणों में जिस अव्यक्त की उन्मिति साधारण आयास से मिले उसे लाकर उसके द्वारा दूसरे समीकरण में उत्थापन देने से भी ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें एक अव्यक्त रहे। ऐसी स्थिति में भी पूर्ववत् समीकरण से दोनों अव्यक्तों का मान निकल जाता है।

जैसे उदाहरण (१)

७ अ − ५ क = ११
३ अ + २ क = १३ इसमें अ, क का माम निकालिए

द्वितीय समीकरण से अ $= \frac{१३ - २ क}{३}$ ।

$\therefore \frac{७ (१३ - २ क)}{३} - ५ क = ११$

$\therefore$ ७ (१३ − २ क) − १५ क = ३३

$\therefore$ ९१ − १४ क − १५ क = ३३

$\therefore$ ९१ − ३३ = २९ क

वा ५८ = २९ क $\therefore$ क = २

अतः अ = ३

उदा० (२) ३ अ + ५ क = ३१
७ अ − २ क = ४५ इसमें अ, क का मान बतलाइए।

यहाँ भी प्रथम समीकरण से—

$अ = \frac{३१ - ५ क}{३}$

अतः दूसरे समीकरण में उत्थापन से—

$\left(\frac{३१ - ५ क}{३} \right) ७ - २ क = ४५$

$\therefore$ २१७ − ३५ क − ६ क = १३५

$\therefore$ २१७ − ४१ क = १३५

$\therefore$ ८२ = ४१ क $\therefore$ क = २ अ = ७

उदाहरण (३) २ अ + ३ क = १२
३ अ + ४ क = १७ इसमें अ, क, का मान लाइए—

प्रथम समीकरण से अ $= \frac{१२ - ३ क}{२}$

इससे दूसरे समीकरण में उत्थापन से

$\left(\frac{१२ - ३ क}{२} \right) ३ + ४ क = १७$

$\therefore$ ३६ − ९ क + ८ क = ३४

वा ३६ − क = ३४ $\therefore$ क = २

अतः अ = ३.

उदाहरण (४) $५ अ + \frac{३ अ - २ क}{७} = १६$, $\frac{५ अ - २क}{२} - \frac{३ अ + १६}{५} = १ \frac{१}{२}$ — इसमें अ, क का मान बतलाइए

प्रथम समीकरण से

$$\frac{३५ अ + ३ अ - २ क}{७} = १६$$

$$\therefore ३८ अ - २ क = ११२$$

$$\therefore अ = \frac{११२ + २ क}{३८} = \frac{५६ + क}{१९}$$

इस अ के मान से दूसरे समीकरण में उत्थापन से

$$\frac{\left(\frac{५६ + क}{१९}\right) ५ - २ क}{२} - \frac{\left(\frac{५६ + क}{१९}\right) ३ + १६}{५} = १\frac{१}{२}$$

$$\therefore \frac{२८० + ५क - ३८क}{३८} - \left(\frac{१६८ + ३ क + ३०४}{९५}\right) = \frac{३}{२}$$

$$\therefore \frac{२८० - ३३ क}{३८} - \left(\frac{४७२ + ३क}{९५}\right) = \frac{३}{२}$$

$$\therefore \frac{१४०० - १६५ क - ९४४ - ६क}{१९०} = \frac{३}{२}$$

$$\therefore \frac{४५६ - १७१क}{९५} = ३$$

$$\therefore ४५६ - १७१ क = २८५$$

$$\therefore १७१ = १७१ क$$

$$\therefore क = १ \quad अतः \quad अ = ३$$

उदाहरण (५)

$$\frac{अ}{३} + \frac{क}{५} = ७$$

$$\frac{अ}{४} + \frac{क}{३} = ८$$

इसमें अ, क, का मान बतलाइए—

प्रथम समीकरण से $अ = \frac{१०५ - ३क}{५}$

इससे दूसरे समीकरण में उत्थापन से

$$\frac{१०५-३क}{५\times४}+\frac{क}{३}=८$$

$$\therefore \frac{३(१०५-३\ क)+२०\ क}{६०}=८$$

वा ३१५−९क+२० क=४८०

वा ३१५+११ क=४८०

∴ ११ क=१६५

$$\therefore क=\frac{१६५}{११}=१५.$$

अत: अ = १२.

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) ३ अ+४ क=३८
६ अ − क=३१ इसमें अ=६, क=५

(२) अ+३ क=१५
२अ−क=२ इसमें अ=३, क=४

(३) ३ अ+४ क=३२
५ अ−६ क=२८ इसमें अ=८, क=२

(४) २ अ+३ क=८
३ अ−४ क=−५ इसमें अ=१, क=२

(५) ५ क − ६ अ = − २
− ९ क+१३ अ = १९ } इसमें अ = ७, क = ८

(६) १५ अ+७ क = २४६
९ अ − ४ क = ० } इसमें अ = ८, क = १८

(७) $\frac{४ क − ६}{अ+क}=२$
$\frac{८ अ − ५}{क − अ}=९$ इसमें अ = ४, क = ७

(८) ३ अ − ५ क = − ९
५ अ+२ क = १६ } इसमें अ=२, क=३

(९) $\frac{३ अ \times क}{अ+२ क}=\frac{३}{२}$
$४अ-\frac{३}{क}अ=२$ इसमें अ = २, क = १

(१०) $\frac{अ}{३}+\frac{क}{४}=\frac{३१}{४}$ इसमें अ=१२
$\frac{अ}{४}-\frac{क}{६}=\frac{११}{२}$ क=१५

जहां तीन अव्यक्त हों वहाँ तीन समीकरण होंगे। पहले प्रथम समीकरण के द्वारा प्रथम अव्यक्त का मान लाकर उसी अव्यक्त का दूसरे समीकरण से मान लावें, पुनः दोनों मानों के समीकरण से एक पक्ष में दो अव्यक्त और दूसरे पक्ष में व्यक्त हो जायेंगे इसी तरह द्वितीय तृतीय समीकरण से भी प्रथम पक्ष में पहले की तरह दो अव्यक्त और दूसरे में व्यक्त होंगे इस तरह दूसरे अव्यक्त के दो मान आयेंगे, पुनः दोनों के समीकरण से तीसरे अव्यक्त का मान आयेगा। उत्थापन से सभी अव्यक्तों का व्यक्त मान आ जाता है।

जैसे उदारहण (१) अ+क+ग=१३
२ अ − ३ क+४ ग = ०
३ अ+४ क − ५ ग=२९
इसमें अ, क, ग का मान लाना है

प्रथम समीकरण से अ=१३ − क − ग

द्वितीय समी० से अ=$\frac{३ क - ४ ग}{२}$

$\therefore$ १३ − क − ग=$\frac{३ क - ४ ग}{२}$

वा २६ − २ क − २ ग=३ क − ४ ग

$\therefore$ २६=५क − २ ग

इसी तरह तृतीय समीकरण से—

अ=$\frac{२९ - ४ क+५ ग}{३}$

$\therefore \frac{३ क - ४ ग}{२}=\frac{२९ - ४ क+५ ग}{३}$

९ क − १२ ग=५८ − ८ क+१० ग

$\therefore$ १७ क − २२ ग=५८

$\therefore$ क=$\frac{५८+२२ ग}{१७}$

५ क - २ ग=२६ ऊपर सिद्ध है

$\therefore$ क=$\frac{२६+२ ग}{५}$

∴ दोनों के समीकरण से—

$$\frac{\text{५८+२२ ग}}{\text{१७}} = \frac{\text{२६+२ ग}}{\text{५}}$$

∴ २९०+११० ग=४४२+३४ ग

∴ ७६ ग = १५२ ∴ ग=२

अतः क = ६ और अ=५

उदा० (२) ५ अ+६ क+८ ग = ०
३ अ+४ क+६ ग = ०
अ+५ क+१६ ग=३ } यहाँ अ, क, ग का मान क्या है ?

प्रथम समीकरण से अ= $\frac{\text{− ६ क − ८ ग}}{\text{५}}$

द्वितीय समी० से अ= $\frac{\text{− ४ क − ६ ग}}{\text{३}}$

तृतीय समीकरण से अ = ३ − ५ क − १६ ग

∴ $\frac{\text{− ६ क − ८ ग}}{\text{५}} = \frac{\text{− ४क − ६ग}}{\text{३}}$

∴ − १८ क − २४ ग = − २० क − ३० ग

∴ २क = − ६ ग   ∴ क= − ३ ग ······ (१)

एवं $\frac{\text{−४ क − ६ ग}}{\text{३}}$ = ३ − ५ क −१६ ग

∴ − ४ क − ६ ग = ९ − १५ क − ४८ ग

∴ ११ क+४२ ग=९

∴ क= $\frac{\text{९ − ४२ ग}}{\text{११}}$

दोनों क मानों के समीकरण से—

− ३ ग = $\frac{\text{९ − ४२ ग}}{\text{११}}$

− ३३ ग = ९ − ४२ ग

∴ ९ ग - ९   ∴ ग=१

उत्थापन से क= − ३, अ=२

उदा० (३) $\left.\begin{array}{l}\text{२अ+३क+४ग = २५}\\ \text{३अ+४क+५ग = ३४}\\ \text{४अ+५क+७ग = ४५}\end{array}\right\}$ अ, क, ग का मान बतलाइए

प्रथम समीकरण से $\text{अ} = \dfrac{\text{२५ − ३क − ४ग}}{\text{२}}$

द्वितीय समीकरण से $\text{अ} = \dfrac{\text{३४ − ४क − ५ग}}{\text{३}}$

तृतीय समीकरण से $\text{अ} = \dfrac{\text{४५ − ५क − ७ग}}{\text{४}}$

अतः $\dfrac{\text{२५ − ३क − ४ग}}{\text{२}} = \dfrac{\text{३४ − ४क − ५ग}}{\text{३}}$

∴ ७५ − ९क − १२ग = ६८ − ८क − १०ग

∴ ७ = क + २ग

∴ क = ७ − २ग ....(१)

एवम् $\dfrac{\text{३४ − ४क − ५ग}}{\text{३}} = \dfrac{\text{४५ − ५क − ७ग}}{\text{४}}$

∴ १३६ − १६क − २०ग = १३५ − १५क − २१ग

∴ १ = क − ग   ∴ क = १ + ग

दोनों क मानो के समीकरण से

∴ ७ − २ग = १ + ग

∴ ६ = ३ग ∴ ग = २

उत्थापन से क = ३ अ = ४

उदाहृण (४) $\left.\begin{array}{l}\text{अ + क = ८}\\ \text{अ + ग = १०}\\ \text{क + ग = १२}\end{array}\right\}$ इसमें अ, क, ग का मान निकालिए :—

प्रथम समीकरण से अ = ८ − क

द्वितीय समीकरण से अ = १० − ग

∴ ८ − क = १० − ग

∴ ग − क = २

∵ ग + क = १२

अतः ग = ७ क = ५

अतः अ = ३

उदाहरण (५)

$$\frac{१}{२}अ + \frac{१}{३}क = ६$$
$$\frac{१}{२}अ + \frac{१}{४}ग = ५$$
$$\frac{१}{३}क + \frac{१}{४}ग = ३$$

अ, क, ग का मान बतलाइए :—

प्रथम समीकरण से

$$अ = \left(६ - \frac{१}{३}क\right)२ = १२ - \frac{२}{३}क$$

द्वितीय समीकरण से

$$अ = \left(५ - \frac{१}{४}ग\right)२ = १० - \frac{१}{२}ग$$

$$\therefore १२ - \frac{२}{३}क = १० - \frac{१}{२}ग$$

$$२ = \frac{२}{३}क - \frac{१}{२}ग = \frac{४क - ३ग}{६}$$

$$\therefore १२ = ४क - ३ग$$

$$\therefore क = \frac{१२ + ३ग}{४}$$

एवम् तृतीय समीकरण से

$$\frac{१}{३}क = ३ - \frac{१}{४}ग = \frac{१२ - ग}{४}$$

$$\therefore क = \frac{३६ - ३ग}{४}$$

'क' मानों के समीकरण से

$$\frac{१२ + ३ग}{४} = \frac{३६ - ३ग}{४}$$

$$\therefore १२ + ३ग = ३६ - ३ग$$

$$\therefore ६ग = २४ \quad \therefore ग = ४$$

उत्थापन से क = ६ अ = ८

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न :—

(१) अ + २क − ४ग = ७   इसमें
२अ + क + ९ग = ५०   अ = ९ क = ५
३अ − ५क + ग = ५   ग = ३

(२) अ + क + ग = २०   अ = ५
३अ + क + ० = २३   इसमें क = ८
० + ५क − २ग = २६   ग = ७

(३) अ − २क + ग = ०   अ = १
९अ − ८क + ३ग = ०   इसमें क = ३
२अ + ३क + ५ग = ३६   ग = ५

(४) ७अ + ३क − ८ग = ०   अ = २
५अ − ७क + ८ग = ०   इसमें क = ६
३अ + ५क + ७ग = ६४   ग = ४

(५) ४अ − १३क + ८ग = ०   अ = ३
७अ + ६क − ९ग = ०   इसमें क = ४
$\frac{५}{\text{अ}} + \frac{८}{\text{क}} + \frac{१५}{\text{ग}} = \frac{२०}{३}$ ग = ५

(६) $\frac{१}{\text{अ}} + \frac{२}{\text{क}} + \frac{३}{\text{ग}} = \frac{५}{३}$
$\frac{२}{\text{अ}} + \frac{३}{\text{क}} - \frac{४}{\text{ग}} = \frac{४}{३}$ इसमें अ = २ क = ३ ग = ६
$\frac{३}{\text{अ}} - \frac{४}{\text{क}} + \frac{५}{\text{ग}} = १$

(७) अ + क + ग = ९   अ = २
अ + क + घ = ६   क = ३
अ + ग + घ = ७   इसमें ग = ४
क + ग + घ = ८   घ = १

(८) २अ − ७क + ११ग = ०   अ = ३
६अ − ८क + ७ग = ०   इसमें क = ४
३अ + ४क + ५ग = ३५   ग = २

अनेक वर्ण सम्बद्ध कुछ अन्य सोत्तर प्रश्न

(१) दो संख्याओं का भाग फल = २ और दोनों का अन्तर = ५० तो दोनों संख्याओं को बतलाइए।   उत्तर ५०, १००

(२) पिता की आयु पुत्र की आयु से पंचगुने से एक वर्ष अधिक है, दो वर्ष पहले पिता की आयु पुत्र की आयु से अष्टगुणित थी तो वर्त्तमान आयु दोनों की क्या है ? पिता की आयु = २६, पुत्र की आयु = ५ ।

(३) वे कौन सी दो संख्याएँ हैं जिसमें बड़ी संख्या का चतुर्थांश और छोटी का तृतीयांश मिलकर दश होता है और बड़ी संख्या के चतुर्थांश में छोटी के तृतीयांश घटाने पर शून्य हो जाता है ?

उत्तर २०, १५

(४) वे कौन सी दो संख्याएँ हैं जिनमें छोटी संख्या में बड़ी संख्या का पञ्चमांश मिलाते हैं हो तो बड़ी संख्या से ७ कम होता है, और बड़ी संख्या में एक जोड़ने पर छोटी संख्या का दूना हो जाता है, तो संख्याएँ बतलाइए ।

उत्तर २५, १३,

(५) एक व्यापारी ने कुछ पशुओं को खरीदना चाहा ४२ रु० प्रति पशु खरीदने पर उसे २८ रुपयों की कमी हो जाती है, यदि उतने ही पशु ४० रु० प्रति पशु खरीदता है तो उसके पास ४० रुपये बच जाते हैं तो बतलाइए कितने रुपये उसके पास पशु खरीदने के लिए थे ?

उत्तर १४०० रुपये

(६) राम ने श्याम से कहा कि यदि तुम अपने धन का तृतीयांश मुझे दे दो तो मैं तुमसे ड्योढ़ा हो जाऊँगा, श्याम ने उससे कहा यदि तुम अपने धन का पञ्चमांश मुझे दे दो तो मैं तुमसे दूने से भी पाँच अधिक हो जाऊँगा ।

उत्तर = राम = ५०, श्याम = ७५

(७) वैसी कौन सी दो संख्याएँ हैं ? जिनमें पहली में एक घटाकर और दूसरी में तीन जोड़ कर जो आवे उन दोनों का गुणन फल, दोनों संख्याओं का गुणन फल और प्रथम में एक जोड़ कर और दूसरी में दो घटाकर जो फल मिले उनका गुणन फल; सभी बराबर हों ।

उत्तर = ५, १२

यहाँ संख्याएँ = य, क,

प्रश्नानुसार $(य - १) (क + ३) = य \times क - (य + १) (क - २)$

$य क - क + ३य - ३ = य.क = य क + क - २य - २$

$\therefore - क + ३य - ३ = ०$

$य = \frac{क + ३}{३}$,

एवम् $य क = य क + क - २य - २$

$\therefore क - २य - २ = ०$

$\therefore य = \frac{क - २}{२}$

$\therefore \frac{क + ३}{३} = \frac{क - २}{२}$

$\therefore २क + ६ = ३क - ६$

$\therefore क = १२$

उत्थापन से $य = \frac{१५}{३} = ५$

(८) राम और श्याम के पास मिलाकर १०० रुपये है। राम अपनी रकम का आधा और श्याम अपनी रकम की चौथाई यदि दान कर दे तो दोनों के पास तीस-तीस रुपये रह जायेंगे तो बतलाइए प्रत्येक के पास कितने-कितने रुपये थे ?

राम = ६०, श्याम = ४०

(९) एक बगीचे में आम, अमरूद और कटहल के पेड़ मिलकर पाँच सौ थे। आम की संख्या से अमरूद पेड़ की संख्या ५० कम और कटहल पेड़ की संख्या एक सौ अधिक थी तो बताइए आम, अमरूद और कटहल के पेड़ों की संख्या अलग-अलग क्या है !

आम = १५०; अमरूद = १००, कटहल = २५०

(१०) एक व्यापारी ने २० रुपये लेकर ५ रुपये प्रति कटहल एक रुपये प्रति आम और चार आने प्रति अमरूद की दर से २० फल खरीदे तो बताइए आम, कटहल तथा अमरूद की संख्याएँ कितनी हैं ?

कटहल=३, आम=१, अमरूद=१६

प्रश्नानामानन्त्याद् बुद्धेर्बीजस्य चाभेदात् ।
विस्तारभारभीते विरिरंसामीह गणितज्ञाः ॥

देवचन्द्रकृतबीजवासना, सद्विमर्शसहिता सुधान्विताऽ
नेकवर्णजसमीकृतौ बुधैः सद्विवेचनपरैर्विभाव्यताम् ॥

इति सविमर्शसुधाव्याख्योपेते सवासने भास्करीयबीजगणितेऽनेकवर्णसमीकरणं समाप्तम् ।

अथानेकवर्णमध्यमाहरणभेदाः ।

तत्र श्लोकोत्तरार्धादारभ्य सूत्रं सार्धवृत्तत्रयम्—

वर्गाद्यं चेत् तुल्यशुद्धौ कृतायां पक्षस्यैकस्योक्तवद्वर्गमूलम् ।
वर्गप्रकृत्याऽपरपक्षमूलं तयोः समीकारविधिः पुनश्च ॥ १ ॥

वर्गप्रकृत्या विषयो न चेत् स्यात् तदाऽन्यवर्णस्य कृतेः समं तम् ।
कृत्वा परं पक्षमथान्यमानं कृतिप्रकृत्याऽऽद्यमितिस्तथा च ॥२॥

वर्गप्रकृत्या विषयो यथा स्यात् तथा सुधीभिर्बहुधा विचिन्त्यम् ।
बीजं मतिर्विविधवर्णसहायिनी हि
मन्दावबोधविधये विबुधैर्निजाऽऽद्यैः ।
विस्तारिता गणकतामरसांशुमद्भि-
र्या सैव बीजगणिताह्वयतामुपेता ॥३॥

यत्र पक्षयोः शोधने कृते सति अव्यक्तवर्गादिकमवशेषं भवति तत्र पूर्ववत् पक्षौ तदेष्टेन निहत्येत्यादिना एकस्य पक्षस्य मूलं ग्राह्यम् । अन्यपक्षे यद्यव्यक्तवर्गः सरूपो वर्तते तदा तस्य पक्षस्य वर्गप्रकृत्या मूले साध्ये । तत्र वर्णवर्गे योऽङ्कः सा प्रकृतिः । रूपाणि क्षेपः प्रकल्प्यः । एवं यत् कनिष्ठपदं तत् प्रकृतिवर्णमानं यज्ज्येष्ठं तस्य वर्गस्य मूलम् । अतस्तत् पूर्वपक्षमूलेन समं कृत्वा पूर्ववर्णमानं साध्यम् ।

अथ यद्यन्यपक्षे व्यक्तवर्गः साव्यक्तोऽव्यक्तमेव सरूपमरूपं वा वर्तते तदा वर्गप्रकृतेर्न विषयः कथं तत्र मूलमित्यत आह । वर्गप्रकृत्या इति । तदाऽन्यवर्णवर्गसमं कृत्वा प्राग्वदेकस्य पक्षस्य मूलं ग्राह्यं तदन्यपक्षस्य वर्गप्रकृत्या मूले साध्ये तत्रापि कनिष्ठं प्रकृतिवर्णमानं ज्येष्ठं तत्पक्षस्य पदमिति पदानां यथोचितं समीकरणं कृत्वा वर्णमानानि साध्यानि ।

अथ यदि द्वितीयपक्षे तथाभूतोऽपि न विषयस्तदा यथा यथा वर्गप्रकृत्या विषयो भवति तथा तथा बुद्धिमद्भिर्बुद्ध्या विधायाव्यक्त-

मानानि ज्ञातव्यानि। यदि बुद्ध्यैव ज्ञातव्यानि तर्हि बीजेन किमित्याशङ्क्याह। बीजं मतिरिति। हि यस्मात् कारणाद्बुद्धिरेव पारमार्थिकं बीजं वर्णास्तु तत्सहायाः। गणककमलतिग्मरश्मिभिराद्यै राचार्यैर्मन्दावबोधार्थमात्मीया या मतिर्विविधवर्णान् सहायान् कृत्वा विस्तारं नीता सैवेह संप्रति बीजगणितसंज्ञां गता। इदं किल सिद्धान्ते मूलसूत्रं संक्षिप्तमुक्तं बालावबोधार्थं किञ्चिद्विस्तीर्योच्यते ॥

सुधा - पक्षद्वय में समशोधनादि करने के बाद एक पक्ष मे अव्यक्तवर्गादिक अवशिष्ट रहे वहाँ वर्गमूल लेने की पद्धति से उसका वर्गमूल लेकर द्वितीय पक्ष का मूल वर्ग प्रकृति के द्वारा लावें। पुनः उन दोनों का समीकरण करें।

यदि द्वितीय पक्ष सरूप अव्यक्त वर्ग नहीं हो अर्थात् वर्ग प्रकृति का विषय नहीं रहे तो उसे अन्य वर्णवर्ग के समान करके एक पक्ष का मूल प्राग्वत् साधन करें और द्वितीय पक्ष का मूल वर्ग प्रकृति के द्वारा लावें जिनमें प्रकृति वर्ण का मान कनिष्ठ और उस पक्ष का मूल ज्येष्ठ होगा।

यदि दूसरे पक्ष में साव्यक्त व्यक्तवर्ग हो या अव्यक्त सरूप या अरूप हो अर्थात् वर्ग प्रकृति का विषय नहीं हो, (क्योंकि वर्ग प्रकृति में सरूप अव्यक्त वर्ग होना है) तो वर्ग प्रकृति का विषय अपनी बुद्धि के द्वारा उपस्थित करना चाहिए।

क्योंकि विविध वर्ण सहायिका बुद्धि ही बीज है, गणक रूपी कमलों के प्रकाश के लिए सूर्य स्वरूप प्राचीनाचार्यों ने मन्द बुद्धियों के ज्ञानार्थ जिस बीज स्वरूप अपनी बुद्धि को विस्तारित किया वही बुद्धि बीजगणित संज्ञा से व्यवहृत होती है, अतः बुद्धि के द्वारा सब कुछ सम्भव है।

वासना—वर्गाद्यं चेत्तुल्यशुद्धौ कृतायामित्यादिश्लोकत्रये न किञ्चिदुपपत्तियोग्यं वस्तु प्रतिपादितमाचार्यैः। समशोधनादि कृते एकपक्षे वर्गात्मके परपक्षे च वर्ग प्रकृतिलक्षणलक्षिते प्रथमपक्षस्य मूलं सामान्यनियमतः साध्यमपरपक्षस्य च वर्गप्रकृत्येति कथन युक्तिसंगतमेव।

यथा $-$ $य^2 = इक^2 + रु$ इति चेत्तदा

पक्षयो र्मूले $य = \sqrt{इक^2 + रु}$

सति वर्गप्रकृतिलक्षणलक्षितेऽपरपक्षे वर्गप्रकृत्या मूलानयनं युक्तियुक्तमन्यथा वर्गप्रकृति लक्षणरहिते परपक्षे तु अन्यवर्णवर्गसमं तद्विधाय वर्गप्रकृति लक्षणात्मकः परपक्षः साध्यः। ततश्च मूलानयनं कृत्वा समीकरणेन व्यक्तं मानं ज्ञेयं विज्ञैरिति भास्करकथनं सामान्यवस्तुप्रतिपादकमिवेति दिक्।

सूत्रं वृत्तद्वयम्—

एकस्य पक्षस्य पदे गृहीते द्वितीयपक्षे यदि रूपयुक्तः ।
अव्यक्तवर्णोऽत्र कृतिप्रकृत्या साध्ये तथा ज्येष्ठकनिष्ठमूले ।।४।।
ज्येष्ठं तयोः प्रथमपक्षपदेन तुल्यं
कृत्वोक्तवत् प्रथमवर्णमितिस्तु साध्या
ह्रस्वं भवेत् प्रकृतिवर्णमितिः सुधीभि-
रेवं कृतिप्रकृतिरत्र नियोजनीया ।। ५ ।।

सुधा—एक पक्ष के मूल ग्रहण किये जाने पर द्वितीय पक्ष में रूप युक्त अव्यक्त वर्ग यदि रहे तो वर्ग प्रकृति के द्वारा ज्येष्ठ कनिष्ठ मूल का साधन करें। उनमें ज्येष्ठ को प्रथम पक्षीय मूल के समान करके समीकरण के द्वारा प्रथम वर्ण का मान लावें।

प्रकृतिवर्ण का मान कनिष्ठ को समझें। इस तरह यहाँ (इस अनेकवर्ण मध्यमाहरण में) वर्ग प्रकृति का सन्निवेश गणितज्ञों के द्वारा करना चाहिये।

वासना अत्रापि वासना पूर्ववदतिलघुतमैव।

आलापानुसारमेकपक्षे गुणवर्गगुणिते य वर्गे ऽपरपक्षे च वर्गप्रकृतिविषये प्रथम पक्षस्य मूलं सुसाध्यमेव । द्वितीयपक्षे च वर्गप्रकृत्या कनिष्ठज्येष्ठपदे साध्ये तत्र च इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः प्रकृत्या क्षुण्ण इत्यादिनैव सिद्धयति यद् ह्रस्वं प्रकृतिवर्णमितिः ज्येष्ठपदं च पूर्वपक्षसमम् ।

यथै = "$य^2 . गु^2 = क^2 \ गु^1 + ख$" वं स्थितौ पक्षयोर्मूले प्रथमपक्ष मूलं = य.गु । तच्चै $\sqrt{क^2 .गु' + रु}$ तत्समम् । अत्र च साधितं ज्येष्ठपदं 'य.गु' समम् कनिष्ठं च = क सममिति सर्वथैव युक्तिसङ्गतम् ।

उदाहरण—

"को राशिर्द्विगुणो राशिवर्गैः षड्भिः समन्वितः
मूलदो जायते बीजगणितज्ञ ! वदाशु तम् ।। १ ।।

अत्र यावत्तावद्राशिर्द्विगुणो वर्गैः षड्भिः समन्वितः याव ६ या २ । एष वर्ग इति इति कालकवर्गेण समीकरणार्थं

न्यास :—याव ६ याव २ काव ० ।
याव ० याव ० काव १ ।

अत्र समशोधने जातौ पक्षौ याव ६ या २, काव १ ।

अथैतौ षड्भिः संगुण्य रूपं प्रक्षिप्य प्राग्वत् प्रथमपक्षमूलम् या ६ रू १ ।

अथ द्वितीयपक्षस्यास्य काव ६ रू १ । वर्गप्रकृत्या मूले क २ ज्ये ५, वा क २० ज्ये ४९ । ज्येष्ठं प्रथमपक्षपदेनानेन या ६ रू १ समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम् $\frac{२}{३}$ वा ८ । ह्रस्वं प्रकृतिवर्णस्य कालकस्य मानम् २ वा २० । एवं कनिष्ठज्येष्ठवशाद् बहुधा ॥

सुधा :—वह कौन सी राशि है जिसे दूना करके गुणनफल में षड्गुणित राशि वर्ग जोड़ देते हैं तो मूल प्रद हो जाता है ? हे बीजगणित ! उसे शीघ्र बतलाइए ।

उदाहरण—

यहाँ कल्पित राशि = य,

प्रश्नानुसार $६य^2 + २य = क^2$

पक्षों को षड्गुणित करने पर

$$३६य^2 + १२य = ६क^2$$

दोनों में रू १ जोड़ने पर

$$३६य^2 + १२य + १ = ६क^2 + १$$

पक्षद्वय के मूल लेनेपर

$$६य + १ = \sqrt{६क^2 + १}$$

यहाँ द्वितीय पक्ष वर्ग प्रकृति का विषय है क्योंकि कौन सा वर्ग है जिसे षड्गुणित कर एक जोड़ने पर मूलद होता है, यही द्वितीय पक्ष से लक्षित होता । अत: इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः के अनुसार कल्पित इष्ट = २ मानकर आनीत ज्येष्ठ = ५ । सूत्रानुसार ६य + १ = ५

$$\therefore य = \frac{५ - १}{६} = \frac{२}{३}$$

यही राशि है जिससे प्रश्नालाप घटित हो जायेंगे ।

यदि कनिष्ठ = २०, तो इष्टं ह्रस्वमित्यादि के अनुसार

$(२०)^2 = ४००$ । $४०० \times ६ = २४००$ ।

$२४०० + १ = २४०१$ ।

$\sqrt{२४०१} = ४९$ = ज्येष्ठ

$६य + १ = ४९$ अतः $६य = ४८$

वा $य = \frac{४८}{६} = ८ =$ राशि ।

और $२० =$ प्रकृतिवर्ण $=$ क

अतः दोनों राशियों $\frac{२}{३}$, ८ पर से सभी आलाप घट जाते हैं—

जैसे प्रश्नानुसार—

$$\frac{२}{३} \times २ + \frac{४}{९} \times ६ = \frac{४}{३} + \frac{२४}{९} =$$

$$= \frac{१२ + २४}{९} = \frac{३६}{९} = ४$$ । यह वर्गात्मक है

इसी तरह

$$८ \times २ + ८^2 \times ६ = १६ + ६४ \times ६ =$$

$$१६ + ३८४ = ४००$$ । यह भी मूल प्रद है ।

आद्योदाहरणम्

राशियोगकृतिर्मिश्रा राश्योर्योगघनेन चेत् ।
द्विघ्नस्य घनयोगस्य सा तुल्या गणकोच्यताम् ॥ २ ॥

अथ क्रिया यथा न विस्तारमेति तथा बुद्धिमता राशी कल्प्यौ तथा कल्पितौ (या १ का १̇), (या १ का १) । अनयोर्योगः या २ । अस्य कृतिरस्यैव घनेन मिश्रा याघ ८ याव ४ । अथ राश्योः पृथग् घनौ । प्रथमस्य याघ १ याव. काभा ३̇ काव.याभा ३ काघ १̇ । द्वितीयस्य याघ १ याव.काभा ३ काव.याभा ३ काघ १ । अनयोर्योगः याघ २ काव.याभा ६ । द्विघ्नःयाघ ४ काव.याभा १२ समशोधनार्थं

न्यास :—

याघ ८ याव ४ काव.याभा ० ।
याघ ४ याव ० काव.याभा १२ ।

समशोधने कृते पक्षौ यावत्तावताऽपवर्त्य रूपं प्रक्षिप्य प्रथमपक्ष-मूलम् या २ रू १ । परपक्षस्यास्य का३ १२ रू १ । वर्गप्रकृत्या मूले क २ ज्ये ७ वा क २८ ज्ये ९७ । कनिष्ठं कालकमानम । ज्येष्ठमस्य या २ रू १ समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम् ३ वा ४८ । स्वस्वमाने-नोत्थापने कृते जातो राशी १, ५ वा २०, ७६, इत्यादि ॥

सुधा :—कौन सी वे दो राशियाँ हैं जिनके योगवर्ग में दोनों राशियों के योगधन जोड़ देते हैं तो द्विगुण धनयोग के बराबर होता है ?

उदाहरण—

यहाँ ऐसी दो राशियां कल्पित की कि क्रिया में विस्तार नहीं हो वे राशियाँ य − क, य + क,

अतः प्रश्नानुसार

$(रा + रा')^2 + (रा + रा')^3 = २ (रा^3 + रा'^3)$

$(य - क + य + क)^2 + (य - क + य + क)^3 = २ \{(य - क)^3 + (य + क)^3\}$

$४य^2 + ८य^3 = २\{य^3 - ३य^2क + ३यक^2 - क^3 + य^3 + ३य^2क + ३क^2य + क^3\}$

$= २ (२य^3 + ६यक^2) = ४य^3 + १२यक^2$

$\therefore ४य^2 + ८य^3 = ४य^3 + १२यक^2$

दोनों पक्षों में य से भाग देने पर

$८य^2 + ४य = ४य^2 + १२क^2$

$\therefore ४य^2 + ४य = १२क^2$

$\therefore ४य^2 + ४य + १ = १२क^2 + १$

पक्षद्वय के मूल ग्रहण से

$२य + १ = \sqrt{१२क^2 + १}$

यहाँ भी द्वितीय पक्ष का मूल वर्ग प्रकृति के द्वारा लाना है। 'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः' आदि के अनुसार यदि कनिष्ठ = २ तो ज्येष्ठ = ७

$\therefore २य + १ = ७$

वा $य = \frac{७ - १}{२} = ३$ एवम् क = २।

अथवा यदि कनिष्ठ = २८ तो ज्येष्ठ = ९७

अतः २य + १ = ९७ ∴ २य = ९६

वा य = ४८, क = २८

अतः राशियाँ य − क = १, य + क = ५

अथवा य − क = २०, = रा

य + क = ७६ = रा'

इन दोनों राशियों से सभी आलाप घट जायेंगे। जैसा कि

$(१ + ५)^2 + (१ + ५)^3 = २ (१^3 + ५^3)$

$३६ + २१६ = २ (१ + १२५) = २५२$।

अन्य राशियों से भी ऐसा ही समझना।

अथान्यत् सूत्रं सार्धवृत्तम्—

द्वितीयपक्षे सति सम्भवे तु कृत्याऽपवर्याऽत्र पदे प्रसाध्ये ।
ज्येष्ठं कनिष्ठेन तदा निहन्याच्चेद्वर्गवर्गेण कृतोऽववर्त्तः ॥६॥
कनिष्ठवर्गेण तदा निहन्याज्ज्येष्ठं ततः पूर्ववदेव शेषम् ।

स्पष्टार्थम् ।

सुधा:—यदि सम्भव हो तो द्वितीय पक्ष में वर्ग से अपवर्त्तन देकर कनिष्ठ ज्येष्ठ पद साधन करें। यदि अव्यक्त वर्ग से अपवर्त्तन दिया गया हो तो ज्येष्ठ को कनिष्ठ से गुण दें और यदि वर्ग-वर्ग से अपवर्त्तन दिया गया हो तो कनिष्ठ कनिष्ठ वर्ग से ज्येष्ठ को गुणें तो वास्तविक ज्येष्ठ होता है। शेष क्रिया पूर्ववत् करें।

वासना—कल्प्येते समौ पक्षौ $क^2 = य^४.इ + य^2.इ'$

पक्षयोर्मूले

$क = \sqrt{४य^४.इ + य^२.इ'} = \sqrt{य^२(४य^2.इ+इ'}$

$= य\sqrt{४य^2 .इ + इ'}$ वर्गप्रकृत्याऽत्र साधितयोः कनिष्ठज्येष्ठयोः य मितिः कनिष्ठम् । ज्येष्ठञ्च 'य' गुणितं सदेव प्रथमपक्षीय क मानसमम् अतः सति सम्भवे द्वितीय पक्षे कृत्याऽपवत्तिते साधितज्येष्ठपदं कनिष्ठगुणितं कार्यमिति कथनं युक्तियुक्तमेव ।

एवञ्च यदि समौ पक्षौ

$क^2 = य^६.इ + इ'.य^४$ इति चेत्तदा

पक्षयोर्मूले $क = \sqrt{य^६.इ + य^४.इ'}$

$= \sqrt{य^४(य^2.इ + इ')} =$

$य^2\sqrt{य^2.इ + इ'}$ अत्रानीतज्येष्ठपदं $य^2$ गुणितं सदेव प्रथमपक्षीय क समं भवितुमर्हतीति वर्गवर्गेण कृतेऽपवर्त्ते कनिष्ठवर्गेणज्येष्ठस्य गुणनं सर्वथैव सयुक्तिकं यतोऽत्र कनिष्ठं 'य' मानम्, अतउपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम्

यस्य वर्गकृतिः पञ्चगुणा वर्गशतोनिता ।
मूलदा जायते राशिं गणितज्ञ वदाशु तम् ॥ १ ॥

उदाहरणम्—

अत्र राशिः = या १। अस्य वर्गकृतिः पञ्चगुणा वर्गशतेनोना यावव ५ याव १०० । अयं वर्ग इति कालकवर्गसमं कृत्वा गृहीतं कालकवर्गस्य मूलम् का १। द्वितीयपक्षस्यास्य यावव ५ याव १०० । यावत्तावद्वर्गेणापवर्त्य वर्गप्रकृत्या मूले क १० ज्ये २० वा क १७० ज्ये ३८० । कृत्याऽपवर्त्तौ कृते "ज्येष्ठं कनिष्ठेन तदा निहन्यात्" इति जातम् ज्ये २०० वा ज्ये ६४६०० । इदं कालकमानं, कनिष्टं प्रकृति-वर्णमानं स एव राशिः १० वा १७० ॥

सुधा—वह कौन सी राशि है जिसके वर्ग वर्ग मे शत गुणित राशिवर्ग घठा देते हैं तो मूलद (वर्गात्मक) हो जाती है, हे गणितज्ञ उसे शीघ्र वत-लाइये।

उदाहरण

कल्पित राशि=य, प्रश्नानुसार

$(य^2)^2 \times ५ - १०० य^2 = मूलद$

अर्थात् $क^2 = ५ य^४ - १०० य^2$

$क = \sqrt{५ य^४ - १०० य^2}$

वा $क = \sqrt{य^2 (५ य^2 - १००)}$

वा $क = य \sqrt{५ य^२ - १००}$

द्वितीय पक्षीय करणीगत राशि का वर्गप्रकृति के द्वारा आनीत ज्येष्ठ को य से गुणने पर क के समान होगा।

कनिष्ठ ज्येष्ट पद साधन के लिए प्रकृति = ५ क्षेप = ऋणात्मक एकशत।

अतः 'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः प्रकृत्ये' त्यादि के अनुसार यदि कनिष्ट=१० तो नियमानुसार ज्येष्ट=२० और क्षेप = − १००। क्योंकि $(१०^2 \times ५) - १०० = ५०० - १०० = ४००$, यह २० का वर्ग है अतः ज्येष्ठ=२० कनिष्ठ= १०=य, ∴ य×ज्येष्ठ = १०×२०=२००=क इसी तरह यदि कनिष्ठ=१७० तो ज्येष्ठ=३८०, कनिष्ठ गुणित यह = ६४६००=क। राशिमान १० या १७० से समस्त आलाप घट जायेगा। जैसे—$१०^४ \times ५ - १०० \times १०^2 = ५०००० - १०००० = ४०००० = (२००)^2$

उदाहरणम्

कयोः स्यादन्तरे वर्गो वर्गयोगो ययोर्घनः।
तौ राशी कथयाभिन्नौ बहुधा बीजवित्तम ॥ २ ॥

अथ राशी या १, का १ । अनयोन्तरं या १̇ का १ नीलकवर्गसमं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम् का १ नीव १̇ । अनेन यावत्तावदुत्थाप्य जातौ राशी का १ नीव १̇, का १ । अनयोर्वर्गयोगः काव २ नीव. काभा २̇ नीवव १ । एष घन इति नीलकवर्गघनसमं कृत्वा शोधने कृते जातं प्रथमपक्षो नीवघ १ नीवव १̇ । द्वितीयपक्षो काव २ नीव. काभा २̇ । पक्षौ द्वाभ्यां संगुण्य नीलकवर्गवर्गं प्रक्षिप्य द्वितीयपक्षस्य मूलम् का २ नीव १̇ । प्रथमपक्षम्=नीवघ २ नीवव १̇ नीलकवर्ग-वर्गेणापवर्त्य जातम् नीव २ रू १̇ । अत्र वर्गप्रकृत्या मूले क ५ ज्ये७ । वा क २९ ज्ये ४१ । चेद्वर्गवर्गेण कृतोऽपवर्त्तः कनिष्ठवर्गेण तदा निहन्याज्ज्येष्ठम्" इति जातं ज्येष्ठम् १७५ वा ज्ये ३४४८१ । कनिष्ठ नीलकमानं तेनोत्थापितं प्राङ्मूलं जातम् का २ रू २५̇ वा का २ रू ८४१̇ । इदं ज्येष्ठ- मूलसमं कृत्वा लब्धं कालकमानम् १०० वा १७६६१ । स्वस्वमानेनोत्थाप्य जातौ राशी ७५, १०० वा १६८२०, १७६६१ इत्यादि ॥

सुधा—कौन सी वे दो राशियाँ हैं जिनका अन्तर वर्गात्मक और वर्गयोग घनात्मक होता उन अभिन्न बहुविध दोनों राशियों को हे बीजज्ञ ! कहो ।

उदाहरण

यहाँ कल्पित दो राशियाँ = य, क

प्रश्नानुसार—

दोनों राशियों का अन्तर वर्गात्मक है

अतः $क - य = न^2$

$\therefore क - न^2 = य$

अतः राशि $= क - न^2$, क,

इन दोनों का वर्ग योग घनात्मक होता है अतः दोनो का वर्गयोग=

$(क - न^2)^2 + क^2 =$ घनात्मक $= (न^2)^3 = न^6$ ।

$\therefore क^2 - २ क न^2 + न^4 + क^2 = न^6$

वा $२ क^2 - २ क. न^2 + न^4 = न^6$

$\therefore २ क^2 - २ क न^2 = न^6 - न^4$

$\therefore ४ क^2 - ४ क न^2 + न^4 = २ न^6 - न^4$

दोनों पक्षों के मूल ग्रहण करने पर

$२ क - न^2 = \sqrt{२ न^6 - न^4} = \sqrt{न^4 (२ न^2 - १)} =$

$न^2 \sqrt{२ न^2 - १}$

अतः द्वितीय पक्षस्थ करणीगत २ को प्रकृति, इष्ट कनिष्ठ=५ को न का मान, और साधित ज्येष्ठ ७ को न^{२} (२५) से गुणने पर—

७×२५=१७५=प्रथम पक्ष

=२ क − न^{2} सिद्ध हुआ।

∴ १७५=२क − न^{2}−२ क − २५

∴ २००=२ क ∴ क=१००

उत्थापन से य = क − न^{२} = १०० − २५ = ७५

अतः य = ७५, क=१०० ये दो राशियाँ हुई।

यदि ५ की जगह २९ कनिष्ठ माना जाय तो ज्येष्ट = ४१, इसे यह कनिष्ठ वर्ग ८४१ से गुणने पर = ३४४८१ होता है। यह द्वितीय पक्ष के मूल २क − न^{२} के बराबर है।

अतः २ क − (२९)^{२} = ३५४८१

वा २क − ८४१ = ३४४८१

∴ २क = ३४४८१ + ८४१ = ३५३२२

∴ क= $\frac{३५३२२}{२}$ = १७६६१ = द्वितीय राशि

अतः प्रथम राशि य = क − न^{2}=१७६६१ − ८४१ =१६८२०

अतः क्रमशः राशियाँ = १६८२०, १७६६१,

आलाप दोनों जगह सरलतया घट जायँगे।

जैसे दोनों राशियों का अन्तर = १०० − ७५ = २५

वर्गात्मक—

दोनों राशियों का वर्ग योग = (१००)^{2}+(७५)^{2} =

१०००० + ५६२५ = १५६२५ घनात्मक

$\sqrt[3]{१५६२५}$ = २५

इसी तरह द्वितीय राशिद्वय से भी आलाप सिद्ध होता है।

अन्यत् सूत्रं सार्धवृत्तम्

साव्यक्तरूपो यदि वर्णवर्गस्तदाऽन्यवर्णस्य कृते समं तम् ॥७॥
कृत्वा पदं तस्य तदन्यपक्षे वर्गप्रकृत्योक्तवदेव मूले।
कनिष्ठमाद्येन पदेन तुल्यं ज्येष्ठं द्वितीयेन समं विदध्यात् ॥८॥

अत्र प्रथमपक्षमूले गृहीते सत्यन्यपक्षे साव्यक्ताऽव्यक्तकृतिः सरूपाऽरूपा वा भवति तत्राद्यपक्षस्यान्यवर्णवर्गसमीकरणं कृत्वा मूले।

तयोः कनिष्ठमाद्यस्य पदेन ज्येष्ठं द्वितीयपक्षपदेन च समं कृत्वा वर्णमाने साध्ये ।

सुधा—प्रथम पक्षीय मूल ग्रहण करने पर द्वितीय पक्ष में यदि वर्णवर्ग, वर्ण तथा रूप तीनों रहे तो इसे अन्य वर्ण के वर्ग के समान करके प्रथम पक्ष का मूल ले लेना, और द्वितीय पक्ष का वर्ग प्रकृति के द्वारा कनिष्ठ ज्येष्ठ साधन करें। ततः पर कनिष्ठ को प्रथम पक्ष के मूल के साथ और ज्येष्ठ का द्वितीय पक्षीय मूल के साथ समीकरण करना चाहिए ।

वासना—अत्रालापानुसारं समौ पक्षौ भवतो यत्र प्रथमपक्षो वर्गात्मकोऽपरपक्षश्च साव्यक्तरूपो वर्णवर्गः । एवं सति कल्प्येते पक्षौ =

$$\text{क}^2 = \text{गु}.\text{य}^2 \pm \text{गु}'.\text{य} + \text{इ}$$

अत्र प्रथमपक्षीयमूलं सुखसाध्यम् । द्वितीयपक्षोऽपि वर्गात्मक एवेति तस्य वर्गेण समीकृतिः ।

अतः $\text{य}^2.\text{गु} \pm \text{गु}'\,\text{य} + \text{इ} = \text{न}^2$

$\therefore \text{य}^2.\text{गु} \pm \text{गु}'\,\text{य} = \text{न}^2 - \text{इ}$

पक्षौ 'गु' गुणितौ तदा

$(\text{य}^2.\text{गु} \pm \text{गु}'\,\text{य})\,\text{गु}. = \text{गु}\,(\text{न}^2 - \text{इ})$

$\therefore \text{य}^2.\text{गु}^2 \pm \text{गु}'.\,\text{गु}.\,\text{य} = \text{गु}\,\text{न}' - \text{गु}.\,\text{इ}$

पक्षयोः $\frac{\text{गु}^{2'}}{४}$ योजनेन

$$\text{य}^2.\text{गु}^2 \pm \text{गु}'\,\text{गु}\,\text{य} + \frac{\text{गु}^{2'}}{४} = \text{गु}.\,\text{न}^2 - \text{गु}\,\text{इ} + \frac{\text{गु}^{2'}}{४}$$

अत्र प्रथम पक्षीयमूलं सुसाध्यम् । द्वितीयपक्षस्य च वर्गप्रकृत्या साध्यः यत्र च प्रकृतिः = गु ।

शेषमि $\left(\frac{\text{गु}'^2}{४} - \text{गु}.\,\text{इ}\right)$ दं क्षेपं मत्वा कनिष्ठ ज्येष्ठे साध्ये ।

अत्रागतं कनिष्ठमाद्येन पदेन न मितेन एवम् ज्येष्ठञ्च द्वितीयपक्षेणा $\text{य}.\,\text{गु} \pm \frac{\text{गु}'}{२}$ नेन सममिति युक्तियुक्तमतः सर्वमुपन्नम् ।

उदाहरणम्—

त्रिकाद्युत्तरश्रेढ्यां गच्छे क्वापि च यत् फलम् ।
तदेव त्रिगुणं कस्मिन्नन्यगच्छे भवेद्वद ।।१।।

अत्र श्रेढ्योर्न्यासः । आदिः=३, चयः=२, गच्छः=या १ । आदिः=३, चयः=२, गच्छः=का १ । अनयोः फले = याव १ या २, काव १ का २ । अनयोराद्यं त्रिगुणं परसमं कृत्वा शोधनार्थं—

न्यासः—याव ३ या ६ ।

काव १ का २ ।

शोधने कृते पक्षौ त्रिगुणीकृत्य नव प्रक्षिप्य प्रथमपक्षस्य मूलं या ३ रू ३ । द्वितीयपक्षस्यास्य काव ३ का ६ रू ९ । नीलकवर्गेण साम्यं कृत्वा तथैव पक्षौ त्रिगुणीकृत्य ऋणमष्टादश प्रक्षिप्य मूलं का ३ रू ३ । तदन्यपक्षस्यास्य नीव ३ रु १८ वर्गप्रकृत्या मूले क ९ ज्ये १५ वा क ३३ ज्ये ५७ । कनिष्ठमाद्यपदेनानेन या ३ रू ३ समं कृत्वा लब्धे यावत्तावत्कालकमाने २, ४ वा १०, १८ । एवं सर्वत्र ॥

सुधा—दो श्रेढियाँ हैं, प्रथम श्रेढी में तीन आदि और दो चाय हैं और गच्छ अज्ञात है, इसके सर्वधन रूप फल से किसी दूसरे गच्छ में उन्हीं आदि और चय के सहारे सर्वधन त्रिगुण होता है तो दोनों गच्छों का मान कहो ।

प्रश्नानुसार प्रथम श्रेढी में आदि=३ चय=२ गच्छ=य

द्वितीय श्रेढ़ी में आदि=३, चय=२, गच्छ=क

'व्येकपदघ्नचयो मुखयुक्स्यादित्यादि सूत्रानुसार

प्रथम सर्वधन $\frac{(\text{य} - १)\times २+३+३}{२}\times \text{य}$

$= \frac{२\,\text{य} - २+६}{२}\times\text{य} = \frac{२\,\text{य}+४}{२}\times\text{य} = \text{य}^२+२\,\text{य}$

एवं द्वितीय सर्वधन=$\text{क}^2+२\text{क}$

प्रश्नानुसार द्वितीय सर्वधन प्रथम सर्वधन से त्रिगुणित है

अतः $३\,(\text{य}^2+२\,\text{य}) = \text{क}^2+२\text{क}$

वा $३\,\text{य}^2+६\,\text{य}=\text{क}^2+२\,\text{क}$

पक्षों को त्रिगुणित करने पर

$९\,\text{य}^२+१८\,\text{य}=३\,\text{क}^२+६\,\text{क}$

पक्षों में ९ जोड़ने पर

$९\,\text{य}^2+१८\,\text{य}+९ = ३\,\text{क}^2+६\,\text{क}+९$

पक्षों के मूल ग्रहण से

$३\,\text{य}+३ = \sqrt{३\,\text{क}^२+६\,\text{क}+९}=\text{न}$

यहाँ द्वितीय पक्ष साव्यक्त रूप सहित त्रिगुण क वर्ग है और वर्गात्मक भी है;

अतः ३ क^2×+६ क + ९ = न^2

∴ ३क^2+६क=न^2 − ९

पक्षों को ३ से गुणने पर

९ क^2×१८ क=३ न^2 − २७

दोनों पक्षों में ९ जोड़ने से—

९ क^2+१८ क+९=३ न^2 − १८

मूल ग्रहण मे—

३ क+३=$\sqrt{३ न^2 - १८}$

यहाँ प्रकृति=३, क्षेप=ऋणात्मक १८,

अतः यदि कनिष्ठ=९ तो ज्येष्ठ=१५

अतः ९=न

३ क+३=१५ ∴ ३ क=१२ ∴ क=४=द्वि. गच्छ

∵ ३य+३=न=९

अतः ३य=६ ∴ य=$\frac{६}{३}$=२=प्रथम गच्छ

आलाप प्रथम :—सर्वधन=य^2+२ य=४+४=८

द्वितीय सर्वधन=क^2+२क=१६+८=२४

कनिष्ठ यदि ३३ तो ज्येष्ठ=५७

तो ३य+३=३३

∴ य=१०=प्रथमगच्छ

एवं ३ क+३=५७

∴ ३क=५४ ∴ क=१८=द्वितीयगच्छ

इन दोनों गच्छों से पूर्ववत् आलाप मिलते हैं।

अन्यत् सूत्रं वृत्तद्वयम्

सरूपके वर्णकृती तु यत्र तत्रेच्छयैकां प्रकृतिं प्रकल्प्य।
शेषं ततः क्षेपकमुक्तवच्च मूले विदध्यादसकृत् समत्वे ॥९॥
सभाविते वर्गकृती तु यत्र तन्मूलमादय च शेषकस्य।
इष्टोद्धृतस्येष्टविवर्जितस्य दलेन तुल्यं हि तदेव कार्यम् ॥१०॥

यत्र प्रथमपक्षमूले गृहीते द्वितीयपक्षे वर्णयोः कृती सरूपे अरूपे वा भवतस्तत्रैकां वर्णकृतिं प्रकृतिं प्रकल्प्य शेषं क्षेपम्। तत 'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः प्रकृत्या क्षुण्ण' इत्यादिकरणेन क्षेपजातीयं वर्णमेकादिहृतं युतं

वा स्वबुद्धया कनिष्ठपदं प्रकल्प्य ज्येष्ठं साध्यम्। अथ वर्गगता चेत् प्रकृतिरिति तदा "इष्टभक्तो द्विधा क्षेप" इत्यादिना मूले साध्ये यत्र भावितं च वर्त्तते तत्र 'सभाविते वर्णकृती तु' इत्यादिना तदन्तर्वर्त्तिनो यावतो मूलमस्ति तावतो मूलं ग्राह्यम्। शेषस्येष्टोद्धृतस्येष्टविवर्जितस्य दलेन समं तदेव मूलं कार्यम्। यत्र तु द्वित्र्यादयो वर्णवर्गाद्या भवन्ति तत्र द्वाविष्टौ वर्णौ मुक्त्वाऽन्येषामिष्टानि मानानि कृत्वा मूले साध्ये। एवं तदैव यदाऽसकृत् समीकरणं यदा तु सकृदेव समीकरणं तदैकं वर्णं मुक्त्वाऽन्येषामिष्टानि मानानि कृत्वा प्राग्वण्मूले ॥

सुधा—प्रथम पक्ष के मूलग्रहण के बाद द्वितीय पक्ष में सरूप वा अरूप वर्णद्वयवर्ग हो वहाँ एक वर्ण को प्रकृति शेष को क्षेप कल्पना कर पूर्वोक्तवत् कनिष्ठ ज्येष्ठ का साधन करना चाहिए। इस प्रकार आगत कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप वर्णात्मक होंगे अतः द्वितीय समीकरण से अव्यक्त द्वय का मान व्यक्त होगा। जहाँ प्रथम पक्ष के मूल लेने के बाद द्वितीय पक्ष में भावित युक्त वर्णद्वय का वर्ग हो वहाँ जितने मूल प्राप्त हो सके उसका मूल लेकर शेष में इष्ट का भाग देकर लब्धि को इष्ट में घटा कर आधा करें और उसके साथ प्रथम पक्षीय मूल का समीकरण करें।

वासना—कल्प्यते यथा $\text{न}^2 = \text{इ}.\text{य}^2 + \text{इ}'\text{क}^2 + \text{क्षे}$ तदा $\text{इ}'\text{क}^2 + \text{क्षे}$ इदमथवैं $(\text{इ}.\text{य}^2 + \text{क्षे})$ तत्क्षेपकं, इ इदं वा इ' इदं प्रकृतिं प्रकल्प्य साधिते कनिष्ठज्येष्ठे क्षेपवर्णात्मके; ततश्च पुनर्द्वितीयसमीकरणेन य, क माने व्यक्ते स्यातामिति प्रोक्तं सरूपके वर्णकृतीत्यारभ्य मूले विदध्यादसकृत्समत्व इति।

यत्र च सभाविते वर्णकृती अर्थाद्वर्णद्वयवर्गौ तद्वर्णद्वयघातयुक्तौ तत्रैवं कार्यम्—यथा पक्षौ $\text{न}^2 = \text{इ}^2.\text{य}^2 + \text{इ}'\text{य}.\text{क} + \text{इ}''^2.\text{क}^2$

$$\text{वा } \text{न}^2 = \text{इ}^2.\text{य}^2 + \text{इ}'\text{यक} + \text{इ}''^2\text{क}^2 + \text{क}^2\frac{\text{इ}'^2}{4\text{इ}^2} - \text{क}^2\frac{\text{इ}'^2}{4\text{इ}^2}$$

$$\therefore \text{न}^2 = \text{इ}^2\text{य}^2 + \text{इ}'\text{यक} + \text{क}^2\frac{\text{इ}'^2}{4\text{इ}^2} + \text{क}^2\left(\text{इ}''^2 - \frac{\text{इ}'^2}{4\text{इ}^2}\right)$$

$$\text{अत्र द्वितीयपक्षे } \text{इ}^2\text{य}^2 + \text{इ}'\text{यक} + \text{क}^2\frac{\text{इ}'^2}{4\text{इ}^2}$$

$$\therefore \text{अयं वर्गात्मकः यदीयं मूलम्} = \text{इ}.\text{य} + \text{क}\frac{\text{इ}'}{2\text{इ}} = \text{प समं कल्पितम्}$$

$$\text{अतः } \text{न}^2 = \text{इ}^2\text{य}^2 + \text{इ}'\text{यक} + \text{क}^2\frac{\text{इ}'^2}{4\text{इ}^2}$$

अतः $\text{न}^2 - \text{प}^2 = \text{क}^2\left(\text{इ}''^2 - \frac{\text{इ}'^2}{4\text{इ}^2}\right)$

यदि $\text{न} - \text{प} = \text{क} \times \text{इ}_1$

$$\text{अतः } \text{न} + \text{प} = \frac{\text{क}^2\left(\text{इ}''^2 - \frac{\text{इ}'^2}{4\text{इ}^2}\right)}{\text{क} \times \text{इ}_1}$$

$$= \frac{\text{क}\left(\text{इ}''^2 - \frac{\text{इ}'^2}{4\text{इ}^2}\right)}{\text{इ}_1}$$

ततः संक्रमणेन—

$$\text{प} = \frac{\frac{\text{क}\left(\text{इ}'^2 - \frac{\text{इ}'^2}{4\text{इ}^2}\right)}{\text{इ}_1} - \text{क}.\text{इ}_1}{2} = \text{इ}.\text{य} + \text{क}.\frac{\text{इ}'}{2\text{इ}}$$

एतेन समाविते वर्णकृती तु यत्रेत्यादिकमुपपन्नम् ।

उदाहरणम्:—

तौ राशी वद यत्कृत्योः सप्ताष्टगुणयोर्युतिः ।

मूलदा स्याद्वियोगस्तु मूलदो रूपसंयुतः ॥ १ ॥

अत्र राशी या १, का १ । अनयोर्वर्गयोः सप्ताष्टगुणयोर्युतिः याव ७ काव ८ । अयं वर्ग इति नीलकवर्गेण समीकरणार्थं न्यासः—

याव ७ काव ८ नीव ० ।

याव ० काव ० नीव १ ।

समशोधने कृते कालकवर्गाष्टकं प्रक्षिप्य गृहीतं नीलकपक्षस्य मूलं नी १ । परपक्षस्यास्य याव ७ काव ८ । वर्गप्रकृत्या मूले तत्र यावत्तावद्वर्गे योऽङ्कः सा प्रकृतिः शेषं क्षेपः काव ८ । "इष्टं ह्रस्वम्" इत्यादिना कालकद्वयमिष्टं प्रकल्प्य जाते मूले कनिष्ठम् का २ । ज्येष्ठम् का ६ । ज्येष्ठं नीलकमानं कनिष्ठं यावत्तावन्मानं तेन यावत्तावदुत्थाप्य जातौ राशी का २, का १ । पुनरेतद्वर्गयोः सप्ताष्टगुणयोरन्तरं सैकं जातम् काव २० रू १ । एतद्वर्ग इति प्राग्वल्लब्धं कनिष्ठमूलम् २ वा ३६ । एतत्कालमानेनोत्थापितौ जातौ राशी ४, २ वा ७२, ३६ ।

सुधा—वे कौन सी दो राशियाँ हैं जिनके वर्ग को क्रमशः सात और आठ से गुणकर योग करते हैं तो योगफल वर्गात्मक हो जाता और सप्ताष्टगुणित दोनों का अन्तर भी एक युक्त होने पर मूलद होता है, उन्हें बतलाओ ।

कल्पित राशियाँ य, क,

प्रश्नानुसार $७य^२ + ८क^२ = न^२$

यहाँ प्रथम पक्ष में ७ को प्रकृति, $८क^2$ को क्षेप माना। 'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः' आदि के अनुसार कल्पित इष्ट = २क, अतः ज्येष्ठ = ६क।

ह्रस्वंभवेत् प्रकृतिवर्णमितिः के अनुसार—

य = २क, तथा ६क = न

अतः पूर्वकल्पित राशियाँ = २क, क,

पुनः द्वितीयालापानुसार—

$७(२क)^२ - ८क^२ + १ = २८क^२ - ८क^२ + १ = २०क^२ + १$

= वर्गात्मक = $प^२$।

यहाँ भी $प^२$ का मूल = प। तथा प्रथम पक्ष के मूल के लिए वर्ग प्रकृति का आश्रय लिया गया।

अतः यदि इष्ट कनिष्ट = २ तो

$(२)^2 \times २० + १ = ८१ = ज्ये^2$

∴ ज्ये = ९

अतः २ = क और ९ = य

'क' मान से राशियों में उत्थापन से प्रथम द्वितीय राशियां ४, २

यदि कल्पित कनिष्ठ = ३६ तो ज्येष्ठ = १६१

अतः प्रथम राशि = २ क = ३६ × २ = ७२

द्वितीय राशि = क = ३६

इन दोनों राशियों पर से आलाप सुखेन घट जाता है—

$७ \times (४)^२ + ८ (२)^2$ = वर्गात्मक =

$११२ + ३२ = १४४ = (१२)^2$

द्वितीयालाप $७ \times (४)^2 - ८ (२)^२$

$= ११२ - ३२ + १ = ८१ = (९)^2$

इसी तरह ७२, ३६ राशियों से भी दोनों आलाप घटते हैं।

उदाहरणम्—

घनवर्गयुतिर्वर्गो ययो राश्योः प्रजायते।
समासोऽपि ययोर्वर्गस्तौ राशी शीघ्रमानय॥ २॥

अत्र राशि या १, का १। अनयोर्वर्गघनयोर्योगः याव १ काघ १ अयं वर्ग इति नीलकवर्गसमं कृत्वा पक्षयोः कालकघनं प्रक्षिप्य नीलकपक्षस्य मूलम् नी १ परपक्षस्यास्य याव १। काघ १ वर्गप्रकृत्या मूले

तत्र यावत्तावद्वर्गे योऽङ्कः सा प्रकृतिः शेषं क्षेपः प्रकल्प्यः। प्रकृतिः याव १। क्षेपः काघ १। "इष्टभक्तो द्विधा क्षेपः" इत्यादिना कालकेनेष्टेन जाते मूले क = $\frac{\text{काव १ का १̇}}{२}$, ज्ये= $\frac{\text{काव १ का १}}{२}$। कनिष्ठं यावत्तावन्मानं तेनोत्थाप्य जातौ राशी $\frac{\text{काव १ का १̇}}{२}$, का १। अनयोः समासः $\frac{\text{काव १ का १}}{२}$ अयं वर्ग इति पीतकवर्गेण समीकरणं कृत्वा पक्षशेषं चतुर्भिः संगुण्य रूपं प्रक्षिप्य प्रथमपक्षमूलं का २ रू १। परपक्षस्यास्य पोव ८ रू। वर्गप्रकृत्या मूले क ६ ज्ये १७, वा क ३५ ज्ये ९९। ज्येष्ठं पूर्वमूलेनानेन का २ रू १। समं कृत्वा लब्धं कालकमानम् ८ वा ४९। अनेनोत्थाप्य जातौ राशी २८, ८ वा ११७६, ४९।

अथ वा राशी याव २, याव ७। अनयोर्योगः याव ९। अयं वर्ग एव। अथानयोर्घनवर्गयोगः यावघ ८ याववं ४९। एष वर्ग इति कालकवर्गेण समीकृत्य प्राग्वद्यावत्तावद्वर्गेणापवर्त्य लब्धं यावत्तावन्मानम् २, ३ वा ७ अनेनोत्थापितौ राशी ८, २८, १८, ६३ वा ९८, ३४३॥

सुधा—वे कौन सी दो राशियाँ हैं जिनमें प्रथम के वर्ग में दूसरे के घन को जोड़ देने पर वर्गात्मक और दोनों राशियों का योग भी वर्गात्मक होता है उन्हें शीघ्र बतलाइए—

कल्पित राशियाँ = य, क,

प्रश्नानुसार $\text{य}^2 + \text{क}^3 = \text{न}^2$

यहाँ प्रथम पक्ष का मूल वर्गप्रकृति के द्वारा लाना है।

अतः प्रकृति = १ क्षेप = क^3

यहाँ "इष्टभक्तो द्विधा क्षेप" आदि के अनुसार यदि इष्ट=क,

$$\frac{\text{क्षे}}{\text{इ}} = \frac{\text{क}^3}{\text{क}} = \text{क}^2$$

$$\therefore \frac{\text{क}^2 - \text{क}}{२} = \text{कनिष्ठ}, \quad \frac{\text{क}^2 + \text{क}}{२} = \text{ज्येष्ठ}$$

"गुणमूलहृतश्चाद्यः" कथनानुसार

$$\frac{\text{क}^2 - \text{क}}{२ \times १} = \text{कनिष्ठ} = \text{य}.$$

अतः य मान से उत्थापन देने पर राशियां $= \frac{क^2 - क}{२}$, क

द्वितीयालापानुसार

दोनों राशियों का योग $= \frac{क^2 - क}{२} + क =$ वर्गात्मक

$\therefore \frac{क^2 + क}{२} = प^2$

$\therefore क^2 + क = २प^2$

पक्षों को ४ में गुणने तथा दोनों में एक-एक जोड़ने पर

$४क^2 + ४क + १ = ८प^2 + १$

पक्षों का मूल ग्रहण करने पर

$२क + १ = \sqrt{८प^2 + १}$

द्वितीयपक्ष के मूलार्थ क = ६ मानने से 'इष्ट ह्रस्वं तस्य वर्ग' इत्यादि के द्वारा ज्येष्ठ = १७.

६ = कनिष्ठ = प्रकृतिवर्ण = प.

एवम् २क + १ = १७

$\therefore$ क = ८

अत उत्थापन से राशियां = २८, ८.

यहाँ कनिष्ठ यदि ३५ तो ज्येष्ठ = ९९

अतः २क + १ = ९९

$\therefore$ क = ४९

उत्थापन से राशियां = ४९

एवम् $\frac{(४९)^2 - ४९}{२} = ११७६.$

अथवा ग्रन्थकारोक्त ही दूसरा प्रकार

द्वितीयालाप घटित

कल्पित दो राशियां = २ य^2, ७ य^2,

प्रश्नानुसार $(२ य^2)^3 + (७ य^2)^2$

$= ८ य^6 + ४९ य^4 =$ वर्गात्मक $= क^2$.

प्रथम पक्ष का मूल वर्गप्रकृति के द्वारा लाना है प्रथमतः प्रथम पक्ष में य^4 से अपवर्त्तन दे दिया तो अपवर्तित प्रथम पक्ष $= ८ य^2 + ४९$

यदि इष्ट कनिष्ठ = २

तो ज्येठ^2=(२)^2 × ८ + ४१ = ३२ + ४९ = ८१

∴ ज्येष्ठ = ९.

कनिष्ठ २ = प्रकृतिवर्ण = य.

चूंकि य के वर्ग वर्ग से अपवर्त्तन दिया गया है

अत: 'चेद्वर्गवर्गेण कृतोऽपवर्त्तः . कनिष्ठवर्गेण तदा निहन्यात् के अनुसार

(२)^2 × ९ = ३६ = वास्तव ज्येष्ठ = पूर्वपद = क

य मान २ से उत्थापन देने पर

राशियाँ = ८, २८,

अथवा यदि कनिष्ठ = ७ तो ज्येष्ठ = २१ इसे कनिष्ठ वर्ग ४९ से गुणने पर वास्तव ज्येष्ठ=१०२९ = क.

एवम् ७ = य । अत: राशियाँ=९८, ३४३.

सभी आलाप आसानी से घट जायेंगे ।

'संभावते वर्णकृती तु यत्र' इत्यतेतद्विषयीभूतमुद्राहरणम् ।

'ययोर्वर्गयुतिर्घातयुता मूलप्रदा भवेत् ।
तन्मूलगुणितो योगः सरूपश्चाशु तौ वद ।। ३ ।।

अत्र राशी या १ का १ । अनोयर्वर्गयुतिर्घातयुता याव १ याकाभा १ काव १ । अस्या मूलं नास्तीति नीलकवर्गेण समामेतां कृत्वा पक्षयोः कालकवर्गं प्रक्षिप्य पक्षौ षट्त्रिंशता संगुण्य लब्धं नीलकपक्षमूलम् नी ६ । परपक्षास्यास्य याव ३६ याकाभा ३६ काव ३६ । यावतो मूलमस्ति तावतः "सभाविते वर्णकृती तु"–इत्यादिना मूलं गृहीतम् या ६ का ३ । शेषस्यास्य काव २७ । इष्टेन कालकेन हृतस्येष्टकालक-वर्जितस्य च दलेन का १३ । तन्मूलं समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम् का $\frac{५}{३}$ । अनेन यावत्तावदुत्थाप्य जातौ राशी का $\frac{५}{३}$, का १ । अनयो-र्वर्गयुतेः काव $\frac{३४}{९}$ घातयुतायाः काव $\frac{४९}{९}$ मूलम् का $\frac{७}{३}$ । अनेन राशि-योगो का $\frac{८}{३}$ गुणितः काव $\frac{५६}{९}$ सरूपो जातः $\frac{\text{का ५६ रू ९}}{९}$ । अमुं पीतकवर्गसमं कृत्वा समच्छेदीकृत्य पक्षयोर्नवरूपाणि प्रक्षिप्य लब्धं कनिष्ठ मूलम् ६ वा १८० । एतत्कालकमानमित्यनेनोत्थापितौ राशी १०, ६ । वा ३००, १८० एवमनेकधा ।।

सुधा:—वे कौन सी दो राशियाँ हैं जिनके वर्गयोग में दोनों राशियों का गुणनफल जोड़ देते हैं तो योगफल वर्गात्मक हो जाता है । एवम् दोनों राशियों के योग को पूर्वमूल से गुणने पर भी गुणनफल मूलद होता है उन्हें बतलाओ ।

कल्पित दो राशियाँ = य, क,

प्रश्नानुसार दोनों का वर्गयोग + दोनों राशियों का गु० फल = य^2 + क^2 + य क = वर्गात्मक = न^2

∴ ३६ य^2 + ३६ य क + ३६ क^2 = ३६ न^2

प्रथम पक्ष में सभावित वर्णवर्गद्वय है अतः

'सभाविते वर्णकृती तु यत्र तन्मूलमादाय च शेषकस्य'

इत्यादि के अनुसार ३६ य^2+३६ य क+९ क^2 का मूल=६ य+ ३ क लेने पर शेष=२७ क^2 । इसमें इष्ट क से भाग लेने पर

$$\frac{२७ \text{ क}^2}{\text{क}} = २७ \text{ क} ।$$

$$\frac{२७ \text{ क} - \text{क}}{२} = १३ \text{ क} = ६ \text{ य} + ३ \text{ क}$$

$$\therefore १० \text{ क} = ६ \text{ य} \quad \therefore \text{ य} = \frac{१० \text{ क}}{६} = \frac{५ \text{ क}}{३}$$

अतः पूर्व कल्पित राशियाँ = $\frac{५\text{क}}{३}$, क,

इन दोनों राशियों से प्रथमालाप

$$\left(\frac{५ \text{ क}}{३}\right)^2 + \text{क}^2 + \frac{५\text{क}}{३} \times \text{क} =$$

$$\frac{२५ \text{ क}^2}{९} + \text{क}^2 + \frac{५ \text{ क}^2}{३} = \frac{३४ \text{ क}^2}{९} + \frac{५ \text{ क}^2}{३} =$$

$$\frac{३४ \text{ क}^2 + १५ \text{ क}^2}{९} = \frac{४९ \text{ क}^2}{९}$$ यह मूल प्रद हो जाता है।

$$\text{अतः राशियोग} = \left(\frac{५ \text{ क}}{३} + \text{क}\right) \times \frac{७ \text{ क}}{३} =$$

$$\frac{८ \text{ क} \times ७ \text{ क}}{३ \times ३} = \frac{५६ \text{ क}^2}{९} ।$$ राशियोग + १ =

$$\frac{५६ \text{ क}^2}{९} + १ = \text{वर्गात्मक} = \text{प}^2$$

$$\therefore ५६ \text{ क}^2 + ९ = ९ \text{ प}^2$$

यहाँ भी प्रथम पक्ष का मूल वर्गप्रकृति के द्वारा लाना है।

अर्थात् ५६क^2 + ९ = ९ प^2

$\sqrt{५६क^२ + ९} = ३प$

यहाँ प्रकृति = ५६ क्षेप = ९

कल्पित कनिष्ठ = ६ अतः ज्येष्ठ पद =

$\sqrt{३६ \times ५६ + ९} = \sqrt{२०१६+९} = \sqrt{२०२५} = ४५$

६ = कनिष्ठ = क, ज्येष्ठ = ३प

$\therefore प = \frac{५}{३} = १५$

क मान से उत्थापन देने पर

प्रथम राशि $= \frac{५क}{३} = \frac{५ \times ६}{३} = १०$

द्वितीय राशि = क = ६

यदि कनिष्ठ = १८० = क का मान

अतः य $= \frac{५क}{३} = \frac{१८० \times ५}{३} = ६० \times ५ = ३००$

द्वितीय राशि = १८० ।

इन राशियों से सभी आलाप घट जायँगे

यदि राशियाँ = १० । ६

तो दोनों का वर्गयोग = १००+३६ = १३६

दोनों का घात = ६० ।

योग करने पर = १९६ = $(१४)^२$

राशि योग = (१० + ६) = १६

इसे पूर्वमूल से गुणित करने पर

१६ × १४ = २२४ ।

सरूप करने से २२४ + १ = २२५ = वर्गात्मक ।

आद्योदाहरणम्—

राश्योर्ययोः कृतियुतिवियुती चैकेन संयुते वर्गौ ।

रहिते वा तौ राशी गणयित्वा कथय यदि वेत्सि ॥४॥

अथ प्रथमोदाहरणे कल्पितौ राशिवर्गौ याव ४, याव ५ रू १ । अनयोर्योगवियोगौ रूपयुतौ मूलदौ भवतः । कथितप्रथमवर्गस्य मूलमेको राशिः या २ । द्वितीयस्यास्य याव ५ रू १ वर्गप्रकृत्या मूले क १ ज्ये २ वा क १७ ज्ये ३८ । अनयोर्ज्येष्ठपदं द्वितीयराशिः । ह्रस्वं

यावत्तावन्मानेनोत्थाप्याद्यराशिः । एवं जातौ राशी २, २ वा ३४, ३८ ।

अथ द्वितीयोदाहरणे तथैव कल्पितः प्रथमराशिः या २ । द्वितीयस्यास्य याव ५ रू१ । वर्गप्रकृत्या मूले क ४ ज्ये ९ वा क ७२ ज्ये १६१ । कनिष्ठेन प्रथम उत्थापितो ज्येष्ठं द्वितीय इति जातौ राशी ८, ९ वा १४४, १६१ ।

अत्राल्पराशिवर्गेण यो राशिरूनितो युतश्च मूलदः स्यात् स तावद्व्यक्त एव द्वितीयो ज्ञेयः । तस्यानयनेऽप्युपायस्तद्यथा—'

कल्पितराशिवर्गः ४ । अनेन द्वितीयराशिरूनितो युतश्च मूलदः स्यादित्ययं द्विगुणः ८ । वर्गान्तरमिदं कयोरपि च योगान्तरघातसमम् । अतोऽन्तरमिष्टं २ कल्पितं "वर्गान्तरं राशिवियोगभक्तम्' इति जाते वर्गान्तरयोगमूले १, ३ । आद्यस्य वर्गे १ कल्पितराशिवर्गं ४ प्रक्षिप्य द्वितीयस्य वर्गात् ९ वा विशोध्य जातो द्वितीयः ५ । अत्र चाल्पराशिवर्गस्तथा कल्प्यते यथा द्वितीयराशिरभिन्नः स्यात् । तथाऽन्यः कल्पितः ३६ । द्विगुणः ७२ । इदं वर्गान्तरम् । राश्यन्तरषट्के कल्पिते जातौ ३, ९ । अन्यवर्गात् ८१ कल्पितं विशोध्य जातो द्वितीयः ४५ । चतुष्केण वा ८५ द्विकेन वा ३२५ ।

अन्यथा कल्पने युक्तिः । राश्योर्घातेन द्विगुणेन वर्गयोगो युतोनितोऽवश्यं मूलदः स्यात् । राशिवधो द्विगुणो यथा वर्गः स्यात् तथैको वर्गोऽन्यो वर्गार्धमिति कल्प्यौ । यतो वर्गयोर्वधो वर्गो भवतीति तथा कल्पितौ । एको वर्गः १ । अन्यो वर्गार्धम् २ । अनयोर्घातो २ द्विगुणः ४ अयं प्रथमः । अयमल्पराशिवर्गः । तयोरेव वर्गयोगः ५ । अयं द्वितीयो राशिः ।

अथवैको वर्गः ९ । अन्यो वर्गार्धम् २ । अनयोर्घातो १८ द्विगुणः ३६ । अयमल्पराशिवर्गः । अथ तयोरेव वर्गयोगः ८५ । अयं द्वितीयो राशिः । एतौ व्यक्तौ यावत्तावद्गुणौ कल्पितौ । प्रथमोदाहरणे रूपयुतः द्वितीयो राशी रूपेणोनो द्वितीयोदाहरणे कार्यः । एवं कृत्वा तौ तथा राशिवर्गौ कल्पितौ यथाऽऽलापद्वयं घटते किन्तु प्रथमस्य मूलं गृहीत्वा द्वितीयस्य वर्गप्रकृत्या मूलमित्यादि पूर्वोक्तमेव । एवमनेकधा ।

सुधा—वे कौन सी राशियां हैं जिनका वर्गयोग या वर्गान्तर एक युक्त या एकोन होने पर वर्गात्मक होता है ? यदि जानकार हो तो बतलाओ ।

कल्पित प्रथम राशि वर्ग = $४ य^2$,

एवं द्वितीय राशि वर्ग = $५य^२ - १$

प्रश्नानुसार

राशि वर्ग योग + १ = वर्गात्मक = $४य^2 + ५य^2 - १ + १ = ९ य^2$

= वर्गात्मक ।

एवं राशिवर्गान्तर+१ = वर्गात्मक $५य^२ - १ - ४य^२ + १ = य^2$ = वर्गात्मक ।

$\therefore$ प्रथम राशिवर्ग = $४य^२$

$\therefore$ प्रथम राशि = २य

द्वितीय राशि^{२} = $५य^2 - १$

$\therefore$ द्वितीय राशि = $\sqrt{५य^२ - १}$

वर्ग प्रकृति द्वारा यदि कनिष्ठ = १ तो 'इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः' आदि के अनुसार ज्येष्ठपद = २, वा यदि कनिष्ठ = १७ तो ज्येष्ठ पद = ३८ कनिष्ठ = य = १ अतः उत्थापन देने से

प्रथम राशि = २, यदि कनिष्ठ = १७ = य तो प्रथमराशि = ३४,

द्वितीय राशि = $\sqrt{५ - १} = २$ वा $\sqrt{१७^2 \times ५ - १} =$

$\sqrt{२८९ \times ५ - १} = ३८$ ।

द्वितीयालापानुसार दोनों के वर्गयोग में एक घटाने से भी वर्गात्मक होता है $\therefore$ दोनों का वर्ग योग − १ = वर्गात्मक

द्वितीयालाप में कल्पित प्रथम राशिवर्ग = $४य^२$

कल्पित द्वितीय राशिवर्ग = $५य^२ + १$

अतः वर्गयोग = $५य^२ + १ + ४य^२ = ९य^२ + १$

अतः रूपोन वर्गयोग = $९य^2 = (३य)^2$ = वर्गात्मक ।

एवं रूपरहितवर्गान्तर = $५य^2 + १ - ४य^२ - १ = य^2 = (य)^२$

= वर्गात्मक ।

अतः प्रथम राशिवर्ग का मूल = २य = प्रथम राशि ।

एवं द्वितीय राशि = $\sqrt{५य^२ + १}$

यहाँ वर्ग प्रकृति द्वारा यदि कनिष्ठ = ४

तो ज्येष्ठपद = ९

य = कनिष्ठ = ४,

अतः प्रथम राशि = २य = ८

द्वितीय राशि = ९

अथवा यदि कनिष्ठ = ७२ तो ज्येष्ठपद = १६१

∴ प्रथमराशि = २य = ७२ × २ = १४४

द्वितीय राशि = १६१

मूलगतगद्य "अत्राल्पराशिवर्गेण यो राशिरूनितो युतश्च मूलदः स्यात् स तावद्व्यक्तएव, द्वितीयोज्ञेयः। तस्यानयनेऽप्युपाय" स्तद्यथा—के अनुसार

कल्पित लघुराशि = २ = व्यक्त

∴ लघु राशिवर्ग = ४, इस से ऊनयुत द्वितीय राशि मूलद है अतः २ × लघुराशि वर्ग = ४ × २ = ८ यह किसी दो राशियों का वर्गान्तर है। किन्तु वर्गान्तर = योग × अन्तर।

अतः यदि कल्पित अन्तर = २ तो $\frac{८}{२}$ = ४ = योग

संक्रमण से दो राशियाँ = १, ३,

इनमें वर्गान्तर मूल = १, वर्गयोग मूल = ३,

आद्यवर्ग १ + कल्पितराशिवर्ग = १ + ४ = ५ = द्वितीयराशि अथवा ३ के वर्ग = ९। ९ − कल्पितराशिवर्ग = ९ − ४ = ५ = द्वितीयराशि

यहाँ लघुराशि ऐसी हो जिससे द्वितीय राशि अभिन्न आवे।

यदि कल्पित लघुराशिवर्ग = ३६ तदा ३६ × २ = ७२ यह भी किसी दो राशियों का वर्गान्तर है, यदि कल्पित राश्यन्तर=६ तो $\frac{७२}{६}$ = योग = १२

संक्रमण से राशिद्वय = ३, ९, वर्गान्तर मूल = ३

तथा वर्गयोगमूल = ९

अतः प्रथम राशि के वर्ग = ९। इसमें कल्पित राशि वर्ग ३६ जोड़ने से ९ + ३६ = ४५ = = द्वितीय राशि।

अथवा द्वितीय राशि वर्ग ८१ में कल्पित राशि वर्ग ३६ घटाने पर भी वहीं द्वितीय राशि = ४५।

अथवा कल्पित राशि ६ के वर्ग ३६ को द्विगुण किया ३६ × २ = ७२ = वर्गान्तर। कल्पित राश्यन्तर = ४ से भाग देने पर लब्धि = १८=राशि योग

सङ्क्रमण से राशिद्वय=७, ११,

अतः प्रथम राशि वर्ग ४९ में कल्पित राशि वर्ग ३६ जोड़ने पर

४९ + ३६ = ८५।

अथवा यदि राश्यन्तर = २ तो द्वितीय राशि=३२५।

अथवा ग्रन्थकार की ही राशि कल्पनार्थ—

दूसरी युक्ति—

चूँकि $२य \times क$ को $य^2 + क^2$ में जोड़ने या घटाने से अवश्य मूलात्मक होता है यथा $य^2 + २ यक + क^2 = (य + क)^2$

$य^2 - २ यक + क^2 = (य - क)^2$

अतः ऐसी दो राशियाँ कल्पित की जिनमें एक वर्गात्मक और दूसरी राशि वर्गार्ध हो जिससे दोनों का घात द्विगुणित होने पर वर्गात्मक हो जाय।

ऐसी राशियाँ = १, २, इन दोनों का घात को द्विगुणित करने पर $१ \times २ \times २ = ४$ = लघुराशिवर्ग दोनों राशियों का वर्ग योग=१+४=५=द्वितीय राशि अथवा एक राशि वर्गात्मक=९ दूसरी राशि वर्गार्ध = २ यदि मानी जाय तो इन दोनों का द्विगुण घात = ३६=लघुराशि वर्ग।

इन दोनों का वर्ग योग $= ९^2 + २^2 = ८१ + ४ = ८५$ द्वितीय राशि हुई।

दोनों व्यक्त राशि यावत्तावद्वर्ग गुणित कल्पित है।

प्रथमोदाहरण में रूपोन दूसरी राशि और द्वितीय उदाहरण में रूप युक्त द्वितीय राशि जैसे प्रथमोदाहरण में $य^2 - १$, और द्वितीयोदाहरण में $य^2 + १$, द्वितीय राशि है।

वासना—अत्र कल्पित राशिवर्गः ४। अनेन द्वितीयराशिरूनितो युतश्च मूलदः स्यादित्ययं द्विगुण इत्यादि मूक्तगतगद्यस्य वासना :—

कल्प्यते $क^2 = य - इ^2$। एवम् $न^2 = य + इ^2$

अनयोरन्तरम्

$$न^2 - क^2 = २इ^2$$

यदि $न - क = इ'$ तदा

$$न + क = \frac{२इ^2}{इ'}$$

अतः सङ्क्रमणेन

$$क = \frac{\frac{२इ^2}{इ'} - इ'}{२}$$

$$न = \frac{\frac{२इ^2}{इ'} + इ'}{२}$$

$$य = क^2 + इ = न^2 - इ^2$$

एतेनोपपन्नं मूलोक्तगद्यम्

अथ कस्याप्युदाहरणम्—

यत् स्यात् साल्पवधार्धतो घनपदं यद्वर्गयोगात् पदं
यद्योगान्तरयोर्द्विकाभ्यधिकयोर्वर्गान्तरात् साष्टकात् ।
यच्चैतत्पदपञ्चकं तु मिलितं स्याद्वर्गमूलप्रदं
तौ राशी कथयाशु निश्चलमते षट्काष्टकाभ्यां विना । ५॥

साल्पवधस्यार्धाद्घनपदं ग्राह्यम् । अत्रालापानां बहुत्वेऽसकृत् क्रिया कार्या सा न निर्वहत्यतो बुद्धिमता तथा राशी कल्प्यौ यथैकेनैव वर्णेन सर्वेऽप्यालापा घटन्ते ।

तथा कल्पितौ राशी याव १ रू १̇, या २ । अनयोः साल्पवधार्धतो घनपदम् या १ । वर्गयोगात् पदम् याव १ रू १ । द्व्यधिकयोगपदम् या १ रू १ । द्व्यधिकान्तरपदम् या १ रू १̇ । साष्टवर्गान्तरपदम् याव १ रू ३̇ । एषां योगः याव २ या ३ रू २̇ अयं वर्ग इति कालकवर्गसमं कृत्वा पक्षावष्टभिः संगुण्य पञ्चविंशतिरूपाणि प्रक्षिप्य प्रथमपक्षस्य मूलम् या ४ रू ३ । परपक्षस्यास्य काव ८ रू २५ वर्गप्रकृत्या मूले क ५ ज्ये १५ वा क ३० ज्ये ८५ वा क १७५ ज्ये ४९५ । ज्येष्ठं पूर्वपदेन समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम् ३, वा $\frac{४१}{२}$, वा १२३ । अनेनोत्थापितौराशी ८, ६ वा $\frac{१६७७}{४}$, ४१ वा १५१२८, २४६ । एवमनेकधा ।

अथवा यावत्तावद्वर्गो यावत्तावद्द्वयेन युत एको राशिः याव १ या २ यावत्तावद् द्वयं रूपद्वययुतमन्यराशिः या २ रू २ । अथवा यावत्तावद्वर्गो यावत्तावद् द्वयोन एको राशिः याव १ या २̇ । यावत्तावद् द्वयं रूपद्वयोनमन्यराशिः या २ रू २̇ । अथवा यावत्तावद्वर्गो यावत्तावच्चतुष्टयं रूपत्रययुतं चैको राशिः याव १ या ४ रू ३ । यावत्तावद् द्वयं रूपचतुष्टयं चान्यः या २ रू ४ ॥

सुधा : वे कौन सी दो राशियाँ है, जिनके गुणनफल में छोटी राशि जोड़ कर आधा करने पर धनात्मक बन जाती हैं, जिन दोनों का वर्ग योग भी मूलप्रद हो जाता है, दोनों के योग या अन्तर में दो जोड़ने पर भी मूल मिलता है, दोनों राशियों के वर्गान्तर में आठ जोड़ने पर भी वर्गमूल हो जाता है, और उपर्युक्त पाँचों मूलों का योग भी वर्गमूल प्रद होता है । छे आठ के अतिरिक्त उन दोनों राशियों को बतलाओ ।

यहाँ कल्पित राशियाँ $=$ य^{२} $-$ १, २य,

इन दोनों राशियों पर से अन्तिमातिरिक्त सभी आलाप घट जाते हैं।

जैसा कि $\frac{\text{राशिद्वय घात} + \text{छोटी राशि}}{२}$

$= \frac{(य^२ - १) + २य}{२} = \frac{२य^३ - २य + २य}{२} = य^३ =$ घनमूलप्रद,

वर्गयोग $= य^४ + २य^२ + १ =$ मूलप्रद

राशिद्वययोग $+ २ = य^२ - १ + २य + २$

$= य^२ + २य + १ =$ वर्गमूलप्रद

राशिद्वयान्तर $= य^२ - १ - २य$ ।

राशिद्वयान्तर $+ २ = य^२ - २य + १ =$ वर्गमूलद

दोनों राशियों का वर्गान्तर $+ ८ =$

$य^४ - २य^२ + १ - ४य^२ + ८ =$

$य^४ - ६य^२ + ९ =$ वर्गमूलद

पदपञ्चकयोग =

$य + य^२ + १ + य + १ + य - १ + य^२ - ३ =$

$२य^२ + ३य - २$ यह प्रश्नानुसार वर्गात्मक है,

अत: इसे $क^२$ के समान माना

$२य^२ + ३य - २ = क^२$

$\therefore\ २य^२ + ३य = क^२ + २$

$\therefore\ १६य^२ + २४य = ८क^२ + १६$

पक्षद्वय से ९ जोड़ने पर

$१६य^२ + २४य + ९ = ८क^२ + २५$

मूलग्रहण करने पर

$४य + ३ = \sqrt{८क^२ + २५}$

अतः वर्ग प्रकृति की प्रवृत्ति हुई, कल्पित कनिष्ठ = ५ तो ज्येष्ठ = १५

यदि कनिष्ठ = ३०, तो ज्येष्ठ = ८५

यदि वा कनिष्ठ १७५ तो ज्येष्ठ = ४९५ ।

तीनों ज्येष्ठ पद पूर्वपद ($४य+३$) के समान है

अतो यदि $४य+३=१५$ तो $य=३$

यदि $४य+३=८५$ तो $य=\frac{४१}{२}$

यदि $४य+३=४९५$ तो $य=\frac{४९२}{४}=१२३$

अतः उत्थापन देने से—

प्रथम राशि $=$ य^2 $-$ १ $=$ ८

द्वितीय राशि $=$ २य$=$६

वा प्रथमराशि$=$य^2 $-$ १$= \left(\frac{४१}{२}\right)^2 -$ १$=\frac{१६८१}{४} -$ १

$= \frac{१६७७}{४}$

द्वितीय राशि$=$२य $= \frac{४१}{२} \times$ २ $=$ ४१

अथवा प्रथम राशि $=$ (१२३)^2 $-$ १ $=$ १५१२८

द्वितीय राशि $=$ १२३ $\times$ २ $=$ २४६

ग्रंथोक्त ही दूसरा प्रकार

कल्पित राशियाँ $=$ य^2 $+$ २य, २य $+$ २

इन दोनों के घात में अल्प राशि जोड़ने पर

(य^2 $+$ २य) (२य $+$ २) $+$ २य $+$ २ $=$

२य^3 $+$ ४य^2 $+$ २य^2 $+$ ४य $+$ २य $+$ २$=$

२य^3$+$६य^2 $+$ ६य $+$ २ ।

इसका आधा $=$ य^3$+$३य^2 $+$ ३य $+$ १ $=$ (य $+$ १)^3

दोनों राशियों का वर्गयोग $=$

य^4 $+$ ४ य^3$+$४ य^2$+$४ य^2$+$८ य$+$४

$=$य^4$+$४ य^3$+$८य^2 $+$८ य$+$४

$=$(य^2$+$२ य$+$२)^2

राशिद्वय योग $+$ २ $=$य^2 $+$ २ य$+$२ य$+$२ $+$ २ $=$

$=$ य^2$+$४ य$+$४$=$(य$+$२)^2

राशिद्वयान्तर $+$ २ $=$ य^2$+$२ य $-$ २ य $-$ २$+$२$=$य^2$=$(य)^2

राशिद्वय वर्गान्तर$+$८$=$य^4$+$४ य^3$+$४ य^2 $-$ ४य^2 $-$ ८ य $-$ ४$+$८

$=$य^4$+$४ य^3 $-$ ८ य$+$४

$=$(य^2$+$२ य $-$ २)^2

पद पञ्चक का योग $=$ य $+$ १, $+$य^2$+$२ य$+$२, $+$ य$+$२, $+$य$+$य^2 $+$ २ य $-$ २ $=$ २ य^2 $+$७ य $+$ ३ यह प्रश्नानुसार वर्गात्मक है

अतः २ य^2$+$७ य$+$३$=$क^2

$\therefore$ २ य^2$+$७ य $=$ क^2 $-$ ३

$\therefore$ १६ य^2$+$५६ य $=$ ८ क^2 $-$ २४

दोनों पक्षों में ४९ जोड़ने पर

$१६ य^2+५६ य+४९=८ क^2+२५$

$\therefore \sqrt{१६ य^2+५६ य+४९}=\sqrt{८ क^2+२५}$

$\therefore ४ य+७=\sqrt{८ क^2+२५}$

वर्गप्रकृति से कल्पित कनिष्ठ = ५ तो

$(५)^2 \times ८+२५=२००+२५=२२५$

$\sqrt{२२५}=१५=$ज्येष्ठ पद

यदि कनिष्ठ = ३० तो ज्येष्ठपद = ८५

ज्येष्ठ पद = $१५=४ य+७ \therefore ४ य=८$

$\therefore य=२$

अतः प्रथम राशि $=४+४=८$

द्वितीय राशि $=२ य+२=६$

यदि $४ य+७=८५=$ज्येष्ठपद

$४ य=७८ \therefore य=\frac{७८}{४}=\frac{३९}{२}$

$\therefore$ प्रथम राशि $य^2+२ य=\left(\frac{३९}{२}\right)^2+३९$

$=\frac{१५२१}{४}+\frac{१५६}{४}=\frac{१६७७}{४}$

द्वितीय राशि $=\frac{३९}{२}\times २+२=३९+२=४१$

अथवा राशियाँ $=य^2-२ य,\ २ य-२$, तो

उपर्युक्त रीति से $य=\frac{४३}{२}$,

यदि वा प्रथम राशि $=य^2+४ य+३$ तो

$य=\frac{३७}{२}$

द्वितीय राशि $=२ य+४=४१$

उत्थापन से राशियों का मान तथा सभी आलापों का घटना देख लेना चाहिए।

एवं सहस्रधा गूढ़ा मूढ़ानां कल्पना यतः।
क्रियया कल्पनोपायस्तेषां मेव च कथ्यते ॥

इस तरह अनेक प्रकार की कल्पना मन्दबुद्धियों के लिए गूढ़ है, अतः क्रिया द्वारा राशि कल्पना की युक्ति बतलाता हूँ।

अथ सूत्रं वृत्तद्वयम्

सरूपमव्यक्तमरूपकं वा वियोगमूलं प्रथमं प्रकल्प्य ।
योगान्तरक्षेपकभाजिताद्यद्वर्गान्तरक्षेपकतः पदं स्यात् ।।११।।
तेनाधिकं तत्तु वियोगमूलं स्याद्योगमूलं तु तयोस्तु वर्गौ ।
स्वक्षेपकोनौ हि वियोगयोगौ स्यातां ततः संक्रमणेन राशी।।१२।।

सुधा :—प्रथमतः सरूप या अरूप अव्यक्त को वियोग मूल माने योगान्तर क्षेप से वर्गान्तक्षेप में भागफल का जो मूल हो, उसे योग मूल समझें। उपर्युक्त योग मूल एवं वियोगमूल के वर्गों में अपना२ क्षेप घटा दें तो शेष क्रमशः योग और वियोग होंगे।

योग वियोग ज्ञान से सङ्क्रमण गणित द्वारा राशिद्वय का ज्ञान करना चाहिए।

वासना—कल्पते योगान्तक्षेप मानम् = क्षे

वर्गान्तरक्षेपमानम् = क्षे'

वर्गयोगक्षेपमानम् = क्षे'' ।

वियोगमूलम् = य, योगमूलम् = क ।

प्रश्नानुसारेण :—$\text{वियोगः} = \text{य}^2 - \text{क्षे}$, $\text{योगः} = \text{क}^2 - \text{क्षे}$,

$$\text{अतोऽल्पराशिः} = \frac{\text{क}^2 - \text{य}^2}{2},$$

$$\text{बृहद्राशिः} = \frac{\text{क}^2 + \text{य}^2 - 2\text{क्षे}}{2}$$

बृहद्राशि वर्ग =

$$\frac{\text{क}^4 + 2\text{य}^2.\text{क}^2 - 4\,\text{क्षे}.\text{क}^2 + \text{य}^4 - 4\text{क्षे}\,\text{य}^2 + 4\,\text{क्षे}^2}{4}$$

$$\text{अल्पराशिवर्गः} = \frac{\text{क}^4 - 2\text{य}^2.\text{क}^2 + \text{य}^4}{4}$$

$$\text{वर्गान्तरम्} = \frac{4\text{य}^2.\text{क}^2 - 4\,\text{क्षे}.\text{य}^2 - 4\text{क्षे}\,\text{क}^2 + 4\text{क्षे}^2}{4}$$

$$= \text{य}^2.\text{क}^2 - \text{क्षे}.\text{य}^2 - \text{क्षे}.\text{क}^2 + \text{क्षे}^2 =$$

$$\text{य}^2.\text{क}^2 - 2\text{य}.\text{क}\,\text{क्षे} + \text{क्षे}^2 - \text{क्षे}\,\text{य}^2 + 2\text{य}.\text{क}\,\text{क्षे} - \text{क्षे}.\text{क}^2$$

$= (\text{य}.\text{क} - \text{क्षे})^2 - \text{क्षे}\,(\text{य}^2 - 2\text{य}.\text{क} + \text{क}^2)$ अत्र यदि

क्षे ($य^2$ − २यक + $क^2$) इदं क्षेप मानं तदा (य.क − क्षे) इद-मवश्यं निरवयवम्। अतो वर्गान्तर क्षेपमानम् = क्षे′ =
क्षे ($य^2$ − २ य क + $क^2$)

$$\therefore \frac{क्षे'}{क्षे} = य^2 - यक + क^2$$

मूलग्रहणेन $क - य = \sqrt{\frac{क्षे'}{क्षे}} =$ मूल

$$\therefore मू + य = क ।$$

एतेन सर्वमुपपन्नम्। वासनेय विशेषकृता सर्वैरपि व्याख्याकारैः संशोधकै-र्वाऽविकलमुद्धृतातीवोपयुक्ता च।

यद्यत्र $\frac{क्षे}{क्षे} = \frac{0}{0}$ तदाऽस्य मानं कियदितिज्ञानं

दुर्घटमतस्तदाऽऽचार्योक्तानुसारेण न राशिकल्पना समीचीनाऽतोऽस्मभि-रन्यथा राशिकल्पनोपायो यतित इति विशेषचरणानामेवोक्तिः।

राशिकल्पनोपायो यथा :—कल्प्यते $\sqrt{\frac{क्षे}{क्षे}} = प$

ततः क=य+प

$$पूर्वराशिद्वयवर्गयोगः = \frac{२य^४ + २क^४ - ४ क्षे य^२ - ४ क्षे क^2 + ४क्षे^2}{४}$$

$$= \frac{२य^४ + २ (य + प)^४ - ४ क्षे य^2 - ४ क्षे (य+प)^2 + ४ क्षे^2}{४}$$

$$= \frac{२य^४ + २य^४ + ८य^3 प + १२ य^२ प^२ + ८ यप^3 + २प^४ - ४क्षे य^2}{४}$$

$$+ \frac{- ४ क्षे य^2 - ८ क्षे. य, प - ४ क्षे प^२ + ४ क्षे^2}{४}$$

$$= य^४ + २य^3. प + ३य^2. प^2 + २य प^3 - क्षे य^2 \frac{+ प^४ - २ य^२ क्षे}{२}$$

$- \text{क्षे}\, \text{य}^2 - २\, \text{क्षे}.\, \text{य}.\, \text{प} - \text{क्षे}.\, \text{प}^२ + \text{क्षे}^2 =$

$\text{य}^४ + २\text{य}^3.\, \text{प} + \text{य}^2\, (३\text{प}^2 - \text{क्षे}) + \text{य}\, (२\text{प}^3 - २\, \text{क्षे}.\, \text{प}.) - \text{क्षे}.\, \text{य}^2 +$

$\frac{\text{प}^४}{२} + \text{क्षे}^2 - \text{क्षे}.\, \text{प}^२$

$= \text{य}^४ + २\text{य}^3.\, \text{प} + \text{य}^2\, (३\text{प}^2 - २\text{क्षे}) + \text{य}\, (२\, \text{प}^3 - २\, \text{क्षे}.\, \text{प}),$

$+ \frac{\text{प}^४}{२} + \text{क्षे}^२ - \text{क्षे}.\, \text{प}^२ =$

$\text{य}^४ + २\text{य}^3.\text{प} + \text{य}^२.\, \text{प}^2 - \text{य}^2\, \text{प}^२ + \text{य}^2\, (३\text{प}^२ - २\, \text{क्षे}) +$

$\text{य}\, (२\text{प}^3 - २\, \text{क्षे}.\, \text{प}) + \frac{\text{प}^४}{२} + \text{क्षे}^2 - \text{क्षे}.\, \text{प}^2$

$= (\text{य}^2 + \text{य}.\, \text{प})^2 + २\text{य}^२\, (\text{प}^2 - \text{क्षे}) + \text{य}\, (२\text{प}^3 - २\, \text{क्षे}.\, \text{प}) +$

$\frac{\text{प}^४}{२} + \text{क्षे}^2 - \text{क्षे}.\, \text{प}^2$

$= (\text{य}^2 + \text{यप})^२ + २\, (\text{प}^२ - \text{क्षे})\, (\text{य}^2 + \text{य}.\, \text{प}) + (\text{प}^2\ \ \text{क्षे})^2 +$

$\text{य}^2\, (२\text{य}^2 - २\text{क्षे}) + \text{य}\, (२\text{प}^3 - २\, \text{क्षे}.\, \text{प})$

$- २\, (\text{प}^2 - \text{क्षे})\, (\text{य}^2 - \text{य}.\, \text{प}.) - (\text{प}^२ - \text{क्षे}^2) + \frac{\text{प}^४}{२} + \text{क्षे}^२ - \text{क्षे}.\, \text{प}^2$

$= \{ (\text{य}^2 + \text{य}.\, \text{प}) + (\text{प}^2 - \text{क्षे}) \}^2 + \text{य}^2\, (२\text{प}^2 - २\, \text{क्षे}) +$

$२\, (\text{प}^2 - \text{क्षे})\, \text{य}.\, \text{प}$

$- \text{य}^२\, (२\text{प}^2 - २\text{क्षे}) - २\, (\text{प}^2 - \text{क्षे})\, \text{य}.\, \text{प} - (\text{प}^२ - \text{क्षे})^2$

$+ \frac{\text{प}^४}{२} + \text{क्षे}^2 - \text{क्षे}.\, \text{प}^२$

$= \{ (\text{य}^2 + \text{य}.\, \text{प}) + (\text{प}^2 - \text{क्षे}) \}^2 + \frac{\text{प}^४}{२} - \text{प}^४ + २\, \text{क्षे}.\, \text{प}^२ - \text{क्षे}^2 + \text{क्षे}^2$

$- \text{क्षे}.\, \text{प}^2$

$= \{ (\text{य}^2 + \text{य}.\, \text{प}) + (\text{प}^२ - \text{क्षे}) \}^2 - \frac{\text{प}^४}{२} + \text{क्षे}'$

अतो यदि वर्गयोगक्षेप मानम् = $\frac{प^४}{२}$ – क्षे इदं भवेत्तदाऽवश्यं निरवयवं मूलम् (य² + य. प) + (प² –क्षे) इदं स्यात् । तथा कृते जातं वर्गयोगक्षेप मानम् = क्षे" $\frac{प^४}{२}$ – क्षे' ।

∴ प⁴ = २ (क्षे" + क्षे)

ततः प = $\sqrt[४]{२(क्षे'' + क्षे)}$

अनेन विशेषोक्तमिदम् :—

वर्गान्तरक्षेपकसंमितिर्युता क्षेपेण कृत्योर्युतिजेन वै ततः ।
द्विघ्न्याः पदंतत्पदयुग् वियोगजं मूलं युते मूलमतस्तयोर्मिती ॥

सूत्र मुपपद्यते ।

तदीयः प्रश्नश्च.

यस्यात् व्यल्पवधार्धतो घनपदं वर्गान्तराद्यत्पदं
यद्योगात्पद मन्तरादपि पदं मातङ्गयुक्तात्पदम् ।
यत्कृत्योर्युतितोऽथ सर्वपदजो योगो विरूपो भवेत्
विद्वन् मूलद एव तौ वद शपद्यस्तीह चेत्ते गतिः ॥

अत्र राशिकल्पने ह्याचार्योक्तं सूत्रं व्यभिचरति विशेषोक्तं तु आचार्योक्तोदाहरणयोरत्राप्यव्यभिचारीति सुधीभिर्भृशं विभावनीयम् ।

उदाहरणम

राश्योर्योगवियोगकौ त्रिसहितौ वर्गौ भवेतां ययो-
र्वर्गैक्यं चतुरूनितं रवियुतं वर्गान्तरं स्यात् कृतिः ।
साल्पं घातदलं घनः पदयुतिस्तेषां द्वियुक्ता कृति-
स्तौ राशी वद कोमलामलमते षट्सप्त हित्वाऽपरौ ॥६॥

अत्र रूपोनमव्यक्तं वियोगमूलं प्रकल्प्य या १ रु १̇ । अत्राप्यनयैव युक्त्या कल्पितौ राशी याव १ रू २̇, या २ । वा कल्पितौ राशी याव १ या २ रू १̇, या २ रू २ । राश्योर्योगस्त्रिसहितः याव १ या २ रू १ । राश्योरन्तरं त्रिसहितम् याव १ या २̇ रू १ । प्रथमराशिवर्गः= यावव १ याव ४̇ रू ४ । द्वितीयराशिवर्गः= याव ४ । अनयोरैक्यं चतुरूनम् यावव १ । तयोरेवान्तरं रवियुतम् यावव १ याव ८̇ रू १६.

राशिघातः याघ २ या ४̇ । दलम् याघ १ या २̇ । साल्पं याघ १ । एभ्यो मूलानि तत्र त्रियुतयोगमूलं या १ रू १ । त्रियुतवियोगमूलं या १ रू १̇ । चतुरूनिवर्गैक्यमूलम् याव १ । रवियुतवर्गान्तरमूलम् याव १ रू ४̇ तथा घनमूलम् या १ । पदपञ्चकयोगो द्वियुतो जातः याव २ या ३ रू २̇ एष वर्ग इति कालकवर्गेण समीकरणाय न्यासः—

याव २ या ३ काव ० रू २̇ ।
याव̇ ० या ० काव १ रू̇ ० ।

समीकरणात् पक्षशेषौ याव २ या ३, काव १ रू २ । अत्रैतावष्टभिः संगुण्य नव रूपाणि प्रक्षिप्याद्यपक्षस्य मूलम् या ४ रू ३ । परपक्षस्यास्य काव ८ रू २५ । वर्गकृत्या मूले क ५ ज्ये १५ वा क १७५ ज्ये ४९५ । ज्येष्ठं प्रथमपक्षमूलसमं कृत्वाऽऽप्तं यावत्तावन्मानं ३ वा १२३ । वर्गेणाद्यं केवलनान्त्यमुत्थाप्य जातौ राशी ७, ६ वा १५१२७, २४६ ।

अथवा कल्पितद्वितीयराश्योर्योगस्त्रियुतः—

याव १ या ४ रू ४ । वियोगस्त्रियुतः याव १ । अत्राद्यवर्गः

यावव १ याघ ४ याव २ या ४̇ रू १ । द्वितीयाराशिवर्गः याव ४ या ८ रू ४ । अनयोरैक्यं चतुरूनम् यावव १ याघ ४ याव ६ या ४ रू १ । वर्गान्तरं रवियुतं यावव १ याघ ४ याव २̇ या १२̇ रू ९ ।

राशिघातः याघ २ याव ६ या २ रू २̇ ।

दलम् याघ १ याव ३ या १ रू १̇ ।

साल्पं याघ १ याव ३ या ३ रू १ । एभ्यो मूलानि तत्र—

त्रियुतयोगमूलम्	या १ रू २ ।
त्रियुतवियोगमूलम्	या १ ।
चतुरूनितवर्गैक्यमूलम्	याव १ या २ रू १ ।
रवियुतवर्गान्तरमूलम्	याव १ या २ रू ३̇ ।
घनमूलम्	या १ रू १ ।

पदपञ्चकयोगो द्वियुक्तः याव २ या ७ रू ३ । वर्ग इति कालकवर्गेण समीकरणाय—

न्यासः:—
याव २ या ७ काव० रू ३ ।
याव ० या ० काव १ रू ० ।

समशोधनात् पक्षशेषौ याव २ या ७, का रू ३̇ । अत्र पक्षावष्टभिः संगुण्यैकोनपञ्चाशद्रूपाणि प्रक्षिप्याद्यपक्षमूलं या ४ रू ७ । परपक्षस्यास्य काव ८ रू ५ । वर्गप्रकृत्या मूले क ५ ज्ये १५ वा क १७५ ज्ये ४९५ ।

ज्येष्ठं प्रथमपक्षपदेन समं विधाय लब्धं यावत्तावन्मानम् २ वा १२२। अत्र वर्गेणव्यक्तवर्गराशि केवलेनाव्यक्तमुत्थाप्य जातौ राशी ७, ६ वा १५१२७, २४६।

तद्यथा या २। अस्या वर्गः ४। अनेन याव १ गुणितः ४। केवलेन २ या २ गुणितः ४। उभयोर्व्यक्तत्वाद्योगः ८। ऋणये रूपे १ वियोजितो जात एकः ७ तथा या २ केवलेन या २ गुणितः ४ रूप २ युतो जातः परः ६। एवं द्वितीयः या १२२। वर्गः १४८८४। अनेन याव १ गुणितः १४८८४। केवलेन १२२ या २। गुणितः २४४। उभयोर्व्यक्तयोर्योगादृणं रूपं विशोध्य जात एकः १५१२७। तथा या २ केवलेन १२२ गुणितो व्यक्तरूप-३ युतोऽपरः २४६। एवं बहुधा॥

सुधाः– वे कौन सी दो राशियाँ हैं जिनका योग एवं अन्तर त्रियुक्त होने पर, वर्गैक्य चतुरूनित होने पर वर्गान्तर द्वादशयुक्त होने पर, वर्गात्मक बन जाता है

घातार्ध अल्प राशि युक्त होने पर घन हो जाता है
इस प्रकार आगत मूल योग द्वियुक्त होने पर वर्ग हो जाता है, छे आठ के अतिरिक्त उन दोनों राशियों को कहो।

राशि कल्पनार्थं कल्पित वियोग मूल=य−१,
यहाँ वर्गान्तर क्षेप=१२ योगान्तर क्षेप= ३

$$\text{अतः योग मूल} = \sqrt{\frac{\text{वर्गान्तर क्षेप}}{\text{योगान्तर क्षेप}}} + \text{वियोग मूल}$$

$$= \sqrt{\frac{१२}{३}} + \text{वियोग मूल} = २ + (\text{य}-१) = \text{य}+१$$

अत्र "तयोस्तु वर्गौ स्वक्षेपकोनौ तदा वियोगयोगौ" के अनुसार

$$\text{वियोगमूल}^{२} - ३ = \text{य}^{२} - २\,\text{य} + १ - ३ = \text{य}^{२} - २\,\text{य} - २ = \text{वियोग}।$$

$$\text{एवं योग मूल}^{२} - ३ = \text{य}^{2} + २\,\text{य} + १ - ३ = \text{य}^{2} + २\text{य} - २ = \text{योग}.$$

ततः सङ्क्रमण के द्वारा लघुराशि=

$$\frac{\text{योग}-\text{वियोग}}{२} = \frac{\text{य}^{2} + २\,\text{य} - २ - (\text{य}^{2} - २\,\text{य} - २)}{२}$$

$$= \frac{४\text{य}}{२} = २\,\text{य}$$

$$\text{एवं बृहद्राशि} = \frac{\text{योग}+\text{वियोग}}{२} = \frac{२\,\text{य}^{2} - ४}{२} = \text{य}^{2} - २.$$

अतः लघु राशि=२ य, बृहद्राशि=$य^2$–२.
अब प्रश्नानुसार

दोनों राशियों के योग में तीन जोड़ने पर $य^2-२+२ य+३=य^2+२ य+१$
$=(य+१)^2$

दोनों राशियों के अन्तर में ३ जोड़ने पर $य^2-२ य+१=(य-१)^2$

दोनों राशियों के वर्गैक्य में चार घटाने पर

$य^4-४ य^2+४+४ य^2-४=य^4=(य^2)^2$

दोनों राशियों के वर्गान्तर में १२ जोड़ने पर

$य^4-४ य^2+४-४ य^2+१२=य^4-८ य^2+१६=(य^2-४)^2$

घातार्ध में स्वल्पराशि जोड़ने पर

$$\frac{(य^2-२)(२ य)}{२}+२ य=\frac{२ य^3-४ य}{२}+२य=य^3-२य+२य$$

$=य^3=(य)^3$

पदयोग= $य+१+य-१+य^2+य^2-४+य$
$=२य^2+३ य-४$। इसमें दो जोड़ने पर
$=२ य^2+३ य-२$=वर्गात्मक=$क^2$

अतः $२ य^2+३ य-२=क^2$

$\therefore २ य^2+३ य=क^2+२$

$\therefore १६ य^2+२४ य=८ क^2+१६$

$\therefore १६ य^2+२४ य+९=८ क^2+२५$

मूल ग्रहण करने पर

$४ य+३=\sqrt{८ क^2+२५}$

वर्गप्रकृति द्वारा कल्पित कनिष्ठ=५

अतः $(५)^2\times८+२५=२२५$,

$\therefore\sqrt{२२५}=१५$=ज्येष्ठ

अतः ५=क

$४ य+३=१५$

$\therefore य=\frac{१२}{४}=३$

अतः लघु राशि=६, बृदद्राशि=९–२=७

यदि कनिष्ठ=१७५ तो ज्येष्ठ=४९५

अतः क=१७५

$य=\frac{४९५-३}{४}=\frac{४९२}{४}=१२३$

अतः लघुराशि $=$ २य $=$ २४६

बृहद्राशि $=$ य^{२} $-$ २ $=$ १५१२९ $-$ २ $=$ १५१२७

अथवा ग्रंथकारोक्त द्वितीय प्रकार

प्रथम राशि $=$ य^{२} $+$ २ य $-$ १, द्वितीय राशि $=$ २ य $+$ २

राशियोग $+$ ३ $=$ य^{२} $+$ २ य $-$ १ $+$ २ य $+$ २ $+$ ३ $=$

य^{२} $+$ ४ य $+$ ४ $=$ (य $+$ २)^{२}

राश्यान्तर $+$ ३ $=$ य^{२} $+$ २ य $-$ १ $-$ (२ य $+$ २) $+$ ३

य^{२} $-$ ३ $+$ ३ $=$ य^{२} $=$ (य)^{२}

वर्गैक्य $-$ ४ $=$ (य^{२} $+$ २ य $-$ १)^{२} $+$ (२ य $+$ २)^{२} $-$ ४ $=$

य^{४} $+$ ४ य^{३} $-$ २ य^{२} $+$ ४ य^{२} $-$ ४ य $+$ १ $+$ ४ य^{२} $+$ ८ य $+$ ४ $-$ ४

$=$ य^{४} $+$ ४ य^{३} $+$ ६ य^{२} $+$ ४ य $+$ १ $=$ (य^{२} $+$ २ य $+$ १)^{२}

वर्गान्तर $+$ १२ $=$ य^{४} $+$ ४ य^{३} $-$ २ य^{२} $+$ ४ य^{२} $-$ ४ य $+$ १ $-$ ४ य^{२} $-$ ८ य $-$ ४ $+$ १२

$=$ य^{४} $+$ ४ य^{३} $-$ २ य^{२} $-$ १२ य $+$ ९ $=$ (य^{२} $+$ २ य $-$ ३)^{२}

घातार्ध $+$ लघुराशि $=$ $\dfrac{(\text{य}^2+२\ \text{य}-१)\ (२\ \text{य}+२)}{२}$ $+$ २ य $+$ २

$=$ $\dfrac{२\ \text{य}^3+४\ \text{य}^2-२\ \text{य}+२\ \text{य}^2+४\ \text{य}-२}{२}$ $+$ २य $+$ २ $=$

$=$ $\dfrac{२\ \text{य}^3+६\ \text{य}^2+२\ \text{य}-२}{२}$ $+$ २ य $+$ २

$=$ य^{३} $+$ ३ य^{२} $+$ य $-$ १ $+$ २ य $+$ २

$=$ य^{३} $+$ ३ य^{२} $+$ ३ य $+$ १ $=$ (य $+$ १)^{३}

पदयोग $=$ य $+$ २ $+$ य $+$ य^{२} $+$ २ य $+$ १, $+$ य^{२} $+$ २ य $-$ ३ $+$ य $+$ १

$=$ २ य^{२} $+$ ७ य $+$ १ ।

पदयोग $+$ २ $=$ २ य^{२} $+$ ७ य $+$ ३ $=$ प्रश्नानुसार वर्गात्मक $=$ क^{२}

$\therefore$ २ य^{२} $+$ ७ य $=$ क^{२} $-$ ३

$\therefore$ १६ य^{२} $+$ ५६ य $=$ ८ क^{२} $-$ २४

$\therefore$ १६ य^{२} $+$ ५६ य $+$ ४९ $=$ ८ क^{२} $+$ २५

मूल ग्रहण करने पर

४ य $+$ ७ $=$ $\sqrt{८\ \text{क}^2+२५}$

वर्गप्रकृत्या कल्पित कनिष्ठ $=$ ५

अतः ज्येष्ठ=$\sqrt{(५)^२\times८+२५}=\sqrt{२२५}=१५$

अतः कनिष्ठ=५=क

४ य+७=१५ ∴ य=$\frac{८}{४}$=२

∴ प्रथम राशि=$(२)^२+२\times२-१=८-१=७$

द्वितीय राशि=२×२+२=६ ।

अथवा यदि कनिष्ठ = १७५ तदा ज्येष्ठ=४९५

अतः ४ य+७=४९५

∴ ४ य=४८८

∴ य=१२२

उत्थापन देने पर—

प्रथम राशि=$(१२२)^२+२\times१२२-१=१५१२७$

द्वितीय राशि=२ य+२=१२२×२+२=२४६

इन राशियों से सभी आलाप सरलतया मिल जायेंगे।

यत्राऽव्यक्तं सरूपं हि तत्र तन्मानमानयेत् ।
सरूपस्यान्यवर्णस्य कृत्वा कृत्यादिना समम् ।।१३।।
राशिं तेन समुत्थाप्य कुर्याद्भूयोऽपरां क्रियाम् ।
सरूपेणान्यवर्णेन कृत्वा पूर्वपदं समम् ।। १४ ।।

यत्राद्यपक्षमूले गृहीते परपक्षेऽव्यक्तं सरूपमरूपं वा स्यात् तत्रान्यवर्णस्य सरूपस्य वर्गेण साम्यं कृत्वा तस्याव्यक्तस्य मानमानीय तेन राशिमुत्थाप्य पुनरन्यां क्रियां कुर्यात् तथा तेनान्यवर्णेन सरूपेणाद्यपक्षपदसाम्याच्च यदि पुनः क्रिया न भवेत् तदा तु व्यक्तेनैव वर्गादिना समक्रिया ।।

सुधा—एक पक्ष के मूल ग्रहण के बाद दूसरे पक्ष में सरूप अव्यक्त या अरूप अव्यक्त रहे तो उसे सरूप अन्य वर्ण के वर्गादि के साथ समीकरण करके उस अव्यक्त का मान लाकर उस मान से राशि का उत्थापन तथा आद्यपक्षीय मूल का कल्पित रूप सहित अन्य वर्ण के साथ समीकरण करके अन्य क्रिया करनी चाहिए।

अन्य क्रिया करने के अवसराभाव में सरूप अन्यवर्ण के वर्गादि के साथ समीकरण न कर व्यक्त राशि के वर्गादि के साथ समीकरण करे जिससे राशि का मान व्यक्त हो सके।

वासना– यथा कल्प्येते समौ पक्षौ $य^2$ = इ.क+रू ∴ य=$\sqrt{इ.क+रू}$ अत्र क मानस्य वर्गत्वाभावान्न वर्गप्रकृते विषयः। अतः कल्प्यते $\sqrt{इ.क+रू}$= इ' न + रू'= य अत उपपन्नं सरूपेनान्यवर्णेनेत्यादि।

यस्त्रिपञ्चगुणो राशिः पृथक् सैकः कृतिर्भवेत्।
वदेति बीजमध्येऽसि मध्यमाहरणे पटुः ॥१॥

अत्र राशिः या १। एष त्रिगुणः सैकः या ३ रू १। अयं वर्ग इति कालकवर्गसमं कृत्वा पक्षयोः रूपं १ प्रक्षिप्य मूलम् का १। अन्यपक्षस्यास्य या ३ रू १। सरूपनीलकत्रयस्य वर्गेण नीव ९ नी ६ रू १ साम्यं कृत्वा लब्धयावत्तावन्मानेनोत्थापितो जातो राशिः नीव ३ नी २ पुनरयं पञ्चगुणः सैको वर्ग इति नीव १५ नी १० रू १ पीतकवर्गसमं कृत्वा समशोधने कृते पक्षौ नीव १५ नीव १०, पीव १ रू १̇।

इमौ पञ्चदशभिः संगुण्य पञ्चविंशतिरूपाणि प्रक्षिप्याद्यपक्षस्य मूलं नी १५ रू ५। परपक्षस्यास्य पीव १५ रू १०। वर्गप्रकृत्या मूले क ९ ज्ये ३५ वा क ७१ ज्ये २७५। कनिष्ठं पीतकमानं ज्येष्ठमाद्यपक्षस्य मूलेनानेन नी १५ रू ५ समं कृत्वाऽऽप्तं नीलकमानन् २ वा १८। स्वस्वमानेनोत्थाप्य जातो राशिः १६ वा १००८।

अथवैकालापः स्वत एव संभवति तथा कल्पितो राशिः याव $\frac{१}{३}$ रू $\frac{१̇}{३}$। एष पञ्चगुणो रूपयुतः याव $\frac{५}{३}$ रू $\frac{२̇}{३}$ मूलद इति कालकवर्गसमं कृत्वा पक्षयो ऋणत्र्यंशद्वयं प्रक्षिप्योक्तवद्गृहीतं कालकपक्षस्य मूलम् का १। द्वितीयपक्षस्यास्य याव $\frac{५}{३}$ रू $\frac{२}{३}$। वर्ग प्रकृत्या मूले क ७ ज्ये ९ वा क ५५ ज्ये ७१। अत्र कनिष्ठं प्रकृतिवर्णमानं तेन कल्पितराशिमुत्थाप्य जातो राशिः स एव १६ वा १००८ ॥

सुधा—कौन सी राशि है जिसे अलग-अलग तीन, पाँच से गुण कर एक युक्त करते हैं तो वर्गात्मक हो जाती है।

यदि बीज के मध्यमाहरण में पटुता है तो बतलाओ।

कल्पित राशि = य

प्रश्नानुसार

$३ \times य + १ = ३य + १ = क^2$

$\therefore क = \sqrt{३य + १}$

यहाँ द्वितीय पक्ष का मूल मिलना सम्भव नहीं अतः सरूप इन (३न+१) के वर्ग के साथ इसका समीकरण किया गया —

$३य + १ = (३न + १)^२ = ९न^२ + ६न + १$

$\therefore ३य = ९न^२ + ६न$

$\therefore य = ३न^२ + २न$

अतः पूर्व कल्पित राशि $= ३न^२ + २न$

दूसरे आलाप के अनुसार

$(३न^2 + २न) \times ५ + १ =$ वर्गात्मक $= प^२$

$१५न^2 + १०न + १ = प^२$

$\therefore १५न^2 + १०न = प^2 - १$

$\therefore १५ (१५न^2 + १०न) = (प^२ - १) \times १५$

$२२५न^२ + १५०न = १५प^२ - १५$

$\therefore २२५न^2 + १५०न + २५ = १५प^2 - १५ + २५ = प^2 + १०$

पक्षों के मूल लेने पर

$\therefore १५न + ५ = \sqrt{१५प^2 + १०}$

यहाँ वर्ग प्रकृति की प्रवृत्ति हो गई।

अत: यदि कनिष्ठ = ९ तो

ज्येष्ठ $= \sqrt{(९)^२ \times १५ + १०} = \sqrt{८१ \times १५ + १०} = \sqrt{१२२५} = ३५$

= ज्येष्ठपद। ज्येष्ठ = पूर्व पक्षीय मूल

$\therefore १५न + ५ = ३५$

$\therefore न = २$

अथवा यदि कनिष्ठ = ७१ तो ज्येष्ठपद = २७५

तो $१५न + ५ = २७५$

$\therefore १५न = २७०$

$\therefore न = १८$

न मान से उत्थापन देने पर

कल्पित राशि $= य = ३न^२ + २न = ३ \times ४ + ४ = १६$

अथवा $य = ३ (१८)^2 + २ \times १८ =$

$३ \times ३२४ + ३६ = ९७२ + ३६ = १००८$

अथवा ग्रन्थकारोक्त ही

प्रकारान्तर—

प्रथमालाप घटित कल्पित राशि $= \frac{य^२ - १}{३}$

इसे तीन से गुणा कर एक जोड़ने पर $य^२$ के समान है। अतः प्रथम आलाप इस राशि से घटित है ही—

द्वितीयालापानुसार

$\left(\frac{\text{य}^2-१}{३}\right)\times५+१=\frac{५\text{य}^2-५}{३}+१=\frac{५\text{य}^2-२}{३}$ = यह प्रनानुसार वर्गात्मक है।

$\therefore \frac{५\text{य}^2-२}{३}=\text{क}^2$

$\therefore \frac{२५\text{य}^2-१०}{३}=५\text{क}^2$

$\therefore २५\text{य}^2=१५\text{क}^2+१०$

$\therefore ५\text{य}=\sqrt{१५\text{क}^2+१०}$ यहां भी वर्ग प्रकृति से यदि कल्पित इष्ट कनिष्ट = ९ तो—

ज्येष्ठपद $=\sqrt{(९)^2\times१५+१०}=\sqrt{८१\times१५+१०}=३५$

ज्येष्ठपद = ३५ = ५य

$\therefore$ य = ७

उत्थापन से राशि $=\frac{\text{य}^2-१}{३}=\frac{४९-१}{३}=१६$ = राशि

अथवा यदि इष्ट कनिष्ठ = ७१ तो ज्येष्ठ = २७५

$\therefore$ ५य = २७५ $\therefore$ य = ५५

उत्थापन से राशि $=\frac{\text{य}^2-१}{३}=\frac{(५५)^2-१}{३}=\frac{३०३५-१}{३}$

$=\frac{३०२४}{३}=१००८$

आलाप सरल है यथा यदि राशि = १६

१६ × ३ + १ = ४९ = वर्गात्मक
१६ × ५ + १ = ८१ = वर्गात्मक

अथाद्योदाहरणम्—

को राशिस्त्रिभिरभ्यस्तः सरूपो जायते घनः।
घनमूलं कृतीभूतं त्र्यभ्यस्तं कृतिरेकयुक् ॥ २ ॥

अत्र राशिः या १। अयं त्र्यभ्यस्तो रूपयुतः या ३ रू १। एष घन इति कालकघनसमं कृत्वा प्राग्वज्जातो राशिः काघ $\frac{१}{३}$ रू $\frac{\dot{१}}{३}$। अस्य त्रिगुणस्य सरूपस्य घनमूलं वर्गितं त्रिहतं रूपयुतं काव ३ रू १। एतत्

कृतिरिति नीलकवर्गसमं कृत्वा पक्षयो रूपं प्रक्षिप्य प्रथमपक्षमूलम् नी १। द्वितीयपक्षस्यास्य काव ३ रू१ वर्गप्रकृत्या मूले क १ ज्ये २ वा क ४ ज्ये ७ वा क १५ ज्ये २६। कनिष्टं कालकमानम् ४। अस्य घनेन ६४ उत्थापितो जातो राशिः २१ वा $\frac{३३७४}{३}$।

सुधा—वह कौन सी राशि है जिसे तीन से गुणाकर एक जोड़ने से धनात्मक बन जाती है।

उस घनमूल के वर्ग को तीन से गुणाकर एक जोड़ने से वर्गात्मक हो जाता है तो राशि क्या है ?

कल्पित राशि = य

प्रश्नानुसार ३ × य + १ = धनात्मक = $क^3$

$\therefore$ य = $\frac{क^3 - १}{३}$। इससे प्रथम आलाप घटित हो जायगा अर्थात्

$\left(\frac{क^3 - १}{३}\right)$ को ३ से गुणा कर एक जोड़ने से $क^3$ बचता है जिसका घनमूल = क अतः दूसरे आलाप के अनुसार

$(क)^2 \times ३ + १$ = वर्गात्मक

$\therefore ३क^2 + १ = न^2 \quad \therefore \sqrt{३क^2 + १} = न$

यहाँ भी वर्ग प्रकृत्या यदि कल्पित कनिष्ठ = ४ तो

$\sqrt{(४)^2 \times ३ + १} = ७$ = ज्येष्टपद

ज्येष्ठ = ७ = न, कनिष्ठ = ४ = क

अतः उत्थापन से $य = \frac{क^3 - १}{३} = \frac{६४ - १}{३} = २१$

अथवा कनिष्ठ यदि = १५ तो ज्येष्ठपद = २६

अतः कनिष्ठ = १५ = क

ज्येष्ठ = २६ = न

उत्थापन से $य = \frac{क^3 - १}{३} = \frac{(१५)^3 - १}{३} = \frac{३३७५ - १}{३} = \frac{३३७४}{३}$ = राशि।

आलाप—$२१ \times ३ + १ = ६४ = (४)^3$

$(४)^2 \times ३ + १ = ४८ + १ = ४९ = (७)^2$

इसी तरह दूसरी राशि से भी आलाप घटित होगा।

उदाहरणम्

वर्गान्तरं कयोः राश्योः पृथक् द्वित्रिगुणं त्रियुक् ।
वर्गौ स्यातां वा क्षिप्रं षट्कपञ्चकयोरिव ॥ ३ ॥

क्वचिदादेः क्वचिन्मध्यात् क्वचिदन्त्यात् क्रिया बुधैः ।
आरभ्यते यथा लघ्वी निर्वहेच्च यथा तथा ॥

अतोऽत्र वर्गान्तरम् या १। एतद्द्विघ्नं त्रियुतं या २ रू ३ वर्ग इति कालकवर्गसमं कृत्वाऽऽप्तयावत्तावन्मानेनोत्थापितो जातो राशिः कावर्ग $\frac{१}{२}$ रू $\frac{३}{२}$ पुनरिदं त्रिघ्नं त्रियुतम् काव $\frac{३}{२}$ रू $\frac{३}{२}$ वर्ग इति नीलकवर्गसमं कृत्वा समशोधने कृते जातौ पक्षौ $\left\{ \begin{matrix} \text{नीव २ रू ३} \\ \text{काव ३} \end{matrix} \right.$। एतौ त्रिभिः संगुण्य कालकपक्षमूलम् का ३। परपक्षस्यास्य नीव ६ रू ९ वर्गप्रकृत्या मूले क ६ ज्ये १५ वा क ६० ज्ये १४७। ज्येष्ठं प्रथमपक्षपदेन का ३ समं कृत्वा लब्धं कालकमानम् ५ वा ४९। प्राग्वदाप्तकालकमानेनोत्थापितं जातं वर्गान्तरं राश्योः ११ वा ११९९। इदमन्तरहृतं द्विधाऽन्तरेणोनयुतमर्धितं राशी भवत इति प्रागुक्तमतोऽन्तरमिष्टं रूपं प्रकल्प्य जातौ राशी ६, ५ वा ६००, ५९९। अथ वाऽन्तरमेकादश प्रकल्प्य जातौ राशी ६०, ४९ ॥

सुधाः—पाँच छे की तरह कौन सी दो राशियाँ हैं. जिनके वर्गान्तर को अलग २ दो तीन से गुणाकर तीन जोड़ते हैं तो वर्गात्मक बन जाता है, शीघ्र बतलाओ ।

यहाँ राशि कल्पना से क्रिया का चलना असम्भव है अतः राशियों का वर्गान्तर = य, माना गया ।

इसी सम्बन्ध में ग्रन्थकार ने कहा है कि—

कहीं प्रश्न के आरम्भ से, कहीं प्रश्न के मध्य से और कहीं अन्त्य से क्रिया करनी चाहिए जिससे क्रिया का विस्तार नहीं हो और आगे चल भी सके ।

यहाँ राशियों का वर्गान्तर = य

प्रश्नानुसार $२ \times य + ३ = क^2$

$\therefore २य + ३ = क^2$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{क}^2 - ३}{२} = \text{वर्गान्तर}$$

पुनः द्वितीयालापानुसार

$$\left(\frac{\text{क}^2 - ३}{२}\right) \times ३ + ३ = \frac{३\text{क}^2 - ९}{२} + ३ = \frac{३\text{क}^2 - ३}{२} = \text{न}^2$$

$\therefore ३\text{क}^2 = २\text{न}^2 + ३$

वा $९\text{क}^2 = ६\text{न}^2 + ९$

$\therefore ३\text{क} = \sqrt{६\text{न}^2 + ९}$

वर्ग प्रकृति के द्वारा यदि कल्पित इष्ट कनिष्ठ = ६ तो ज्येष्ठ = १५

नियमानुसार ६ = न

$३\text{क} = १५ \;\therefore\; \text{क} = ५$

उत्थापन से पूर्वकल्पित वर्गान्तर $= \text{य} = \frac{\text{क}^2 - ३}{२} = \frac{२५ - ३}{२} = ११$

अथवा यदि कनिष्ठ = ६० तो ज्येष्ठपद = १४७

$\therefore ३\text{क} = १४७ \;\therefore\; \text{क} = ४९$

अतः $\text{य} = \frac{(४९)^2 - ३}{२} = \frac{२३९८}{२} = ११९९$

इस तरह आनीत य का मान = ११ = राशिद्वय का वर्गान्तर है। यदि कल्पित राश्यान्तर = १

तो 'वर्गान्तरं राशिवियोगभक्तं योगः' के अनुसार $\frac{११}{१} = ११$ = राशियोग

राश्यान्तर = १

अतः संक्रमण से

$\frac{११ - १}{२} = ५$ = लघुराशि

$\frac{११ + १}{२} = ६$ = बृहद्राशि।

यदि वा वर्गान्तर = ११९९ में कल्पित इष्टराश्यान्तर ११ से भाग देने पर = १०९ = राशियोग

११ = राश्यान्तर

अतः संक्रमण से

$\frac{१०९ - ११}{२} = ४९$ = लघुराशि

$$\frac{१०९ + ११}{२} = ६०$$ वृहद्राशि।

इन दोनों राशियों के वर्गान्तर को दो से गुणा कर तीन जोड़ने से

$\{(६०)^2 - (४९)^2\} \times २ + ३ = २४०१ = (४९)^2$

वा $\{(६०)^२ - (४९)^2\} \times ३ + ३ = ३\ (३६०० - २४०१) + ३$

$३५९७ + ३ = ३६०० = (६०)^२ =$ वर्गात्मक

अतः सभी आलाप घट गए।

अन्यत्करणसूत्रं सार्धवृत्तम्—

वर्गादेर्यो हरस्तेन गुणितं यदि जायते।
अव्यक्तं तत्र तन्मानमभिन्नं स्याद्यथा तथा॥ १५॥
कल्प्योऽन्यवर्णवर्गादिस्तुल्यः शेषं यथोक्तवत्।

यत्र वर्गादौ कुट्टकादौ वा एकपक्षमूले गृहीतेऽन्यपक्षेऽव्यक्तवर्गादिकस्य यो हरस्तेन गुणितमव्यक्तं यदि स्यात् तदा तस्य मितिरभिन्ना यथा स्यात् तथाऽन्यवर्णवर्गादिः सरूपो रूपोनो वा तुल्यः कल्प्यः शेषं पूर्वसूत्रोक्तम्॥

सुधा—प्रथम पक्ष के मूलग्रहणान्तर द्वितीत पक्ष में वर्गादि के हरसेगुणित अव्यक्त हो वहाँ अव्यक्त का मान जैसे अभिन्न हो, वैसे उसे अन्य वर्ण वर्गादि के समान कल्पना करनी चाहिये। शेष पूर्वोक्तवत् समझना।

वासना—

यथाऽत्र कल्प्ते $\frac{य^२ - १}{ह} = क$

$\therefore य^२ = ह.\ क + १$

एतादृक् स्थितावेव सूत्रास्यस्य प्रवृत्तिः तत्र कथमभिन्नं क मान मित्यग्रे हरभक्ता यस्य कृतिरित्यादिना वक्ष्यते ग्रंथकृता।

उदाहरणम्—

को वर्गश्चतुरूनः सन् सप्तभक्तो विशुध्यति।
त्रिंशदूनोऽथवा कः स्याद्यदि वेत्सि वद द्रुतम्॥ १॥

अत्र राशिः या १। अस्य वर्गश्चतुरूनः सप्तभक्तो विशुध्यतीति लब्धिप्रमाणं कालकस्तद्गुणितहरेणोस्य याव १ रू ४̇ साम्यं कृत्वा प्रथमपक्षमूलम् या १। परपक्षस्यास्य का ७ रू ४̇ मूलाभावात् 'वर्गा-

देर्यो हरस्तेन गुणितं यदि जायते" इत्यादिना करणेन नीलसप्तकस्य रूपद्वयाधिकस्य वर्गेण तुल्यं कृत्वा लब्धं कालकमानमभिन्नं जातम् नीव ७ नी ४। यत् तु कल्पितं तस्य द्वितीयपक्षस्य मूलम् नी ७ रू २। इदं प्राक्पक्षमूलस्यास्य या १ समं कृत्वाऽऽप्तं यावत्तावन्मानं नी ७ रू २ सक्षेपम् ९। अस्य वर्गो राशिः स्यात् ८१ ॥

सुधा—वह कौन सा वर्गात्मक राशि है जिसमें चार या ३० घटा कर सात से भाग देने पर विशुद्ध हो जाती है, यदि जानते तो शीघ्र बतलाओ।

कल्पित राशि $= \text{य}^2$ ।

अतः प्रश्नानुसार

$$\frac{\text{य}^2 - ४}{७} = \text{क}। \quad \therefore \text{य}^2 = ७\text{क} + ४$$

$$\text{वा } \text{य} = \sqrt{७\text{क} + ४} \text{ इसका मूल है।}$$

यहाँ द्वितीय पक्ष में वर्ग प्रकृति की प्रवृत्ति नहीं हुई अतः (७न + २) के वर्ग के साथ ७क + ४ का समीकरण किया अर्थात्

$$७\text{क} + ४ = (७\text{न} + २)^2$$

$$= ४९\text{न}^2 + २८\text{न} + ४ \text{ ।}$$

$$\therefore \text{क} = \frac{४९\text{न}^2 + २८\text{न}}{७} =$$

$$७\text{न}^2 + ४\text{न} \text{ यह अभिन्न है।}$$

$$\because \text{य} = \sqrt{७\text{क} + ४} = ७\text{न} + २$$

$$\therefore \text{य} = ७\text{न} + २ \text{ यदि } \text{न} = १$$

$$\text{तो } \text{य} = ७ + २ = ९$$

$$\therefore \text{राशि} = ९^2 = ८१$$

यही ८१ राशि है जिसे चतुरूनित करने पर

८१ - ४ = ७७। इसमें ७ से भाग देने पर

$$\frac{७७}{७} = ११ = \text{निः शेष।}$$

त्रिंशदूनित वाला उदाहरण आगे स्पष्ट होगा।

अथवाऽन्यवर्णकल्पनायां मन्दावबोधाय पूर्वैरुपायः पठितः तत्र सूत्राणि :—

हरभक्ता यस्य कृतिः शुध्यति सोऽपि द्विरूपपदगुणितः

तेनाहतोऽन्यवर्णो रूपपदेनान्वितः कल्प्यः ॥१६॥

न यदि पदं रूपाणां क्षिपेद्धरं तेषु हारतष्टेषु ।
तावद्यावद्वर्गो भवति न चेदेवमपि खिलं तर्हि ॥१७॥
हित्वा क्षिप्त्वा च पदं यत्राद्यस्येह भवति तत्रापि ।
आलापित एव हरो रूपाणि तु शोधनादिसिद्धानि ॥१८॥

हरभक्तेति। यस्याङ्कस्य कृतिर्हरभक्ता सती शुध्यतीति निःशेषा भवति अपि च सोऽप्यङ्को द्वाभ्यां रूपपदेन च गुणितो हरभक्तः सन् शुध्यति तदा तेनाङ्केन हतोऽन्यवर्णस्तेन रूपेणान्वितः कल्प्यः। यदि तु रूपाणां पदं न तदा तेषु हरतष्टेषु रूपेषु तावद्धरं क्षिपेत् यावद्वर्गो भवेत् तन्मूलं रूपपदं भवेत्। एवमपि कृते चेद्वर्गः कदाचिन्न भवेत् तदा तदुदाहरणं खिलं स्यात्। यत्र तु आद्यपक्षस्य मूलं "हित्वा क्षिप्त्वा" इत्यादिना लभ्यते तदा हर आलापित एव ग्राह्यो न तु गुणितो विभक्तो वा। रूपाणि तु समशोधने कृते शोधनादिसिद्धानि यानि तान्येव ग्राह्याणि। एवं घनेऽपि योज्यं तद्यथा यस्याङ्कस्य घनो हरभक्तः शुध्यति तथा च सोऽप्यङ्कस्त्रिभी रूपाणां घनमूलेन च गुणितो हरभक्तः शुध्यति तदा तेनाङ्केन हतोऽन्यवर्णो रूपाणां घनमूलेन वान्वितः कल्प्यः यदि रूपाणां घनमूलं न लभ्यते तदा तेषु रूपेषु हरतष्टेषु तावद्धरं क्षिपेद्यावद्घनो भवेत्। तच्च घनमूलं रूपपदं स्यात्। एवमपि कृते च घनः कदाचिन्न भवेत् तदुदाहरणं खिलं स्यादित्यग्रेऽपि योज्यमिति शेषः।

अथ द्वितीयोदाहरणे राशिः या १। अस्य यथोक्तं कृत्वाऽऽद्यपक्षस्य मूलम् या १। परपक्षस्यास्य का ७ रू ३०। "न यदि पदं रूपाणाम"—इत्यादिकरणेन हारतष्टरूपेषु द्विगुणं हरं प्रक्षिप्य मूलम् ४। एतदधिकनीलकसप्तकवर्गसमीकरणादिना प्राग्वज्जातो राशिः नी ७ रू ४।

अथ यदि ऋणरूपैरन्वितं नीलकसप्तकं नी ७ रू ४̇ परिकल्प्यानीयते तदाऽन्योऽपि राशिः ३ स्यात्॥

सुधाः—

'वर्गादेर्योहर' इत्यादि सूत्र में अन्य वर्ण के वर्गादि के समान अव्यक्त मान को कल्पित करने की बात कही गई है. वह कल्पना कैसी हो इसे इन सूत्रों के के द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है।

जिस का वर्ग हर भक्त होने पर विशुद्ध हो जाय उसे दो और रूप पद से गुणित कर गुणन फल गुणित अल्पवर्ण में रूप पद जोड़ के, उसे अन्य पक्ष का मूल [illegible] करें।

यदि रूप का पद नहीं मिले तो हरभक्त रूपों में तब तक हर जोड़ें जब तक वह वर्गात्मक न हो जाए। इस प्रकार सिद्ध वर्ग के मूल को रूप पद मानें।

यदि इस तरह से भी रूप पद प्राप्य नहीं हो तो उस उद्दिष्ट (प्रश्न) को अशुद्ध समझें।

जहाँ दोनों पक्षों को किसी से गुणने, रूप जोड़ने आदि के बाद प्रथम पक्ष का मूल प्राप्त हो वहाँ=पूर्वोक्त हव, और गुणन योजनादि के बाद आगत रूप को रूप मानना चाहिए।

यहाँ 'हरभक्ता यस्य कृतिः' उपलक्षण मात्र है अतः हर भक्त किसी का घन भी यदि निःशेष हो तो उसे तीन और रूप के घन मूल से गुणा कर गुणनफल में हर से भाग दें। निःशेष होने पर उसमें अन्य वर्ण को गुणाकर रूप घन पद जोड़कर अन्य पक्षीय मूल मानें। यदि रूप का घनमूल नहीं मिले तो हर तष्टित रूप में तब तक हर जोड़े जब तक वह घनमूलप्रद न हो जाय। इस तरह सिद्ध घनमूल को रूप पद समझे। ऐसे करने पर भी यदि घनमूल प्राप्य नहीं हो तो प्रश्न को दुष्ट समझें।

वासना—

'वर्गादि' यों हर' इत्यादि सूत्रे

$$\text{य}^2 = \text{ह}.\ \text{क} + \text{रू}\ \text{इति कल्पितम्}$$

यद्यत्र रू वर्गात्मकं तदाऽपरपक्ष मूल $(\text{न}.\ \text{इ}_1 + \sqrt{\text{रू}})$

मिति कल्पितम्।

$$\text{अतः}\ \text{य}^2 = \text{ह}.\ \text{क} + \text{रू} = (\text{न}\ \text{इ}_1 + \sqrt{\text{रू}})^2$$

$$\text{अतः}\ \text{ह}.\ \text{क} + \text{रू} = \text{न}^2.\ \text{इ}^2_1 + 2\text{न}.\ \text{इ}_1 \sqrt{\text{रू}}. + \text{रू}.$$

$$\therefore \text{ह}.\ \text{क} = \text{न}^2.\ \text{इ}^2_1 + 2\text{न}.\ \text{इ}_1 \sqrt{\text{रू}}$$

$$\therefore \text{क} = \frac{\text{न}^2.\ \text{इ}^2_1}{\text{ह}} + \frac{2\text{न}.\ \text{इ}_1 \sqrt{\text{रू}}}{\text{ह}} = \frac{\text{न}^2.\ \text{इ}^2}{\text{ह}} + \text{न}\ \frac{2\ \text{इ}_1 \sqrt{\text{रू}}}{\text{ह}}$$

अत्र यदि $\frac{\text{इ}^2_1}{\text{ह}}$ एतदभिन्नं तदं $\frac{2\text{इ}_1 \sqrt{\text{रू}}}{\text{ह}}$ तदप्यभिन्नमेव। अतः इ^2_1 तथा कल्पनीयो यथा हरभक्तः शुद्धयेदेवेत्यनेन रूपपदेनान्वितः कल्प्य इत्यन्तमुपपन्नम् यदि च रूपमवर्गात्मकम् अर्थात् पूर्वकल्पितेऽ (ह. क + रू) स्मिन् रू अस्य पदं न लभ्यते चेत्तदा कल्पयते क = प ÷ इ' − इ"

$\therefore$ ह. क = प. ह + इ'. ह − इ''. ह

$\therefore$ ह क + रू = प. ह + इ'. ह − इ''. ह + रू

अत्र यदि इ' ह − इ''.ह + रू एतद् वर्गात्मकं रू' समञ्च

तदा ह क + रू = प. ह+रू'

अत्र रू' अस्य वर्गात्मकत्वात् पूर्वयुक्तयाऽस्य मानं ज्ञातुं शक्यम्। उक्त-युक्तया वर्गात्मकत्वाभावे तदुदाहरणमेव दुष्टमिति तावद् यावद्वर्ग इत्यन्त्य-मुपपन्नम्।

अत्र यदि $य^3$ = ह. क + रू यत्र 'रू' इत्यस्य धनमूलं लभ्यते तदाऽत्रापि पूर्वयुक्तया

$$य = इ. न + \sqrt[3]{रू} \therefore य^3 = (इ\ न + \sqrt[3]{रू})^3$$

$$= इ^3. न^3 + ३\ इ^2. न^2. \sqrt[3]{रू} + ३\ इ, न\ (\sqrt[3]{रू})^2 + रू = ह.क+रू$$

$$\therefore हक = न^3.इ^3 + ३इ^2.न^2.\sqrt[3]{रु} + ३न.इ \times (\sqrt[3]{रु})^2$$

$$\therefore क = \frac{न^3.इ^3 + ३इ^2.न^2.\sqrt[3]{रु} + ३न.इ \times (\sqrt[3]{रु})^2}{ह}$$

$$अथवा :— क = न^3.\frac{इ^3}{ह} + न^2.\frac{३इ^2.\sqrt[3]{रु}}{ह} + न.\frac{३इ(\sqrt[3]{रु})^2}{ह}$$

अत्रापि यदि $\frac{इ^3}{ह}$, $\frac{३इ^2.\sqrt[3]{रु}}{ह}$ एतद्द्वयमान मभिन्नं तदा कमानमप्यभिन्नं तेन यस्याङ्कस्य घनो हरभक्तः शुद्धयतीत्यादि मूलोक्तं गद्यमुपपद्यते।

सुधा—

'को वर्गश्चतुरून: सन्' इत्याद्युदाहरण में

$य^2 = ७क + ४$, है।

$\therefore य = \sqrt{७क+४}$ यहां द्वितीय पक्ष का मूल लाना है

यहाँ रु ४ का मूल २ होता है।

और 'को वर्गश्चतुरून:' के दूसरे उदाहरण त्रिशदूनोऽथवा कः स्यात् में ३० का मूल नहीं होता। अतः इसी 'कोवर्गश्चतुरून:' सम्पूर्ण को हरभक्ता यस्य कृतिः का सम्पूर्ण उदाहरण समझना चाहिए।

इन उदाहरणों में हर = ७।

सात का वर्ग हरभक्त होने पर शुद्ध हो जाता,

और $\frac{७ \times २ \times \sqrt{४}}{७} = ४$ शुद्ध है अतः

तेनाहतोऽन्यवर्णः के अनुसार

$$(७न + २)^2 = ७क + ४$$

$$\therefore ७क + ४ = ४९न^2 + २८न + ४$$

$$\therefore क = \frac{४९न^2 + २८न}{७} = ७न^2 + ४न$$

$$य^2 = ७क + ४ = (७न + २)^2$$

$$\therefore य = ७न + २$$

$$यदि\ न = १$$

$$तदा\ य = ७ + २ = ९$$

$$एवम्\ क = ७न^2 + ४न = ७ + ४ = ११$$

$$अतः\ राशि = य^2 = ८१ ।$$

उसी 'कोवर्गश्तुरूनः' के द्वितीयोदाहरणानुसार

$$\frac{य^2 - ३०}{७} = क$$

$$\therefore य^2 = ७क + ३०$$

$$वा\ य = \sqrt{७क + ३०}$$

यहाँ ३० अवर्गात्मक है, इसका पद नहीं मिलता अतः न यदि पदं रूपाणां क्षिपेद्धरं तेषु हार तष्टेषु" के अनुसार ३० को हार तष्टित करने पर शेष

$$\left(\frac{३०}{७} = ल + \frac{२}{७} \right)$$

२ में दो ही वार हार के जोड़ने पर

(अर्थात् २ + ७ + ७ = १६) = वर्गात्मक हो जाता जिसका पद = ४

इष्ट ७ का वर्ग सात से निश्शेष होता अतः सूत्रानुसार २ × . × ४ = ५६ यह भी हर ७ से निःशेष हो जायगा अतः सप्तगुणित अन्य वर्ण न रूपपद (४) युक्त के साथ पूर्वपद का समीकरण हुआ ।

$$अतः\ ७क + ३० = (७न + ४)^2 = ४९न^2 + ५६न + १६$$

$$\therefore ७क = ४९न^2 + ५६न - १४$$

$$\therefore क = \frac{४९न + ५६न - १४}{७} = ७न^2 + ८न - २$$

$\therefore$ $य^2 = ७क + ३० = (७न + ४)^2$

$\therefore$ $य = ७न + ४$

यहाँ यदि न = १ तो

$य = ७ + ४ = ११$

$क = ७न^2 + ८न - २ =$

$७ + ८ - २ = १३$ ।

आलाप :—११ का ही वर्ग है जिसमें ३० घटाकर ७ से भाग लेनेपर विशुद्ध हो जाता जैसा कि

$$\frac{(११)^2 - ३०}{७} = \frac{१२१ - ३०}{७} = \frac{९१}{७} = १३$$

उदाहरणम्

षड्भिरूनो घनः कस्य पञ्चभक्तो विशुध्यति ।
तं वदाशु तवालं चेदभ्यासो घनकुट्टके ।। २ ।।

अत्र राशिः या १ । अस्य यथोक्तं कृत्वाऽऽद्यपक्षस्य घनमूलं या १ । परपक्षस्यास्य का ५ रू ६ हरभक्तो यस्य घनः शुध्यति सोऽपि त्रिरूपपदगुणित इत्यादियुक्त्या नीलकपञ्चकस्य रूपषट्काधिकस्य घनेन साम्यं कृत्वा प्राग्वज्जातो राशः संक्षेपः नी ५ रू ६ । उत्थापने कृते जातो राशिः ६ वा ११ ।

सुधाः—कौन सी राशि है जिसके धन में छे घटाकर पाँच से भाग देते तो विशुद्ध हो जाती । यदि धनकुट्टक का तुम्हें काफी अभ्यास है तो बतलाओ ।

कल्पित राशि = य.

प्रश्नानुसार

$$\frac{य^3 - ६}{५} = क$$

$\therefore$ $य^3 = ५क + ६$

वा $य = \sqrt[3]{५क + ६}$

यहाँ द्वितीय पक्ष का धनमूलाभाव है । रूप भी धनात्मक नहीं है । 'न यदि पदं रूपाणाम्', के अनुसार हार तष्टित रुप = १ में यावद् गुणित हर जोड़ने से धनमूल हो, अर्थात १+४३ × ५=२१६=घनात्मक, जिसका धनमूल = ६ होता है अतः

'तेनाहतोऽन्यवर्णौ रूपपदेनान्वितः कल्प्यः' से

५ से पाँच का धन=१२५ विशुद्ध हो जाता. अतः त्रि रूप पदगुणित वह = ३×६×५=९० हर भक्त होने पर विशुद्ध हो जाता है अतः तेनाहतोऽन्यवर्णः के अनुसार

$$५ क+६=(५ न+६)^{3}=१२५ न^{3}+३×६×२५ न^{2}+३×३६×५न + (६)^{3} =$$

$$१२५ न^{3}+२५×१८ न^{2} + ३६×१५ न+२१६$$

$$=१२५न^{3} + ४५०न^{2} + ५४०न+२१६$$

$$\therefore क=\frac{१२५न^{3} + ४५०न^{2} + ५४०न + २१६ - ६}{५}$$

$$= २५ न^{3}+ ९०^{2}+ १०८ न+४२ ।$$

यतः $य^{3} = ५ क+६=(५ न+६)^{3}$

$\therefore$ य=५ न+६

यदि न=१ तो य=११

$$क=२५न^{3} + ९०न^{2} × १०८ न+४२$$

$$= २५+९०+१०८+४२ = २६५ ।$$

अतः य=११ क = २६५ ।

प्रश्नानुसार

११ = राशि है जिसके धन में से ६ घटाकर

५ पाँच से भाग देने से विशुद्ध हो जाती है

$$\frac{(११)^{3} - ६}{५} = \frac{१३३१-६}{५} = \frac{१३२५}{५} = २६५ =क ।$$

उदाहरणम्

यद्वर्गः पञ्चभिः क्षुण्णस्त्रियुक्तः षोडशोद्धृतः ।
शुद्धिमेति तमाचक्ष्व दक्षोऽसि गणिते यदि ॥ ३ ॥

अत्र राशिः या १ । अस्य यथोक्तं कृत्वाऽऽद्यपक्षमूलं या ५ । परपक्षस्यास्य का १६ रू १५ "हित्वा क्षिप्त्वा च पदं यत्र" इत्यादिनाऽप्यत्रालापित एव हरः स्थाप्यः । रूपाणि तु शोधनादिसिद्धानि इति तथा कृते जातम् का १६ रू १५ ।

अमुं नीलकाष्टकस्य सैकस्य वर्गेण समं कृत्वाऽऽप्तं कालकमानमभिन्नम् नीव ४ नी १ रू १ । कल्पितपदम् नी ८ रू १ । इदमाद्यस्यास्य

या ५ समं कृत्वा कुट्टकाल्लब्धं यावत्तावन्मानम् पी ८ रू ५ । उत्थापिते जातो राशिः १३ ।

अथवा ऋणरूपेणाधिके नीलकाष्टके कल्पिते सति लब्धं यावत्तावन्मानम् पी ८ रू ३ ।

एवं " वर्गप्रकृत्या विषयो यथा स्यात् तथा सुधीभिर्बहुधा विचिन्त्यम्" इत्यस्य प्रपञ्चो बहुधा दर्शितस्तथा वर्गकुट्टकेऽपि किञ्चिद् दर्शितम् । एवं बुद्धिमद्भिरन्यदपि यथासम्भवं योज्यम् ।

सुधा.—कौन सा वर्ग है जिसे पाँच से गुणा कर तीन जोड़ देते और सोलह से भाग देते तो निःशेष हो जाता ? यदि गणित में दक्ष हो तो बतलाओ ।

कल्पित राशिवर्ग= $य^2$ ।

प्रश्नानुसार $\frac{५\times य^2+३}{१६}=क$

$\therefore$ ५ $य^2$=१६ क−३

$\therefore$ २५ $य^2$=८० क-१५

$\therefore$ ५ य=$\sqrt{८० क-५१}$

यहाँ भी द्वितीय पक्ष का मूल लाना है जिसमें रु १५ अवर्गात्मक है ।

'हित्वा क्षिप्त्वा च पदं यत्राद्यस्येह तत्रापि के अनुसार आलापित हर = १६, और शोधनादि शुद्ध रूप =−१५ । अतः द्वितीय पक्ष = १६क − १५ हरवक्त आठ का वर्ग $\frac{६४}{१६}$ = ४ शुद्ध है, और रूप पद नहीं मिलने के कारण हरतष्टित रूप − १५ में एक बार मान हर १६ के जोड़ने से − १५ + १६=१ =वर्गात्मक । अतः रूप पद = १

'हरभक्ता यस्य कृति' के अनुसार $\frac{८\times२\times१}{१६}=\frac{१६}{१६}$ =१, शुद्ध है, अतः

"तेनाहतोऽन्यवर्ण" आदि के अनुसार

$८न+१=\sqrt{१६क-१५}$

$\therefore(८न+१)^2=१६क-१५$

$\therefore ६४न^2+१६न+१=१६क-१५$

$\therefore १६क=६४न^2+१६न+१६$

$\therefore क=४न^2+न+१$

चूँकि $\sqrt{८०क-१५}$ इसको "आलापित एव हरो रूपाणि तु शोधनादि सिद्धानि" के अनुसार ही $\sqrt{१६क-१५}$ के बराबर माना गया है ।

अतः ८०क − १५ = $($८न + १$)^2$

वा २५य^2 = $($८न + १$)^2$

∴ ५य = ८न + १

य = $\frac{\text{८न+१}}{\text{५}}$, यहाँ कुट्टक की प्रवृत्ति हुई।

कुट्टकानुसार वल्ली विषम हुई।

		१	
राशिद्वय = ३ इसे स्वस्वतक्षण		१	में घटाने से = ५।
२		१	३
		१	यदि इष्ट = प
		००	

'इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते' के अनुसार

तो ८प + ५ = लब्धि = य

५प + ३ = गुणक = न

यदि प = ० तो य = ५ न = ३

यदि प = १ तो य = १३, न = ८

क के मान में न के मान से उत्थापन देने पर

क = ४न^2 + न + १ = ४ × ९ + ३ + १ = ४०

वा क = ६४ × ४ + ८ + १ = २५६ + ८ + १ = २६५

आलाप भी ५, १३ दोनों राशियों से मिल जाता है जैसे—

$\frac{\text{५}^2\times\text{५+३}}{\text{१६}}$ = $\frac{\text{१२८}}{\text{१६}}$ = ०

वा $\frac{\text{१३}^2\times\text{५+३}}{\text{१६}}$ = $\frac{\text{१६९}\times\text{५+३}}{\text{१६}}$ = $\frac{\text{८४८}}{\text{१६}}$ = ५३

उपर्युक्त गणित प्रक्रिया में २५य^2 = ८०क − १५, और उसी को "आलापित एव हरो रूपपणि शोधनादि सिद्धानि" के अनुसार १६क − १५ के बराबर माना गया है जो उपपत्ति सिद्ध होने पर भी असङ्गत सा प्रतीत होता है। अतः आचार्योक्त 'आलापित एव हर' आदि लाघव प्रक्रिया के बिना भी—

२५य^2 = ८० क − १५

∴ ५य = $\sqrt{\text{८० क − १५}}$

यहाँ द्वितीय पक्ष में हर एवं रूप दोनों गुण गुणित हैं। ८० रूप से तष्टित − १५ में त्रिगुण हर ८०×३ जोड़ने पर = २२५। $\sqrt{\text{२२५}}$ = १५ = रूपपद।

'हरभक्ता यस्य कृतिः' आदि के अनुसार ४० का वर्ग = १६०० हर =८० से निःशेष हो जाता, वह ४० भी २ तथा रूपपद १५ से गुण तथा ने हर ८० से भाग देने पर विशुद्ध हो जाता है।

$\frac{४० \times २ \times १५}{८०} = १५$

अतः तेनाहतोऽन्यवर्ण के अनुसार

$४०न + १५ = \sqrt{८०क - १५}$

$\therefore (४०न + १५)^२ = ८०क - १५$

अतः $८०क - १५ = १६००न^2 + १२००न + २२५$

$\therefore ८०क = १६००न^२ + १२००न + २४०$

$\therefore क = \frac{१६००न^२ + १२००न + २४०}{८०} =$

$\therefore क = २०न^2 + १५न + ३$

चूँकि $२५य^२ = ८०क - १५$

$\therefore २५य^२ = (४०न + १५)^२$

$\therefore ५य = ४०न + १५$

$\therefore य = ८न + ३$

यदि न = ०

तो य = ३, यदि न = १

तो य = ११

$क = २०न^2 + १५न + ३ = २० + १५ + ३ = ३८$

"तेनाहतोऽन्यवर्णः" के अनुसार

यहाँ ४०न + १५ को अत्र अक्ष मूल $\sqrt{८०क - १५}$ के बराबर करके समस्त उपर्युक्त क्रिया की गई है। किन्तु २२५ का मूल ± १५ दोनों सम्भव है।

अतः $४०न - १५ = \sqrt{८०क - १५}$ भी हो सकेगा।

$\therefore (४०न - १५)^२ = ८०क - १५$

वा $१६००न^2 - १२००न + २२५ = ८०क - १५$

$\therefore ८०क = १६००न^2 - १२००न + २४०$

वा $क = २०न^२ - १५न + ३$

चूँकि $२५य^२ = ८०क - १५$

$\therefore २५य^२ = (४०न - १५)^२$

वा $५य = ४०न - १५$

$य = ८न - ३$

यदि $न = ०$ तो $य = -३$

यदि $न = १$ तो $य = ५$

अतः $क = २०न^2 - १५न + ३ = २० - १५ + ३ = ८$

११, ५ दोनों राशियों से आलाप घटित हो जाते—

जैसे $\frac{(११)^2 \times ५ + ३}{१६} = \frac{६०८}{१६} = ३८$

वा $\frac{(५)^2 \times ५ + ३}{१६} = \frac{१२५+३}{१६} = \frac{१२८}{१६} = ८$

विमर्श—अन्तिम इस विमर्श में विविध प्रश्नों के लिए कुछ उदाहरण तथा सोत्तर कुछ अन्य प्रश्नों के अतिरिक्त मुझे कुछ भी लिखना नहीं है।

उदाहरण (१)—

प्रश्न—$य^2 + ११य + ३५$ में $य + ५$ से भाग दीजिए।

नियमानुसार

$य+५\ )\ य^2 + ११य + ३५\ (\ य + ६$

$य^2 + ५य$

$६य + ३५$

$६य + ३०$

$५ =$ शेष

अतः भागफल $= य + ६ + \frac{५}{य+५}$

उदा (२)—भाज्य $= य^5 - ४य^4 - २य^3 + ३य^2 + ८य - १२$,

भाजक $= य^2 - ४$

नियमानुसार भाज्य एवं भाजक को किसी वर्ण के घात के आरोह क्रम या अवरोह क्रम से लिखकर ही भाग दिया जाता है यहाँ अवरोह क्रम से लिखा ही हुआ है।

$य^2 - ४\ )\ य^5 - ४य^4 - २य^3 + ३य^2 + ८य - १२\ (\ य^3 - २य$

$य^5 - ४य^3$

$\times \quad \times - २य^3 + ३य^2 + ८य - १२$

$- २य^3 \qquad + ८य$

$३य^2 - १२ =$ शेष

उदा (३)—भाज्य $= अ^3 + २ अ ब स + ब^3 - स^3$

भाजक $= अ + ब - स$

$$
\begin{array}{l}
अ+ब-स \;)\; अ^3 + २ अ ब स + ब^3 - स^3 \;(\; अ^2 - (ब - स) अ + ब^2 + ब स + स^2 \\
\underline{अ^3 + (ब - स) अ^2} \\
- (ब - स) अ^2 + २ अ ब स + (ब^3 - स^3) \\
\underline{- (ब - स) अ^2 - (ब - स)^2 अ} \\
+ (ब^2 + ब स + स^2) अ + ब^3 - स^3 \\
\underline{(ब^2 + ब स + स^2) अ + ब^3 - स^3} \\
\times \qquad \times
\end{array}
$$

भागफल $= अ^2 + ब^2 + स^2 - अ ब + अ स + ब स$ ।

अभ्यासार्थ भाग सम्बद्ध कुछ सोत्तर प्रश्न—

(१) भाज्य $= अ^4 + अ^2 क^2 + क^4$, भाजक $= अ^2 + अ क + क^2$,

उत्तर $= अ^2 - अक + क^2$

(२) भाज्य $= अ^3 + क^3$ भाजक $= अ + क$, भागफल $= अ^2 - अक + क^2$

(३) भाज्य $= अ^2(ब + स) + ब^2 (अ - स) - स^2 (अ - ब) + अ ब स$,

भाजक $= अ+ब+स$, उत्तर $= अब+अस - बस$

(४) भाज्य $= अ^3 - ८ ब^3 - २७स^3 - १८ अबस$, भाजक$=अ - २ब - ३स$

उत्तर $= अ^2 + २अब + ३अस + ४ब^2 - ६बस + ९स^2$

(५) $अ^3 - अ^2ब - ७ अब^2 + ३ब^3$ को $अ - ३ब$ से भाग दीजिए

उत्तर $= अ^2 + २अब - ब^2$

गुणनखण्ड सम्बद्ध उदाहरण—

उदा (१)—$अ^2 - ५अ - ३६$ का गुणनखण्ड निकालिए।

यहाँ ऐसे दो अङ्कों को ढूढ़ना है जिनका गुणनफल $= - ३६$ और उनका योग वा अन्तर $= - ५$ ऐसे दो अंक हैं $= - ९, ४$, इन दोनों का गुणनफल $= - ३६$ और इन दोनों का योग $= - ५$

वैसे निकाल लेने पर दिया हुआ स्वरूप $=$

$अ^2 - ५अ - ३६ = अ^2 - ९अ + ४अ - ३६ =$

$अ (अ - ९) + ४ (अ - ९)$

$= (अ + ४) (अ - ९) =$ गुणनखण्ड

उदा (२)—$अ^2 + १६अ - ८०$ का गुणनखण्ड क्या है ?

यहाँ भी उपर्युक्त नियम से दो अंक २०, − ४ हैं जिनका गुणनफल = − ८० और योग = १६

अतः दिया हुआ स्वरूप =

$अ^{2} + १६अ − ८० = अ^{2} + २०अ − ४अ − ८०$

$= अ (अ + २०) − ४ (अ + २०)$

$= (अ − ४) (अ + २०) =$ गुणनखण्ड

उदा (३)—जहाँ गुणकाङ्क गुणित वर्ग हो वहाँ गुणकाङ्क से अन्तिक को गुणाकर पूर्वोक्त रीति से दोनों अंकों को ढूढ़कर गुणनखण्ड पूर्ववत् निकालना चाहिए।

जैसे $६अ^{२} + ७अ − ३$ का गुणनखण्ड निकालना है तो ६ से ३ को गुणने पर = ६ × ३ = − १८। अब दो ऐसे अंक ढूढ़िए जिनका गुणनफल = − १८ और योग वा अन्तर ७ हो, ऐसे अङ्क हैं ९, − २।

अतः दिया हुआ स्वरूप =

$६अ^{२} + ७अ − ३ =$

$६अ^{२} + ९अ − २अ − ३ =$

$३अ (२अ + ३) − १ (२अ + ३)$

$= (३अ − १) (२अ + ३) =$ गुणनखण्ड

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न—

गुणन खण्ड निकालिए

१—$अ^{२} − १५अ + ५४$ उत्तर $(अ − ९) (अ − ६)$

२—$अ^{४} + २अ^{२} − १५$ उत्तर $(अ^{2} + ५) (अ^{२} − ३)$

३—$अ^{८} − २०अ^{४} + ६४$ उत्तर $(अ^{2}+४) (अ+२) (अ − २)$
$(अ^{3}+२) (अ^{३} − २)$

४—$अ^{६} − १०अ^{३} + १६$ उत्तर $(अ − २) (अ^{2} + २अ + ४) (अ^{3} − २)$

५—$२अ^{२} + ५अ − ४२$ उत्तर $(२अ − ७) (अ + ६)$

६—$६अ^{२} − ११अब − १०ब^{२}$ उत्तर $(३अ + २ब) (२अ − ५ब)$

७—$८अ^{2} − १४अब − १५ब^{2}$ उत्तर $(२अ^{४} − ५ब) (४अ + ३ब)$

८—$३क^{2} + ८अब − ३ब^{2}$ उत्तर $(अ + ३ब) (३अ − ब)$

९—$३अ^{2} + १४ब + ८$ उत्तर $(३अ + २) (अ + ४)$

१०—$१२अ^{2} + अ − ६$ उत्तर $(३अ − २) (४अ + ३)$

सरल समीकरण सम्बद्ध कुछ उदाहरण

उदा० (१) $(अ \quad ४)^{2} + ५ \ (अ − ३)^{२} = (२अ − ५) (४अ − १) + २४$ इसमें अ का मूल्य क्या है ?

$$\text{वामपक्ष} = ३\,(अ^2 - ८अ + १६) + ५\,(अ^2 - ६अ + ९) =$$
$$३अ^2 - २४अ + ४८ + ५अ^2 - ३०अ + ४५ =$$
$$८अ^2 - ५४अ + ९३ ।$$
$$\text{दक्षिण पक्ष} = (२अ - ५)(४अ - १) + २४$$
$$= ८अ^2 - २०अ - २अ + ५ + २४ =$$
$$८अ^2 - २२अ + २९$$
$$\therefore\ ८अ^2 - ५४अ + ९३ = ८अ^2 - २२अ + २९$$
$$\therefore\ ५४अ - २२अ = ९३ - २९ = ६४$$
$$\therefore\ ३२अ = ६४\ \therefore\ अ = २ ।$$

उदाहरण (२)

'य' का मूल्य क्या है ?

$$\frac{१}{२}\left(य - \frac{अ}{३}\right) - \frac{१}{३}\left(य - \frac{अ}{४}\right) + \frac{१}{४}\left(य - \frac{अ}{५}\right) = ०$$

वामपक्ष =

$$\frac{१}{२}\,\frac{(३य - अ)}{३} - \frac{१}{३}\,\frac{(४य - अ)}{४} + \frac{१}{४}\,\frac{(५य - अ)}{५} =$$
$$\frac{३य - अ}{३ \times २} - \frac{(४य - अ)}{१२} + \frac{(५य - अ)}{२०} =$$
$$\frac{६य - २अ - ४य + अ}{१२} + \frac{(५य - अ)}{२०} =$$
$$\frac{२य - अ}{१२} + \frac{५य - अ}{२०} = \frac{१०य - ५अ + १५य - ३अ}{६०}$$
$$\therefore\ \frac{२५य - ८अ}{६०} = ०$$
$$\therefore\ २५य = ८अ$$
$$य = \frac{८अ}{२५}$$

उदाहरण (३)

'य' का मूल्य क्या है ?

$$\frac{अ - य}{अ} + \frac{२अ - य}{२अ} = \frac{३अ - य}{३अ}$$

समीकरण का वामपक्ष =

$$\frac{२(अ-य) + २अ - य}{२अ} = \frac{२अ - २य + २अ - य}{२अ} = \frac{४अ - ३य}{२अ}$$

$$\therefore \frac{४अ - ३य}{२अ} = \frac{३अ - य}{३अ}$$

$$\therefore १२अ - ९य = ६अ - २य$$

$$\therefore १२अ - ६अ = ९य - २य$$

$$\therefore ६अ = ७य$$

$$\therefore य = \frac{६अ}{७} ।$$

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

सभी प्रश्नों में 'य' का मूल्य निकालिए

(१) $\frac{य - ३}{७} - \frac{\frac{१}{२}य - ३}{३} = \frac{\frac{१}{६}य + २}{२} - \frac{य - ६}{३} + \frac{य}{८}$,

उत्तर य = २४

(२) $\frac{२य - १३}{९} - \frac{य - १}{११} = \frac{य}{८} + \frac{य}{७} - ९$ ।

उत्तर य = ५६

(३) $\frac{अ - य^2}{ब.य} - \frac{ब - य}{स} = \frac{स - य}{ब} - \frac{ब - य^2}{स.य}$ ।

उत्तर $य = \frac{अ.स + ब^2}{ब^2 + स^2}$

(४) $\frac{७य + ९}{४} - \left(य - \frac{२य - १}{९}\right) = ७$

उत्तर य = ५

(५) $(य + अ)(य + ब) - (अ + ब)^2 = (य - अ)(य - ब)$

उत्तर = $\frac{१}{२}(अ + ब)$

(६) $य(य - अ) + य(य - ब) = २(य - अ)(य - ब)$

उत्तर $य = \frac{२अब}{अ + ब}$

(७) $\frac{य-६}{५}+\frac{य-४}{३}+\frac{य-२}{७}=८$

उत्तर य = १६

(८) $\frac{४य-२}{५}+\frac{य-७}{३}=\frac{१९}{३}$

उत्तर य = ८

(९) $\frac{२य-९}{२७}+\frac{य}{१८}+य=\frac{य-३}{४}+\frac{२५}{३}$

उत्तर य=९

(१०) $य-\frac{१}{६}(२य-५७)=३य-\frac{२य-५}{१०}-\frac{५}{३}$ ।

उत्तर य = ५

अनेक वर्ण समीकरण सम्बद्ध कुछ उदाहरण तथा सोत्तर प्रश्न

उदाहरण (१) १५य + ७र = २४६ | य, र, का
९य − ४र = ० | मान क्या है

प्रथम समीकरण = १५य + ७र = २५६

∴ ४५य + २१र = ७३८

द्वितीय समीकरण = ९ य − ४र = ०

∴ ४५य − २०र = ०

अतः ४५य + २१र = ७३८

४५य − २० = ०

दोनों के अन्तर करने से

४१र = ७३८

$∴ र=\frac{७३८}{४१}=१८$

$∴ य=\frac{४र}{९}=\frac{७२}{९}=८$

उदाहरण (२) १३य − १२र + १५ = ० | य, र, का
८य − ७र = ० | मान निकालिए

प्रथम समीकरण के अनुसार

$य=\frac{१२र-१५}{१३}$

द्वितीय समीकरण के अनुसार

$$\text{य} = \frac{\text{७र}}{\text{८}}$$

$$\therefore \frac{\text{१२र} - \text{१५}}{\text{१३}} = \frac{\text{७र}}{\text{८}}$$

$$\therefore \text{९६र} - \text{१२०} = \text{९१र}$$

$$\therefore \text{५र} = \text{१२०}$$

$$\therefore \text{र} = \text{२४}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{२४}\times\text{७}}{\text{८}} = \text{२१}$$

उदाहरण (३)

$$\frac{\text{४य}+\text{७}}{\text{१०}} + \frac{\text{५य} + \text{३र}}{\text{७य} - \text{१८}} = \text{१}\frac{\text{५}}{\text{६}} + \frac{\text{६य}+\text{१३}}{\text{१५}}$$

$$\frac{\text{३र}+\text{१}}{\text{७}} - \frac{\text{२य} - \text{र}}{\text{११य} - \text{८र}} = \frac{\text{६र}-\text{५}}{\text{१४}} - \frac{\text{१}}{\text{२}}$$

इसमें य, र, का का मान क्या है ?

प्रथम समीकरण से

$$\frac{\text{२८य}^2 + \text{४९य} - \text{७२य} - \text{१२६} + \text{५०य} + \text{३०र}}{\text{७०य} - \text{१८०}}$$

$$= \frac{\text{११}}{\text{६}} + \frac{\text{६य}+\text{१३}}{\text{१५}} = \frac{\text{५५}+\text{१२य}+\text{२६}}{\text{३०}}$$

$$\therefore \frac{\text{२८य}^2 + \text{२७य} + \text{३०र} - \text{१२६}}{\text{७०य} - \text{१८०}} = \frac{\text{५५} + \text{१२य} + \text{२६}}{\text{३०}}$$

$$\text{८४य}^2 + \text{८१य} + \text{९०र} - \text{३७८} = \text{य}(\text{५५}\times\text{७}) + \text{८४य}^2 + \text{१८२य}$$

$$- \text{९९०} - \text{२१६य} - \text{४६८}$$

$$= \text{३८५य} + \text{८४य}^2 + \text{१८२य}$$

$$- \text{९९०} - \text{२१६य} - \text{४६८}$$

$$= \text{८४य}^2 + \text{३५१य} - \text{१४५८}$$

पक्षद्वय में ८४य^2 घटाने पर

$$\text{८१य} + \text{९०र} = \text{३५१य} - \text{१४५८} + \text{३७८} = \text{३५१य} - \text{१०८०}$$

$$\therefore \text{९०र} + \text{१०८०} = \text{३५१य} - \text{८१य} = \text{२७०य}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{९०र} + \text{१०८०}}{\text{२७०}} = \frac{\text{४५र} + \text{५४०}}{\text{१३५}}$$

इसी तरह द्वितीय समीकरण

$$\frac{३र+१}{७} - \frac{२य - र}{११य - ८र} = \frac{६र-५}{१४} - \frac{१}{२}$$

$$\therefore \frac{१}{२} - \frac{२य - र}{११य - ८र} = \frac{६र-५}{१४} - \frac{३र+१}{७}$$

वा $$\frac{११य - ८र - ४य + २र}{२२य - १६र} = \frac{६र - ५ - ६र - २}{१४}$$

$$\therefore \frac{७य - ६र}{२२य - १६र} = - \frac{७}{१४} = - \frac{१}{२}$$

$$\therefore १४य - १२र = १६र - २२य$$

$$\therefore १४य + २२य = १६र + १२र$$

$$\therefore ३६य = २८र$$

$$\therefore य = \frac{२८र}{३६} = \frac{७र}{९}$$

अब दोनों य मानों के समीकरण से

$$\frac{४५र + ५४०}{१३५} = \frac{७र}{९}$$

$$१३५र + १६२० = ३१५र$$

$$\therefore (३१५ - १३५)र = १६२०$$

$$\therefore १८०र = १६२०$$

$$\therefore र = \frac{१६२०}{१८०} = ९$$

$$य = \frac{७र}{९} = \frac{९ \times ७}{९} = ७$$

उदाहरण (४) $य + र + ल = ६$ | इसमें
$५य - ३र + २ल = १३$ | य, र, ल, का
$-य - २र + ३ल = ५$ | मान क्या है ?

प्रथम समीकरण से $य = ६ - र - ल$

द्वितीय समीकरण से $= \frac{१३ + ३र - २ल}{५}$

तृतीय समीकरण से $य = - ५ - २र + ३ल$

प्रथम द्वितीय य मानों के समीकरण से

$$६ - र - ल = \frac{१३ + ३र - २ल}{५}$$

$$\therefore ३० - ५र - ५ल = १३ + ३र - २ल$$

$$\therefore १७ = ८र + ३ल$$

$$\therefore र = \frac{१७ - ३ल}{८}$$

द्वितीय तृतीय य मानों के समीकरण से

$$\frac{१३ + ३र - २ल}{५} = - ५ - २र + ३ल$$

$$\therefore १३ + ३र - २ल = - २५ - १०र + १५ल$$

$$\therefore ३८ = - १३र + १७ल$$

$$\therefore र = \frac{१७ल - ३८}{१३}$$

दोनों र मानों के समीकरण से

$$\frac{१७ - ३ल}{८} = \frac{१७ल - ३८}{१३}$$

$$\therefore २२१ - ३९ल = १३६ल - ३०४$$

$$\therefore २२१ + ३०४ = १७५ल$$

$$\therefore ५२५ = १७५ल$$

$$ल = ३$$

र मान में उत्थापन से $\frac{१७ - ३ल}{८} = \frac{१७ - ९}{८} = १$

अतः $र = १$

य मान में उत्थापन से

$य = ६ - ४ = २$

अतः $य = २,\ र = १,\ ल = ३$

अभ्यासार्थ कुछ सोत्तर प्रश्न

(१) $४य + ७ = ५र$
$२य + ५ = ३र$ — इसमें $य = २$, $र = ३$

(२) $४य - ७र = ३०$
$२य - ९र = ४$ — इसमें $य = ११$, $र = २$

(३) $७य - ८र + १४ = ०$ इसमें $य = ६$
$५य - ३र - ९ = ०$ $र = ७$

(४) $\frac{५य+२}{७} - २र + १२ = ०$ इसमें $य = ८$

$३य + \frac{८र-७}{१३} - २९ = ०$ $र = ९$

(५) $८य - \frac{४र-७}{१३} = ३२ - \frac{५य-१}{१९}$ इसमें $य = ४$

$१२र + \frac{३(२य+३)}{११} = ६५ - \frac{७र+१९}{२७}$ $र = ५$

(६) $\frac{२५}{य} + \frac{१८}{र} = ११$ इसमें $य = ५$

$\frac{३}{४य} - \frac{२}{५र} = \frac{१}{६०}$ $र = ३$

(७) $३य + २र + ५ल = ३२$ $य = २$
$२य + ५र + ३ल = ३१$ इसमें $र = ३$
$५य + ३र + २ल = २७$ $ल = ४$

(८) $य + ३र + ५ल = १०$ $य = १$
$३य + ५र + ७ल = १४$ इसमें $र = -२$
$५य + ७र + ८ल = १५$ $ल = ३$

(९) $\frac{२}{य} + \frac{१}{र} - \frac{३}{२} = ०$ $य = १$

$\frac{३}{ल} - \frac{२}{र} - २ = ०$ इसमें $र = -२$

$\frac{१}{य} + \frac{१}{ल} - \frac{४}{३} = ०$ $ल = ३$

(१०) $३र + य - २ = ०$ $य = -२८$
$३ल - ४र - य = १५$ इसमें $र = १०$
$२य + ७ल - ७ = ०$ $ल = ९$

कुछ और मध्यमाहरण सम्बद्ध सोत्तर प्रश्न—

(१) कौन सी राशि है जिसे तीन से गुण कर गुणनफल में त्रिगुण राशि वर्ग तथा दश जोड़ देते तो वर्गात्मक बन जाती ?

उत्तर = ३

(२) कौन सी राशि है जिसके वर्ग वर्ग को दो से गुण कर गुणनफल में सप्तगुणित राशिवर्ग घटा देते तो मूलद हो जाती ?

उत्तर = ४

(३) कौन सी दो राशियां हैं जिनके वर्गों को क्रमशः ६, ४ से गुणकर योग वा अन्तर करते हैं तो वे (योग या अन्तर) वर्गात्मक हो जाते।

उत्तर = ४, ५

(४) कौन सी राशि है जिसे नौ और १० से अलग २ गुणकर गुणनफलों में एक २ जोड़ते हैं तो वर्गात्मक बन जाते हैं ?

उत्तर = ११

(५) कौन सा वर्ग है जिसमें नौ घटाकर दश से भाग देते या उन्नीस घटाकर दश से भाग देते तो विशुद्ध हो जाती।

उत्तर = ७ का वर्ग = ४९ है

देवचन्द्रकृतबीजवासनां सद्विमर्शसहितां सुधान्विताम्
मध्यमाहरणजां सुधीवरैर्वीक्ष्य बीजगणिते मुदाप्यताम्

इति सविमर्शसुधाव्याख्योपेते सवासने भास्करीयबीजगणितेऽने-
कवर्णमध्याहरणं समाप्तम्।

अथ भावितमुच्यते

मुक्त्वेष्टवर्णं सुधिया परेषां कल्प्यानि मानानि यथेप्सितानि ।
तथा भवेद्भावितभङ्ग एवं स्यादाद्यबीजक्रिययेष्टसिद्धिः ॥१॥

यत्रोदाहरणे वर्णयोर्वर्णानां वा वधाद्भावितमुत्पद्यते तत्रेष्टं वर्णमपहाय शेषयोः शेषाणां वा वर्णानामिष्टानि व्यक्तानि मानानि कृत्वा तैस्तान् वर्णान् पक्षयोरुत्थाप्य रूपेषु प्रक्षिप्यैवं भावितभङ्गं कृत्वा प्रथमबीजक्रियया वर्णमानमानयेत् ॥

सुधा.—जिस उदाहरण में वर्णद्वय या अनेक वर्णों के घात से 'भावित' उत्पन्न होता है वहाँ एक अभीष्ट वर्ण के अतिरिक्त सभी अन्य वर्णों का अभीप्सित मान कल्पना करके एक वर्णबीज क्रिया से उस अव्यक्त का भी मान लाना चाहिए ।

पहले भी ग्रन्थकार ने "तद्भावितं चासमजातिघाते" कहा है । अर्थात् असमजाति वाले वर्णों के घात से भावित होता है ।

वासना :—वर्णयो वर्णानां वधेन वा भावितमुपजायत इति वस्तुतः परिभाषा । असमजातिमत्सु विविधवर्णेषु एकातिरिक्तवर्णानामीप्सितमानकल्पनया तदव्यक्तमानमप्येकवर्णतो व्यक्तमुत्पद्येतैवेति ($\text{य}\,\text{इ}_1 + \text{इ}'.\text{क} + \text{इ}_2\text{ग} + \text{रू} = \text{य.नं}$) समीकरणवलोकत एव स्फुटम् । यतश्च यातिरिक्ताखिलमाने व्यक्तीभूते $\text{य.इ}_1 + \text{व्यक्त} = \text{य.इ}''$ स्वरूपेऽवशिष्टे य मान

$$\text{य}\,(\text{इ}_1 - \text{इ}'') = -\,\text{व्यक्त}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{-\,\text{व्यक्त}}{\text{इ}_1 - \text{इ}''}$$ मिति व्यक्तं भवेदिति सर्वमुपपन्नम् ।

उदाहरणम्

चतुस्त्रिगुणयो राश्योः संयुतिर्द्वियुता तयोः ।
राशिघातेन तुल्या स्यात् तौ राशी वेत्सि चेद्वद ॥ १ ॥

अत्र राशी या १, का १ । अनयोर्यथोक्ते कृते जातौ पक्षौ या ४ का ३ रू २ = या.का.भा १ ।

एवं भाविते जाते मुक्त्वेष्टवर्णमित्यादिसूत्रेण कालकस्य किलेष्टं रूपपञ्चकं मानं कल्पितं तेन प्रथमपक्षे कालकमुत्थाप्य रूपेषु प्रक्षिप्य जातम् या ४ रू १७। द्वितीयपक्षे या ५। अनयोः समशोधने कृते प्राग्वल्लब्धं यावत्तावन्मानम् १७। एवमेतौ जातौ राशी १७, ५। अथवा षट्केन कालकमुत्थाप्य जातौ राशी १०, ६। एवमिष्टवशादानन्त्यम् ॥

सुधा:—वे कौन सी दो राशियाँ हैं जिन्हें क्रमशः चार और तीन से गुणकर योग करदे और योगफल में दो जोड़ देते तो दोनों राशियों के घात के समान होता है ? यदि जानते हो तो कहो ।

यहाँ कल्पित दो राशियाँ = य, क

प्रश्नानुसार ४य + ३क + २ = य क

यहाँ पूर्वोक्त सूत्रानुसार 'य' के अतिरिक्त सभी वर्णों के मान व्यक्त मानकर एक वर्ण समीकरण क्रिया से अव्यक्त का भी व्यक्त मान लाना है

जैसे यहाँ क = ५ ऐसा माना

तो पूर्वोक्त समीकरण = ४य + १५ + २ = ५य

∴ य = १७

अतः दोनों राशियाँ क्रमशः १७, ५

आलाप = १७ × ४ + ३ × ५ + २ = ६८ + १७ = ८५ = १७ × ५ ।

उदाहरणम्

चत्वारो राशयः के ते यद्योगो नखसंगुणः ।
सर्वराशिहतेस्तुल्यो भावितज्ञ निगद्यताम् ॥ २ ॥

अत्र राशिः या १। शेषा दृष्टाः ५, ४, २। अतः प्रथमबीजेन लब्धं यावत्तावन्मानम् ११। एवं जाता राशयः ११, ५, ४, २। वा २८, १०, ३, १। वा ५५, ६, ४, १। वा ६०, ८, ३, १। एवं बहुधा ॥

सुधा: – वे कौन सी चार राशियाँ हैं जिनके योग को २० से गुणने से सभी राशियों के घात के समान होता है ? हे भावितज्ञ उन्हें बतलाओ ।

यहाँ कल्पित राशियाँ चारो अव्यक्त हैं किन्तु य के अतिरिक्त तीन राशियों का मान क्रमशः ५, ४, २ व्यक्त मान लिया गया है अतः प्रश्नानुसार

(य + ५ + ४ + २) २० = य × ५ × ४ × २

∴ (य + ११) २० = य × ४०

दोनों पक्षों में २० से भाग देने पर

य + ११ = २य

∴ ११ = य ।

अतः चारों राशियाँ ११ । ५ । ४ । २ । हुई ।

एवम् प्रथमातिरिक्त तीन राशियों यदि १०, ३, १ मानी जाय तो पूर्ववत् क्रिया से प्रथम राशि = २८, यदि ६, ४, १ मानी जांय तो प्रथम राशि=५५, अथवा यदि ८, ३, १ मानी जांय तो प्रथम राशि = ६० होती हैं ।

आलाप—(११ + ५ + ४ + २) × २० = २२ × २० =
४४० = ११ × ५ × ४ × २ = ११ × ४० = ४४०

उदाहरणम्—

यौ राशी किल या च राशिनिहति-
र्यौ राशिवर्गौ तथा
तेषामैक्यपदं सराशियुगलं
जाता त्रयोविंशतिः ।
पञ्चाशत् त्रियुताऽथ वा वद कियत्
तद्राशियुग्मं पृथक्
कृत्वाऽभिन्नमवेहि वेत्सि गणकः
कस्त्वत्समोऽस्ति क्षितौ ।।४।।

अत्र राशी या १ रू २ । अनयोर्घातयुतिवर्गाणां योगः याव १ या ३ रू ६ । इमं राशियोगोनत्रयोविंशतेः या १ रू २१ वर्गस्यास्य याव १ या ४२ रू ४४१ समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम् २९/३ । एवमेतौ राशी २९/३, २ ।

अथवा राशी या १, रू ३ । अतः प्राग्वज्जातौ राशी ९७/११, ३ । एवं पञ्चकमिष्टं प्रकल्प्य जाताविभिन्नौ ७, ५ ।

अथ द्वितीयोदाहरणे राशी या १, रू २ । अनयोर्घातयुतिवर्गाणां योगः याव १ या ३ रू ६ । अमुं राशिद्वयोनत्रिपञ्चाशद्वर्गस्यास्य याव १

या १०२ रू २६०१ समं कृत्वा प्राग्वज्जातौ राशी $\frac{१७३}{७}$, १। वा ११, १७।

एवमेकस्मिन् व्यक्ते राशौ कल्पिते, सति बहुधाऽऽयासेनाभिन्नौ राशी ज्ञायेते। अथ तौ यथाल्पायासेन भवतस्तथोच्यते।

सुधा- वे कौन सी दो राशियां हैं? जो दोनों राशि दोनों के घात, तथा दोनों के वर्ग इन सबों के योग के मूल में दोनों राशि जोड़ते हैं तो तेइस या तिरपन होते। इन अभिन्न दोनों राशियों को यदि तुम कहो तो तुम्हारे समान विश्व में कौन ज्योतिषी है?

कल्पित दोनों राशियां य, २

अतः प्रश्नानुसार दोनों राशियों य, २,

दोनों का घात = २ × य

दोनों का वर्ग = $य^2$; ४

इन सबों का योग = $य^2 + ३य + ६$

इसके मूल में राशि युग्म जोड़ने से

$\sqrt{य^2 + ३य + ६} + य + २ = २३$

$\therefore \sqrt{य^2 + ३य + ६} = २१ - य$

वर्ग करने से

$य^2 + ३य + ६ = य^2 - ४२य + ४४१$

$\therefore ३य + ६ = - ४२य + ४४१$

$४५य = ४४१ - ६ = ४३५$

$\therefore य = \frac{४३५}{४५} = \frac{२९}{३}$

अतः राशि द्वय $\frac{२९}{३}$, २

यदि दोनों राशियों य, ३, मानी जाँय तो पूर्वोक्त रीति से व्यक्तराशियां वे $\frac{९७}{११}$, ३।

यदि द्वितीय राशि पाँच मानी जाय तो पूर्ववत् प्रथम राशि = ७ होगी।

द्वितीय प्रश्नानुसार $\sqrt{य^2 + ३य + ६} + य + २$ यह ५३ के समान है अतः

$\sqrt{य^2 + ३य + ६} + य + २ = ५३$

$\therefore \sqrt{य^2 + ३य + ६} = ५१ - य$

पक्षों के वर्ग करने से

$य^{२} + ३य + ६ = य^{२} - १०२य + २६०१$

$\therefore ३य + ६ = - १०२य + २६०१$

वा $१०५य = २६०१ - ६ = २५९५$

$\therefore य = \frac{२५९५}{१०५} = \frac{१७३}{७}$

इस उदाहरण में द्वितीय राशि २ मानी गई है। यदि द्वितीय राशि = १७ मानी जाय तो प्रथम राशि = ११ आती है।

अतः प्रथमोदाहरण में अभिन्न दोनों राशियाँ = ७, ५

द्वितीय उदाहरण में अभिन्न दोनों राशियाँ = ११, १७

प्रथमोदाहरण का आलाप —

$\sqrt{७ + ५ + ७ \times ५ + ४९ + २५} + ५ + ७ =$

$\sqrt{१२ + ३५ + ४९ + २५} + ५ + ७ = \sqrt{१२१} + १२ = ११ + १२ = २३$

द्वितीयोदाहरण का आलाप —

$\sqrt{११ + १७ + ११ \times १७ + १२१ + २८९} + ११ + १७$

$= \sqrt{२८ + १८७ + १२१ + २८९} + ११ + १७ =$

$\sqrt{६२५} + २८ = २५ + २८ = ५३$

तत्र सूत्रं सार्धवृत्तद्वयम्—

भावितं पक्षतोऽभीष्टात् त्यक्त्वा वर्णौ सरूपकौ।
अन्यतो भाविताङ्केन ततः पक्षौ विभज्य च ॥ २ ॥
वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं भक्त्वेष्टेनेष्टतत्फले।
एताभ्यां संयुतावूनौ कर्तव्यौ स्वेच्छया च तौ ॥ ३ ॥
वर्णाङ्कौ वर्णयोर्माने ज्ञातव्ये ते विपर्ययात्।

समयोः पक्षयोरेकस्माद्भावितमपास्यान्यतो वर्णौ रूपाणि च, ततो भाविताङ्केन पक्षावपवर्त्य द्वितीयपक्षे वर्णाङ्कयोर्घातं रूपयुतं केनचिदिष्टेन विभज्य तदिष्टं तत्फलं च द्वे अपि वर्णाङ्काभ्यां स्वेच्छया युक्ते सती वर्णयोर्माने विपर्ययेण ज्ञातव्ये। यत्र कालकाङ्को योजितस्तद्यावत्तावन्मानं यत्र यावत्तावदङ्कस्तत्कालकमानमित्यर्थः। यत्र तु इयता-

वशादेवं कृते सत्यालोपो न घटते तत्रेष्टफलाभ्यां वर्णाङ्कावूनितौ व्यत्ययान्माने भवतः ॥

सुधा—प्रश्नानुसार सिद्ध समान पक्षद्वय में से किसी एक पक्ष में भावित और दूसरे पक्ष में सरूप वर्ण को घटाकर दोनों पक्षों में भाविताङ्क से, और वर्णाङ्कों के घात तथा रूप इन दोनों के योग में इष्टांक से भाग देना। ततः पर इष्टाङ्क और इष्ट भक्त फल इन दोनों को दो जगह रखकर उनमें वर्णाङ्कों को जोड़ने या घटाने से विलोमतः वर्णों का मान समझना।

वासना—कल्पितयोः समयोः पक्षयोः एकस्मिन् भावितमपरस्मिश्च तत्तद गुणगुणितं सरूपं च वर्णद्वयमर्थात्

समौ पक्षौ - य×क = इ. य+इ' क+रू

यद्यत्र य = न+इ', क=प + इ

तदोत्थापनतः पक्षौ (न + इ') (प + इ) =

इ (न+इ')+इ' (प+इ)+रु

∴ न. प+इ'.प+इ.न+इ इ'=इ. न + इ इ'+इ'प+इ' इ + रु

समशोधनेन

न.प=इ' इ + रू

∴ प = (इ' इ + रू)/न

अत्र मानं तथा कल्प्यं यथा प मानमप्यभिन्नं, तथात्वे य, क मानयोरप्यभिन्नत्वम्।

यद्यत्रे 'इ' इ+रू' ति धनात्मकं तदा न मानस्याधनात्मकत्वकल्पने प मानमप्यधनात्मकम् तदा य=इ' – न, क=इ – प। एतेन सर्वमुपपद्यते। क्षेत्रगता वासनाप्यत्र मूलग्रंथेऽस्तीति विलोक्या।

अथ प्रथमोदाहरणम्—

चतुस्त्रिगुणयो राश्योः संयुतिर्द्वियुता तयोः।
राशिघातेन तुल्येति ॥

तत्र यथोक्ते कृते पक्षौ | या ४ का ३ रू २ / या. का. भा १ | वर्णाङ्काहतिरूपैक्यम् १४ एतदेकेनेष्टेन हृतं जाते इष्टफले १, १४। एते वर्णाङ्काभ्यां ४, ३ स्वेच्छया युते जाते यावत्तावत्कालकमाने ४, १४ वा १७, ५ द्विकेन ५, ११ वा १०, ६ ॥

अस्योपपत्तिः। सा च द्विधा सर्वत्र स्यादेका क्षेत्रगतान्या राशिगतेति। तत्र क्षेत्रगतोच्यते। द्वियीयपक्षः किल भावितसमो वर्त्तते भावितं त्वायतचतुरस्रक्षेत्रफलं तत्र वर्णौ भुजकोटी।

अत्र क्षेत्रान्तर्यावत्तावच्चतुष्टयं वर्त्तते कालकत्रयं द्वे च रूपे। अतः क्षेत्राद्याव त्तावच्चतुष्टये रूपचतुष्टयोनकालके स्वाङ्कगुणे चापनीते जातम्।

द्वितीयपक्षे च तथा कृते जातम् १४। एतद्भावितक्षेत्रान्तर्वर्त्तिनोऽवशिष्टक्षेत्रस्याधस्तनस्य फलं तद्भुजकोटिवधाज्जातम्। ते चात्र ज्ञातव्ये।

अत इष्टौ भुजः कल्पितस्तेन फलेऽस्मिन् १४ भक्ते कोटिर्लभ्यते अनयोर्भुजकोट्योरेकतरा यावत्तावदङ्कतुल्यै रूपैः ४ अधिकतरा सती भावितक्षेत्रस्य कोटिर्भवति यतो भावितक्षेत्राद्यावचतुष्टयेऽपनीते तत्कोटिश्चरूना जाता। एवं कालकतुल्यै रूपैः ३ अधिकतरो भुजो भवति ते एव यावत्तावत्कालकमाने।

अथ राशिगतोपपत्तिरुच्यते साऽपि क्षेत्रमूलान्तर्भूता। तत्र यावत्तावत्कालजभुजकोटिमानात्मकक्षेत्रान्तर्गतस्य लघुक्षेत्रस्य भुजकोटिमाने अन्यवर्णौ कल्पितौ नी १, पी १। अतएतयोरेकतरो यावत्तावदङ्कतुल्यैः रूपैरधिको बहिःक्षेत्रकोटेः कालकस्य मानम्। अन्य कालकतुल्यैः रूपैः रधिको भुजस्य यावत्तावतो मानं कल्पितम्। का = नी १ रू ४, या = पी १ रू ३। आभ्यां पक्षयोर्यावत्तावत्कालकवर्णवुत्थाप्योपरितनपक्षे नी ३ पी ४ रू २६।

भावितपक्षे च नी. पी. भा १। नी ३ पी ४ रू १२। एतयोः समशोधने कृते जातमधः नी. पी, भा १। ऊर्ध्वपक्षे रू १४।

इदमेव तदन्तः क्षेत्रफलमेतद्वर्णाङ्कयोर्घातस्य रूपयुतस्य समं स्यादतो वर्णमाने भवतस्तत् प्रागुक्तमेव। इयमेव क्रिया पूर्वाचार्यैः

संक्षिप्तपाठेन निबद्धा। ये क्षेत्रगतामुपपत्तिं न बुद्धयन्ति तेषामियं राशिगता दर्शनीया।

> उपपत्तियुतं बीजगणितं गणका जगुः।
> न चेदेवं विशेषोऽस्ति न पाटीबीजयोर्यतः॥

अत इयं भावितोपपत्तिर्द्विविधा दर्शिता। यतूक्तं वर्णाङ्कयोर्घातो रूपैर्युतो भावितक्षेत्रान्तर्वर्त्तिनोऽन्यक्षेत्रस्य कोणस्थस्य फलमिति तत् क्वचिदन्यथा स्यात्। यथा वर्णाङ्कौ ऋणगतौ भवतस्तदा तस्यैवान्तर्भावितक्षेत्रं कोणे दृश्यते यदा तु भावितक्षेत्रे भुजकोटिभ्यां वर्णाङ्काधिकौ धनगतौ भवतस्तदा भावितक्षेत्राद्बहिःकोणस्थं क्षेत्रं स्यात् तद्यथा।

यदीदृश उद्देशकस्तत्र भ्यामूनितौ वर्णाङ्कौ यावत्तावत्कालकयोर्मानि भवतः॥

सुधा—

उदाहरणानुसार सिद्ध पक्षद्वय

४ य + ३ क + २ = य. क

वर्णाङ्काहतिरूपैक्यमित्याद्यनुसार

वर्णाङ्काहतिरूपैक्य ४×३+२=१४

यदि कल्पित इष्ट = १

तो १४ ÷ १ = १४,

अतः फल १४।

इन इष्ट तथा फलों को क्रमशः वर्णाङ्क ४, ३ से जोड़ने से

१+४=५ = क का मान

१४+३=१७ य का मान

अथवा इन इष्ट फलों को क्रमशः ३, ४ में जोड़ने से

१+३ = ४=क का मान

१४+४ = १८=य का मान

अथवा यदि इ = २

तो वर्णाङ्काहतिरूपैक्य=१४ में इष्ट २ से भाग लेने पर

$\frac{१४}{२}$ = ७ ।

अतः इष्ट = २ फ = ७

इन्हे वर्णाङ्कों में जोड़ने पर

य = ३+२ = ५

क=४+७=११

उदाहरणम्—

द्विगुणेन कयोः राश्योर्घातेन सदृशं भवेत् ।
दशेन्द्राहतराश्यैक्यं द्व्यूनषष्टिविवर्जितम् ।। १ ।।

अत्र राशी या १, का १। अनयोर्यथोक्ते कृते भाविताङ्केन भक्ते जातम् या ५ का ७ रू २९̇ । अत्र वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं ६ द्विहृतमिष्टफले २, ३ । आभ्यां वर्णाङ्कौ युतौ राशी १०, ७ वा ९, ८ । वा ऊनितौ जातौ ४, ३ वा, ५, २ ।।

सुधाः—दश और चौदह से गुणित दो राशियों के योग में द्वयूनषष्टि (अंठावन) घटा देते तो द्विगुण राशिद्वय घात के बराबर होता है तो वे दो राशियाँ कौव हैं ?

यहाँ भी कल्पित राशियाँ = य, क,

प्रश्नानुसार १०य + १४क − ५८ = २य.क

दोनों पक्षों में दो से भाग देने पर

५य + ७क − २९ = य क

यहाँ भी वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं भक्त्वेष्टेनेष्टतत्फले' आदि के अनुसार

७ × ५ − २९ = ३५ − २९ = ६

यदि कल्पितेष्ट = २, तो ६ ÷ २ = ३ = फ

वर्णाङ्कों में इष्ट तथा फलों को जोड़ने पर

५ + २ = ७ = क, ७ + ३ = १० = य

वा ५ + ३ = ८ = क, ७ + २ = ९ = य

अथवा ५ − २ = ३ = क, ७ − २ = ५ = य

५ − ३ = २ = क, ७ − ३ = ४ = य

उदाहरण—

त्रिपञ्चगुणराशिभ्यां युतो राश्योर्वधः कयोः ।
द्विषष्टिप्रमितो जातो राशिं त्वं वेत्सि चेद्वद ॥ २ ॥

अत्र यथोक्ते कृते जातौ पक्षौ { या ३ का ५ रू ६२ / या.का.भा १ } वर्णाङ्काहतिरूपैक्यम् ७७। इष्टतत्फले ७, ११। आभ्यां वर्णाङ्कौ युतावेव कार्यौ इष्टतत्फलाभ्यामाभ्याम् ७, ११। ऊनितौ चेद्विधीयेते तदा ऋणगतौ भवतोऽत आभ्यां ७, ११ युतौ जातौ राशी ६, ४ वा २, ८। ऊनितौ १२, १४, वा १६, १०॥

सुधा:—कौन वे दो राशियाँ हैं जिनके गुणनफल में तीन, पाँच, से गुणित राशिद्वय जोड़ने से बासठ होते हैं ? यदि जानते हो तो बतलाओ।

उदाहरण—

कल्पित दो राशियाँ = य, क

अतः प्रश्नानुसार ३य + ५क + यक = ६२

∴ य क = ६२ − ३य − ५क

यहाँ भी 'वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं भक्त्वेष्टेनेष्टतत्फले एताभ्यां संयुक्तावूनौ कर्त्तव्यौ स्वेच्छया च तौ। वर्णाङ्कौ वर्णयोर्माने ज्ञातव्ये ते विपर्ययात्" के अनुसार

वर्णाङ्काहतिरूपैक्य = − ५ × − ३ + ६२ =
१५ + ६२ = ७७

कल्पित इष्ट = ७

$\frac{७७}{७}$ = ११। अतः इष्ट = ७ फल = ११

∴ − ३ + ७ = ४ = क, − ५ + ७ = २ = य

− ३ + ११ = ८ = क, − ५ + ११ = ६ = य

अथवा − ५ − ७ = − १२ = य,

− ५ − ११ = − १६ = य

− ३ − ११ = − १४ = क

− ३ − ७ = − १० = क

अथ पूर्वचतुर्थोदाहरणम्।

यौ राशी किल या च राशिनिहितिर्यौ राशिवर्गौ तथा
तेषामैक्यपदं सराशियुगलंमिति।

अत्र राशी या १, का १। अनयोर्घातयुतिवर्गाणां योगः

याव १ काव १ या.का.भा १ या १ का १। अस्य मूलाभावाद्राशिद्वयोनायास्त्रयोर्विंशतेः या १ का १ रू २३ वर्गेणानेन याव १ काव १

या.का.भा२ या ४६ का ४६ रू५२९, साम्यम्। तत्र समयोगवियोगादौ समतैवेति समवर्गगमे शोधने च कृते भाविताङ्केन हृते जातम्—

या ४७ का ४७ रू ५२९। अत्र वर्णाङ्काहतिः रूपयुता १६८०। इयं चत्वारिंशतेष्टेन हृता फलम् ४२, इष्टम् ४०। अत्रेष्टफलाभ्यामाभ्यां वर्णांकावूनावेव कार्यौ तेन जातौ राशी ७, ५। युतौ चेत् क्रियेते तर्हि जाता त्रयोविंशतिरिति पूर्वलापो न घटते।

पूर्वोदाहरणम। पञ्चाशत् त्रियुताऽथ वेति।

अत्रोदाहरणे यथोक्तकृतभाविताङ्केन विभक्ते जातम्

या १०७ का १०७ रू२८०९। अत्र वर्णाङ्काहतिरूपैक्यम् ८६४०।

इष्टतत्फले ९०, ९६। आभ्यां वर्णाङ्कावूनितौ राशी ११, १७। एवमन्यत्रापि।

क्वचिद्बहुषु साम्येषु भावितोन्मितीरानीय ताभ्यः समीकृतच्छेदगमाभ्यः साम्ये पूर्वबीजक्रिययैव राशी ज्ञायेते। अत्र राशी इति द्विवचनादन्येषां त्र्यादिवर्णानामिष्टानि मानानि कल्प्यानीत्यर्थात् सिद्धम्।

इति श्रीभास्कराचार्यविरचिते बीजगणिते भावितं समाप्तम्।

सुधा—पहले लिखी जा चुकी है।

पूर्व कल्पित राशिद्वय = य, क,

प्रश्नानुसार :—

$$\sqrt{य + क + य.क + य^2 + क^2} + य + क = २३$$

$$\therefore \sqrt{य^2 + क^2 + य.क + य + क} = २३ - य - क$$

पक्षद्वय के वर्ग करने से

$$य^2 + क^2 + य.क + य + क = (२३ - य - क)^2 =$$

$$५२९ - ४६य - ४६ क + य^2 + २यक + क^2$$

समशोधन करने पर

$$य.क = ५२९ - ४७य - ४७क + २यक$$

$$\therefore ४७य + ४७क - ५२९ = यक$$

यहाँ भी 'वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं भक्त्वेष्टेनेष्टतत्फले आदि के अनुसार

$$वर्णाङ्काहतिरूपैक्य = ४७ \times ४७ + - ५२९$$

$$= २२०९ + - ५२९ = १६८०$$

यदि कल्पितेष्ट = ४० तो फल = $\frac{१६८०}{४०}$

अतः इ = ४०, फल = ४२ इन्हें वर्णाङ्कों के साथ युक्तोन करने पर मान लाना चाहिए।

किन्तु युक्त वाले मानों से आलापस्थ २३ नहीं घटते अतः ऊनवाला ही मान उपयुक्त है।

४७ − ४० = ७	ये मान दोनों
४७ − ४२ = ५	के हो सकते

क्योंकि दोनों वर्णाङ्क बराबर हैं।

उपर्युक्त उदाहरण पद्य के उत्तरार्ध के अनुसार—

$\sqrt{य^2 + क^2 + यक} + य + क + य + क = ५३$

$\therefore य^2 + क^2 + य क + य + क = (५३ - य - क)^2 =$

$य^2 + क^2 + २य.क - १०६य - १०६क + २८०९$

समशोधन से

$१०७य + १०७क - २८०९ = यक$

यहाँ भी वर्णाङ्काहातिरूपैक्य मित्यादि से

वर्णाङ्काहति = $(१०७)^2$ = ११४४९।

रू = − २८०९

अतः वर्णाङ्काहति रूपैक्य = ११४४९ − २८०९

= ८६४०।

यदि कल्पितेष्ट = ९० तो $\frac{८६४०}{९०}$ = ९६ = फल

अतः इष्ट = ९०, फ = ९६

यहाँ भी योग वाला मान आलाप बहिर्भूत होने के कारण अनुपयुक्त

१०७ − ९० = १७	ये ही दोनों
१०७ − ९६ = ११	मान उपयुक्त हैं।

—०—

देवचन्द्रकृतबीजवासना सद्विमर्शसहिता सुधान्विता
सूक्ष्मवीक्षणपरैर्विचक्षणैर्भावितप्रकरणे विभाव्यताम्।
इति सविमर्शसुधाव्याख्योपेते सवासने
भास्करीयबीजगणिते भावितप्रकरणं
समाप्तम्॥

ग्रन्थकारकृतात्मनिवेदनम्

आसीन्महेश्वर इति प्रथितः पृथिव्या-
माचार्यवर्यपदवीं विदुषां प्रपन्नः ।
लब्ध्वावबोधकलिकां तत एव चक्रे
तज्जेन बीजगणितं खलु भास्करेण ॥१॥
ब्रह्माह्वयश्रीधरपद्मनाभ-
बीजानि यस्मादतिविस्तृतानि ।
आदाय तत्सारमकारि नूनं
सद्युक्तियुक्तं लघु शिष्यतुष्टयै ॥२॥
अनुष्टुप् सहस्त्रं हि ससूत्रोद्देशके मितिः
क्वचित्सूत्रार्थं विषयं व्याप्ति दर्शयितुं क्वचित् ॥३॥
क्वचिच्च कल्पनाभेदं क्वचिद्युक्तिमुदाहृतम् ।
नह्युदाहरणान्तोऽस्ति स्तोकमुक्तमिदं यतः ॥४॥
दुस्तरः स्तोकबुद्धीनां शास्त्रविस्तारवारिधिः ।
अथवा शास्त्रविस्तृत्या किं कार्यं सुधियामपि ॥५॥
उपदेशलवं शास्त्रं कुरुते धीमतो यतः
तत्तु प्राप्यैव विस्तारं स्वयमेवोपगच्छति ॥६॥

यथोक्तं यन्त्राध्याये

जले तैलं खले गुह्यं पात्रे दानं मनागपि ।
प्राज्ञे शास्त्रं स्वयं याति विस्तारं वस्तुशक्तितः ॥७॥

तथा गोले मयोक्तम् ।

उल्लसदमलमतीनां त्रैराशिकमात्रमेव पाटी बुद्धिरेव बीजम्
तथा मन्त्राध्याये मयोक्तम् —
अस्ति त्रैराशिकं पाटी बीजं च विमला मतिः
किमज्ञातं सुबुद्धीनामतो मन्दार्थमुच्यते ॥८॥
गणकभणितिरम्यं बाललीलावगम्यं
सकलगणितसारं सोपपत्तिप्रकारम् ।
इति बहुगुणयुक्तं सर्वदोषैर्विमुक्तं
पठ पठ मतिवृद्धयै लध्विदं प्रौढिसिद्धयै ॥९॥

इति भास्कराचार्यविरचिते सिद्धान्तशिरोमणौ
बीजगणिताध्यायः समाप्तः ।

सुधा—विश्वविख्यात मेरे पिताजी, जिनका नाम महेश्वर था, विद्वानों के बीच आचार्य प्रवर समझे जाते थे। उन्हीं से थोड़ा सा ज्ञान प्राप्त कर मैंने इस छोटे से ग्रन्थ की रचना की है।

चूँकि ब्रह्मगुप्त श्रीधर पद्मनाभ रचित बीजगणित अति विस्तृत है, अतः उन्हीं ग्रंथों का सार लेकर छात्रों के सन्तोषार्थ युक्तियुक्त यह छोटा सा ग्रंथ मैंने रचा है ॥ २ ॥

इस ग्रंथ में सोदाहरण सूत्रों की संख्या अनुष्टप् सहस्र प्रमित है। कहीं सूत्रार्थ विषम प्रदर्शन के लिए, कहीं सूत्र की व्याप्ति दिखलाने के लिए और कहीं उक्ति प्रदर्शन के लिए उदाहरण उपस्थित किये गये हैं। चूँकि उदाहरणों का अन्त नहीं है। अतः थोड़े से ही उदाहरण उपस्थित किए गए हैं ॥३–४॥

अल्प बुद्धि वालों के विस्तृत शास्त्र रूपी समुद्र दुस्तर है और विद्वान् के लिए शास्त्रविस्तार का क्या प्रयोजन? अर्थात् दोनों के लिए शास्त्र विस्तार निष्प्रयोजन है। बुद्धिमान् के द्वारा व्यक्त किया गया उपदेशांश भी शाखा बन कर खुद विस्तृत हो जाता है ॥ ५–६ ॥

जैसा कि यन्त्राध्याय में मैंने कहा है—जल में तेल, दुर्जन में रहस्य, सुपात्र में दान और सुबुद्ध में शास्त्र, थोड़ा सा भी वस्तु—शक्त्या खुद विस्तृत हो जाता है ॥ ६ ॥

वैसे ही गोल में मैंने कहा है कि तीव्र बुद्धि वालों के लिए त्रैराशिक ही पाटी गणित और बुद्धि ही बीजगणित है। गोलाध्याय में मैंने और भी कहा है :—

त्रैराशिक ही पाटी गणित, और बुद्धि ही बीजगणित है। सुबुद्धों को कुछ भी अज्ञात नहीं है, अतः मन्द बुद्धियों के लिए ही मैं कह रहा हूं ॥८॥

ज्योतिषियों के कथनों से रमणीय, बच्चों के द्वारा भी सुबोधगम्य, समस्त गणितों का उपपत्तियुक्त सार, अनेक गुणों से युक्त तथा समस्त दोषों से रहित इस छोटे बीज गणित ग्रन्थ को बुद्धिवृद्धि एवं प्रौढ़ता के लिए पढ़ो-पढ़ो (अवश्य पढ़ो) ॥ ९ ॥

इति सविमर्शसुधासहिते सवासने भास्कराचार्यविरचितसिद्धान्त–
शिरोमणौ बीजगणिताध्यायः समाप्तः।

समाप्तोऽयं ग्रन्थः।

पुष्पाञ्जलिः

यत्र श्रीजनको विदेहपदभाग् भूमण्डले विश्रुतो
ज्ञानीन्द्रोऽपि च गौतमप्रभृतयोब्रह्मर्षयोऽजीजनन् ।
येयं शङ्करमण्डनोदयनविद्वाचस्पतीनां प्रसूः
धन्या सा **मिथिला** चिरं जयतु नः सौभाग्यधीवर्धिनी ॥ १ ॥

तस्यां दक्षिणतोविदेनगरात् सार्धक्षमायोजने
सौराठादपि वायुकोणगपथे क्रोशत्रयाऽभ्यन्तरे ।
विद्वद्भिर्बहुभिश्चिराद् विलसितं रम्यं पुरं श्रीलसद्-
विख्यातं '**नगवास**' नामकमिति प्रायोऽखिलैर्ज्ञायते ॥ २ ॥

लब्ध्वा जन्म च तत्र बाल्यसमये ग्रामे स्वकीये पुरः
पश्चान्मातुलपत्तने हि **डुमरा** संज्ञेऽतिनेदीयसि ।
प्रेम्णाऽध्यापयतः शतं द्विजनुषां **विश्वेश्वरात्** सद्गुरो-
रध्यैषि प्रथितान् विचारविविधान् ज्योतिर्निबन्धानहम् ॥ ३ ॥

तदनु विषयमर्मज्ञानवृद्ध्यै समृद्ध्यै
नवनवगणितानां ज्ञानराशेर्हितानाम् ।
दिशिदिशि विदितानां काशिधामस्थिताना-
ममलमतिबुधानामन्तिकं प्रापमज्ञः ॥ ४ ॥

तत्रासन्नवदातकीर्त्तिलसिता यद्यप्यनेके परं-
ग्रन्थग्रन्थिविमोचने **सुरगुरुर्गेनादिलालो** गुरुः ।
शिष्या यस्य दयादिनाथमुरलीगङ्गाधराद्याः शतं-
तं चाहं प्रणिपत्य सत्यविनतः सर्वात्मना संश्रितः ॥ ५ ॥

यदङ्घ्रिकमलद्वयस्खलितधूलिपूता हृता
अपि प्रपतिता जनास्त्वरितमोज्यतामागताः ।
गुरुं तमहमाश्रितोऽपरशिवाश्रयज्ञानतो
नतोहि वचनामृतं नगसमाः पिबन्नास्थितः ॥ ६ ॥

वाराणस्यां गुरुवरपदानुग्रहाज्ज्यौतिषे प्राक्
साहित्येऽपि प्रथितसुयशः श्री **मुकुन्द**प्रसादात् ।
आचार्यत्वं समजनि ततः प्रौढताऽवाप्तिकामः
प्रोष्टाचार्येऽप्यगमयमहं त्रीणि वर्षाणि भूयः ॥ ७ ॥

आचार्यद्वयमेवं पोष्टाचार्यं तथैव काशीतः
श्रमक्रमाभ्यामेमेद्वयं तु काशीविहाराभ्याम् ॥ ८ ॥

आदौ प्रतापगढमण्डलगे प्रशस्त-
विद्यालयेऽजनि मम प्रथमा नियुक्तिः ।
अध्याप्य तत्र ननु वर्षचतुष्टय हि-
ज्योतिर्निबन्धविषयान् पुनरुन्नतोऽहम् ॥ ९ ॥

साकेतगेऽतिविदिते विमले नवाङ्ग्ल-
विद्यालये महति मेत्वपरा प्रसक्तिः ।
वर्षाणि पञ्च ननु तत्र मुदाऽतिवाह्य-
व्याख्यातृतामपि विहाय विहारमापम् ॥ १० ॥

विहारेऽस्मत्प्रान्ते सुविदितनिशान्तेऽमरगिर-
स्तदुन्नत्यै युक्ताः कतिचन नियुक्ता हि सुधियः ।
अहं चापि प्रीत्या ननु निहितनीत्या प्रभुवरै-
र्नियुक्तः शिक्षायास्त्वरितमुदिताया नवपदे ॥ ११ ॥

शरमिताः शरदः किल तत्पदे
व्यतिगमय्य पदोन्नतितः पुनः ।
प्रथितधर्मसमाजसुसंज्ञके
गणकवर्यपदे विनियोजितः ॥ १२ ॥

मुजफ्फरपुरे धर्मसमाजाऽऽरसंज्ञके
महाविद्यालये राजकीये परमविश्रुते ॥ १३ ॥

अष्टादश समा ज्योतिः शास्त्रमध्याप्य वै पुनः
पटनासंस्थिते तत्र स्थानान्तरणतो गतः ॥ १४ ॥

वर्षाणि तत्र कतिचिच्च मुदाऽतिवाह्य
वर्षेऽङ्कभूधर नवेन्दुमिते (१९७९ ई०) निवृत्तः ।
सेवात इत्यथ च संस्कृतशोधसंस्था-
सम्मान्यकोविदपदे विनियोजितोऽस्मि ॥ १५ ॥

दरभंगास्थितमिथिलाविद्यापीठेऽतिविश्रुते शोध-
संस्थाने सुमतीनामुपकृत्यै मादृशाः सन्ति ॥ १६ ॥

अधिमधुवनि नववासे नगवासे न त्यजन् गृहं नैजम्
निवसामि सप्रसादश्चन्द्रकुटीरे निजे सपरिवारः ॥ १७ ॥

—०—